УДК 519.633

Дослідження збіжності адитивно-усередненого розщеплення на основі схеми явного рахування для тривимірних рівнянь конвективної дифузії

© *Л. М. Кацалова, 2015*

Український науково-дослідний гідрометеорологічний інститут
МНС та НАН України, Київ, Україна
Надійшла 1 жовтня 2015 р.
Представлено членом редколегії Я. М. Хазаном

Современные математические модели прогноза погоды базируются на уравнениях гидродинамики, которые в общем виде являются трехмерными уравнениями конвективной диффузии. В статье рассмотрен новый подход к решению таких уравнений, который заключается в использовании аддитивно-усредненного расщепления на основе метода явного счета. Представлены результаты исследования устойчивости и сходимости метода. Приведены соответствующие математические обоснования и оценки. Согласно полученным результатам сделаны выводы об эффективности метода при решении гидродинамических уравнений.
Ключевые слова: уравнение конвективной диффузии, аддитивно-усредненное расщепление, метод явного счета, устойчивость, сходимость.

Вступ. У сучасній метеорології розв'язання задачі прогнозу погоди ґрунтується на математичному моделюванні атмосферних процесів [Кибель, 1957; Марчук, 1967; Белов и др., 1989; Прусов, Сніжко, 2005]. Математичне моделювання складається з таких етапів [Тихонов, Самарский, 1972; Самарский, Михайлов, 2001]:

1) побудова математичної моделі, що описує циркуляцію атмосфери;

2) вибір методу реалізації моделі;

3) програмування обчислювального алгоритму на ЕОМ і проведення розрахунків.

Щодо першого етапу на сьогодні існує цілком задовільна математична теорія руху рідини взагалі й атмосферних рухів зокрема [Матвеев, 1965; Roache, 1985; Гилл, 1986]. Ця теорія ґрунтується на фізичних законах збереження кількості руху, маси й енергії. Математично її виражають рівняннями руху Нав'є—Стокса, які зв'язують прискорення у певному напрямку з компонентами об'ємних і поверхневих сил, що діють у цьому напрямку, рівнянням збереження маси, термодинамічним рівнянням енергії і, нарешті, рівнянням стану Бойля—Шарля [Прусов, Дорошенко, 2006]. Слід підкреслити, що ці фундаментальні закони, залишаючись істотно незмінними, і складають основу математичних моделей прогнозування погоди.

Прогностичні моделі реалізують за допомогою чисельних методів [Самарский, Гулин, 1989]. Це зумовлено складністю математичних моделей, що описують циркуляційні процеси в атмосфері. Рівняння, з яких складаються такі моделі, є переважно нелінійними тривимірними рівняннями другого порядку з малим параметром при похідних другого порядку. Завдяки наявності малого параметра при старших похідних ці рівняння можуть змінювати свій тип (гіперболічний або параболічний) [Прусов, Дорошенко, 2006] залежно від модельованого режиму руху в атмосфері.

В умовах вітчизняних наукових реалій значною проблемою реалізації математичних моделей є обмеження на час розв'язання, оскільки прогноз погоди потрібно отримувати завчасно. Навіть сучасні обчислювальні машини не дають змоги використовувати дрібну просторову і часову дискретизацію та ітераційні методи, що привело б до підвищення точності прогнозу [Prusov et al., 2006].

У практичній реалізації рівнянь гідродинаміки і тепло-, масоперенесення часто застосовують методи розщеплення, згідно з якими тривимірні рівняння зводять до послідовності трьох одновимірних задач, що пов'язані між собою початковими даними [Самарский, Вабищевич, 1999; Prusov et al., 2006].

Нижче запропоновано саме такий підхід до розв'язання тривимірних рівнянь конвективної дифузії, а саме застосування адитивно-усередненого розщеплення [Гордезиани, Меладзе, 1974] до тривимірного рівняння та скінченно-різницевої схеми явного рахування [Прусов и др., 2007; Гук, 2011] до послідовності отриманих одновимірних задач. У статті досліджено збіжність запропонованої реалізації та обґрунтовано доцільність її застосування.

Постановка задачі. Рівняння гідродинаміки і тепло-, масоперенесення, що складають основу математичних моделей прогнозу погоди, можна записати у загальному вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda u=f$$

при $\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Omega/\Gamma\,,\ t>0\,,$ (1)

$$u\left(0,x_1,x_2,x_3\right)=u^0\left(x_1,x_2,x_3\right)$$

при $\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Omega\,,$ (2)

$$u\left(t,x_1,x_2,x_3\right)\equiv 0$$

при $\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\Gamma\,,\ t>0\,,$ (3)

де $\Omega=\left[0,\ell_1\right]\times\left[0,\ell_2\right]\times\left[0,\ell_3\right]$ — просторова область визначення задачі; Γ — межа області Ω; $u=u\left(t,x_1,x_2,x_3\right)$ — залежна функція; $f=f\left(t,x_1,x_2,x_3\right)$ — вільний член рівняння; $\Lambda=\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha$ — просторовий диференціальний оператор, що подається через суму простіших операторів; $\Lambda_\alpha=v_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\mu\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$, v_α, μ — сталі.

Дискретизуємо просторово-часову область визначення задачі:

$$\omega_\tau=\left\{t^n=n\tau:,\ n=0,1,\ldots\right\}$$

— часова сітка;

$$\omega_h=\omega\left(h_1,h_2,h_3\right)=$$
$$=\left\{\left(x_1=j_1h_1,x_2=j_2h_2,x_3=j_3h_3\right):h_\alpha=\right.$$
$$\left.=\ell_\alpha/J_\alpha\,,\ j_\alpha=\overline{0,\,J_\alpha},\ \alpha=1,2,3\right\}$$

— рівномірна за кожним координатним напрямком x_α просторова сітка.

Означимо скінченно-вимірний гільбертовий простір H_0 як множину векторів

$$\left\{y=(y_0,y_1,\ldots,y_N):y_{b(i_1,i_2,i_3)}=\right.$$
$$\left.=0,\ i_\alpha\in\left\{0,J_\alpha\right\},\alpha=1,2,3\right\}$$

зі скалярним добутком

$$\left(y,v\right)=h\sum_{x\in\omega_h}y\left(x\right)v\left(x\right)=\sum_{i_1=1}^{J_1-1}\sum_{i_2=1}^{J_2-1}\sum_{i_3=1}^{J_3-1}h\,y_{b(i_1i_2i_3)}v_{b(i_1i_2i_3)}\,,$$

де

$$N=\prod_{\alpha=1}^{3}\left(J_\alpha+1\right)-1,\ h=h_1h_2h_3\,;b\left(i_1,i_2,i_3\right)=a\left(i_1,i_2,i_3\right)^T$$

— бієктивний оператор; $a=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ — проекційний вектор; $a_\alpha=\prod_{s=0}^{\alpha-1}\left(J_s+1\right)$, $J_0=0$. По суті, оператор $b\left(i_1,i_2,i_3\right)$ визначає перехід від трицифрового індексування до послідовного для кожного вузла сітки ω_h і значень y в них.

Також для елементів цього простору розглядатимемо норму $\|y\|=\sqrt{\left(y,y\right)}$.

Визначимо оператори, що діють в H_0:

$$y_{\bar{x},i}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\,,\ y_{x,i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\,,$$

$$y_{\bar{x}x,i}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}\,,\ A_0y=-\mu y_{\bar{x}x}\,.$$

Апроксимуємо задачу (1)–(3) за допомогою адитивно-усередненого розщеплення [Гордезиани, Меладзе, 1974] та методу явного рахування [Гук, 2011]:

$$\frac{\xi^\alpha-y^n}{3\tau}+\left(B_\alpha\xi^\alpha+A_\alpha y^n\right)=f_\alpha^n=\frac{f^n}{3}\,,\ \alpha=1,2,3\,,\quad(4)$$

де

$$\left(B_\alpha y\right)_i=\left(\frac{v_\alpha}{2}+\frac{\mu}{h_\alpha}\right)y_{\bar{x}_\alpha,i}\,;\ \left(A_\alpha y\right)_i=\left(\frac{v_\alpha}{2}-\frac{\mu}{h_\alpha}\right)y_{x_\alpha,i}\,,$$
$$i=1,\ldots,N-1\,;$$

$$y^{n+1}=\frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\xi^\alpha\,;\quad(5)$$

$$y_i^0=u^0=u^0\left(x_1,x_2,x_3\right),\ i=0,\ldots,N\,,\quad(6)$$

$$y_0^{n+1}=0\ ,\ y_N^{n+1}=0\,,\ n=1,2,\ldots\quad(7)$$

Стійкість методу. В задачах чисельного прогнозу погоди (особливо довгострокового), а також у задачах моделювання загальної циркуляції атмосфери питання стійкості скінченно-різницевих схем має важливе значення. Проте дослідження стійкості схем для чисельного розв'язання рівнянь, що входять до метеорологічних моделей, мають значні складнощі через їх нелінійність. Тому часто аналіз стійкості проводять для рівнянь, які отримані лінеаризацією нелінійних рівнянь [Самарский, Гулин, 1973]. Дослідимо стійкість запропонованого методу для випадку сталих ν, μ, випадок змінних коефіцієнтів — тема для подальших досліджень.

Нехай праві частини f_α^n, $\alpha = 1,2,3$ мають вигляд

$$f_\alpha^n = \overset{o}{f}{}_\alpha^n + \overset{*}{f}{}_\alpha^n, \quad \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{o}{f}{}_\alpha^n = 0, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{8}$$

Теорема, що наведена нижче, встановлює стійкість схеми (4)—(7).

Теорема 1. *Для схеми (4)—(7) виконується апріорна оцінка*

$$\left\| y^{n+1} \right\|_{A_0} \le e^{\frac{\nu_M^2 (t_{n+1}+1)}{4\mu}} \left(\left\| y^0 \right\|_{A_0} + \sqrt{1+t_n} \left(\sum_{k=0}^{n} \tau \left(\left\| \overset{*}{f}{}_\alpha^k \right\|^2 + 9\tau^2 \left\| B_\alpha \overset{o}{f}{}_\alpha^k \right\|^2 \right) \right)^{1/2} \right), \tag{9}$$

де $\nu_M = \max\limits_{\alpha=1,2,3} \nu_\alpha$, $\|y\|_{A_0}^2 = (A_0 y, y) \ge \frac{2\mu}{\ell} \|y\|_C^2$, *тобто схема стійка за початковими даними та правою частиною в неперервній нормі* $\|\cdot\|_C$.

Доведення. Використаємо зображення

$$y^n = \upsilon^n + w^n, \quad \xi^\alpha = \upsilon^\alpha + w^\alpha, \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$w^{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} w^\alpha, \quad w^0 = 0. \tag{10}$$

Нехай w^n, w^α є розв'язками задачі

$$\frac{w^\alpha - w^n}{3\tau} = \overset{o}{f}{}_\alpha^n, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{11}$$

З урахуванням (8), (10), (11) отримуємо, що $w^{n+1} = w^n = w^0 = 0$.

Тоді $w^\alpha = w^n + 3\tau \overset{o}{f}{}_\alpha^n = 3\tau \overset{o}{f}{}_\alpha^n$.

З формул (4), (5) маємо задачу для υ^n, υ^α:

$$\frac{\upsilon^\alpha - \upsilon^n}{3\tau} + \left(B_\alpha \upsilon^\alpha + A_\alpha \upsilon^n \right) = \overset{*}{f}{}_\alpha^n - B_\alpha w^\alpha - A_\alpha w^n,$$

$$\alpha = 1,2,3, \tag{12}$$

$$\upsilon^{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \upsilon^\alpha. \tag{13}$$

Врахувавши формули (10), (11), перепишемо вираз (12) так:

$$\frac{\upsilon^\alpha - \upsilon^n}{3\tau} + \left(B_\alpha \upsilon^\alpha + A_\alpha \upsilon^n \right) = \overset{*}{f}{}_\alpha^n - 3B_\alpha \tau \overset{o}{f}{}_\alpha^n \equiv \chi_\alpha^n. \tag{14}$$

У статті [Гук, 2008] показано, що для кожного ν^α, $\alpha = 1,2,3$ із задачі (12) виконується оцінка

$$\left\| \upsilon^\alpha \right\|_{A_0} \le e^{\left(\frac{\nu_\alpha^2 (t_{n+1}+1)}{4\mu} \right)} \left(\left\| \upsilon^0 \right\|_{A_0} + \sqrt{\frac{1+t_n}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \tau \left\| \chi_\alpha^k \right\|^2 \right)^{1/2} \right) \le$$

$$\le e^{\left(\frac{\nu_\alpha^2 (t_{n+1}+1)}{4\mu} \right)} \times$$

$$\times \left(\left\| \upsilon^0 \right\|_{A_0} + \sqrt{\frac{1+t_n}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \tau \left(\left\| \overset{*}{f}{}_\alpha^k \right\|^2 + 3\tau \left\| B_\alpha \overset{o}{f}{}_\alpha^k \right\|^2 \right) \right)^{1/2} \right),$$

де

$$\|y\|_{A_0} = (A_0 y, y) \ge \frac{2\mu}{\ell} \|y\|_C^2.$$

Перейшовши до суми по α, отримуємо

$$\left\| \upsilon^{n+1} \right\|_{A_0} \le \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \left\| \upsilon^\alpha \right\|_{A_0} \le \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} e^{\left(\frac{\nu_\alpha^2 (t_{n+1}+1)}{4\mu} \right)} \times$$

$$\times \left(\left\| \upsilon^0 \right\|_{A_0} + \sqrt{\frac{1+t_n}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \tau \left(\left\| \overset{*}{f}{}_\alpha^k \right\|^2 + 3\tau \left\| B_\alpha \overset{o}{f}{}_\alpha^k \right\|^2 \right) \right)^{1/2} \right).$$

Остання оцінка доводить теорему.

Збіжність методу. Розв'язок різницевої схеми має наближатися до точного розв'язку диференціальної задачі, причому різниця між ними має зменшуватися зі зменшенням сіткових кроків. Таку властивість різницевої схеми називають збіжністю.

Покажемо збіжність розв'язку різницевої схеми (4)—(7) до розв'язку диференційної задачі (1)—(3).

Нехай

$$z^n = y^n - u^n, \quad z^\alpha = \xi^\alpha - u^{n+1},$$

$$z^{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} z^\alpha = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\xi^\alpha - u^{n+1} \right) = y^{n+1} - u^{n+1}.$$

Підставивши $y^\alpha = z^\alpha + u^{n+1}$, $y^n = z^n + u^n$ у формули (4)—(7), отримаємо таку задачу:

$$\frac{z^\alpha - z^n}{3\tau} + \left(B_\alpha z^\alpha + A_\alpha z^n \right) =$$

$$= f_\alpha^n - \frac{u^{n+1} - u^n}{3\tau} + \left(B_\alpha u^{n+1} + A_\alpha u^n \right) = \psi_\alpha^n, \quad \alpha = 1,2,3;$$

$$z^{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^{3} z^\alpha,$$

$$z_0^{n+1} = 0, \quad z_N^{n+1} = 0,$$

$$z_i^0 = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тут ψ_n^{α} — похибка апроксимації кожного α-го рівняння (4). Із статті [Прусов и др., 2008] відомо, що похибка апроксимації схеми явного рахування $\psi = O\left(\tau + h^2 + \dfrac{\tau}{h}\right)$.

Зауважимо, що для тривимірного рівняння $\left\|\psi_{\alpha}^n\right\| = O(1)$.

Запишемо у спеціальному вигляді

$$\psi_{\alpha}^n = \overset{o}{\psi}{}_{\alpha}^n + \overset{*}{\psi}{}_{\alpha}^n, \quad \sum_{\alpha=1}^{3} \overset{o}{\psi}{}_{\alpha}^n = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (15)$$

де

$$\overset{o}{\psi}{}_{\alpha}^n = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial t} + v_{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2} - \frac{f\left(t, x_1, x_2, x_3\right)}{3},$$

$$\overset{*}{\psi}{}_{\alpha}^n = O\left(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h}\right).$$

Тоді, скориставшись попередньою теоремою, отримаємо оцінку

$$\left\|z^{n+1}\right\|_{A_0} \le e^{\frac{v_M^2\left(t_{n+1}+1\right)}{4\mu}}\left(\left\|z^0\right\|_{A_0} + \sqrt{1+t_n}\, \times \right.$$

$$\left. \times\left(\sum_{k=0}^{n}\tau\left(\left\|\overset{*}{\psi}{}_{\alpha}^k\right\|^2 + 9\tau^2\left\|B_{\alpha}\,\overset{o}{\psi}{}_{\alpha}^k\right\|^2\right)\right)^{1/2}\right). \qquad (16)$$

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 4. *Для похибки z виконується оцінка*

$$\left\|z^{n+1}\right\|_{A_0} = O\left(\tau + h_M^2 + \frac{\tau}{h_m}\right), \qquad (17)$$

де

$$h_M = \max_{\alpha=1,2,3} h_{\alpha}, \quad h_m = \min_{\alpha=1,2,3} h_{\alpha}.$$

Доведення. Підставивши у формулу (16) рівності

$$z^0 = 0, \quad \left\|\overset{*}{\psi}{}_{\alpha}^k\right\| = O\left(\tau + h_{\alpha}^2 + \frac{\tau}{h_{\alpha}}\right), \quad 3\tau\left\|B_{\alpha}\,\overset{o}{\psi}{}_{\alpha}^k\right\| = O\left(\tau\right),$$

дістанемо

$$\left\|z^{n+1}\right\|_{A_0} \le \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3} O\left(\tau + h_{\alpha}^2 + \frac{\tau}{h_{\alpha}}\right) =$$

$$= \max_{\alpha=1,2,3} O\left(\tau + h_{\alpha}^2 + \frac{\tau}{h_{\alpha}}\right) = O\left(\tau + h_M^2 + \frac{\tau}{h_m}\right),$$

де

$$h_M = \max_{\alpha=1,2,3} h_{\alpha}, \quad h_m = \min_{\alpha=1,2,3} h_{\alpha}.$$

Теорему доведено.

Таким чином, існує умовна збіжність розв'язку різницевої схеми (4)—(7) до розв'язку задачі (1)—(3). Умова збіжності має вигляд

$$\frac{\tau}{h_m} \to 0 \text{ при } \tau \to 0, \; h_M \to 0.$$

Висновки. За результатами дослідження стійкості та збіжності запропонованої скінченно-різницевої схеми можна зробити такі висновки:

- схема є безумовно стійкою;
- існує збіжність чисельного розв'язку до розв'язку задачі конвективної дифузії (1)—(3) зі швидкістю $O\left(\tau + h^2 + \dfrac{\tau}{h}\right)$ у нормі $\|\cdot\|_C$ за умов $\dfrac{\tau}{h} \to 0, \; \tau \to 0, \; h \to 0.$

Із побудови запропонованої схеми зрозуміло, що кількість операцій, необхідних для переходу на наступний часовий шар, є лінійно пропорційною розміру масивів вхідних даних. Застосування цього методу не потребує ні розв'язання матричних систем, ні застосування ітерацій.

Схема має достатню точність. Із умови збіжності випливає обмеження на часовий крок $\tau \le h^{1+\varepsilon}$, де ε — будь-яке додатне мале число. Це обмеження не є обтяжливим для задач динамічної метеорології, тому що надмірне збільшення часового кроку призводить до збільшення похибки розв'язку. При цьому запропонований підхід є економічним з погляду витрат машинного часу на реалізацію метеорологічних моделей, що ґрунтуються на тривимірних рівняннях гідродинаміки.

У статті [Кацалова, 2013] наведено результати реалізації спрощеної моделі циркуляції атмосфери методом адитивно-усередненого розщеплення на підставі методу явного рахування.

Результати експерименту і теоретичного дослідження підтверджують доцільність використання методу для розв'язання тривимірних рівнянь конвективної дифузії під час реалізації метеорологічних моделей.

Список літератури

Белов П. Н., Борисенков Е. П., Панин Б. Д. Численные методы прогноза погоды. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.

Гилл А. Динамика атмосферы и океана. Москва: Мир, 1986. 416 с.

Гордезиани Д. Г., Меладзе Г. В. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1974. № 1. С. 246—250.

Гук Л. М. Метод явного рахунку для реалізації моделі циркуляції атмосфери. *Вісник Київ. нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2011. № 4. С. 102—106.

Гук Л. М. Стійкість та збіжність економічного методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії. *Вісник Київ. нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2008. № 4. С. 115—118.

Кацалова Л. М. Один метод реалізації спрощеної моделі циркуляції атмосфери. *Вісник Київ. нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки*. 2013. № 1. С. 178—171.

Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Москва: Гостехиздат, 1957. 375 с.

Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1967. 353 с.

Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1965. 876 с.

Прусов В. А., Дорошенко А. Ю. Моделювання природних і техногенних процесів в атмосфері. Київ: Наук. думка, 2006. 542 с.

Прусов В. А., Дорошенко А. Е., Черныш Р. И., Гук Л. Н. Теоретическое исследование одного численного метода решения задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 2. С. 161—170.

Прусов В. А., Дорошенко А. Е., Черныш Р. И., Гук Л. Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ.* 2007. № 3. С. 64—74.

Прусов В. А., Сніжко С. І. Математичне моделювання атмосферних процесів: Підручник. Київ: Ніка-Центр, 2005. 496 с.

Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.

Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. Москва: Наука, 1973. 416 с.

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов. Москва: Наука, 1989. 432 с.

Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972. 736 с.

Prusov V., Doroshenko A., Faragó I., Havasi Á., 2006. On the numerical solution of the three-dimensional advection-diffusion equation. *Problems in programming* (2-3), 641—647.

Roache P. J., 1985. Computational Fluid Dynamics. Albuquerque: Hermosa Publishers, 616 p.

The study of convergence of additive-averaged splitting based on the scheme of explicit solution for three-dimensional equations of convective diffusion

© L. N. Katsalova, 2015

Modern mathematical forecast models are based on hydrodynamic equations, which are three-dimensional convection diffusion equations in the general form. In the article, the new approach to solving such equations, which consists in using the additive-averaged splitting on the basis of the explicit account scheme, is described. The results of stability and convergence of the method are presented. Appropriate math studies and evaluations given. Based on the results, conclusions regarding the effectiveness of the method for solving hydrodynamic equations are made.

Key words: convection diffusion equation, additive-averaged splitting, explicit account method, stability, convergence.

References

Belov P. N., Borisenkov E. P., Panin B. D., 1989. Numerical methods of weather forecasting. Leningrad: Gidrometeoizdat, 376 p. (in Russian).

Gill A., 1986. The dynamics of the atmosphere and ocean. Moscow: Mir, 416 p. (in Russian).

Gordeziani D. G., Meladze G. V., 1974. Simulation of the third boundary value problem for multidimensional parabolic equations in an arbitrary domain by one-dimensional equations. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* (1), 246—250 (in Russian).

Guk L. M., 2011. Explicit account method for realization of atmospheric circulation model. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universiteta im. Tarasa Shevchenka. Ser. fiz.-mat. nauky* (4), 102—106 (in Ukrainian).

Guk L. M., 2008. Stability and convergence of economic method for solving the one-dimensional convective diffusion problem. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universiteta im. Tarasa Shevchenka. Ser. fiz.-mat. nauky* (4), 115—118 (in Ukrainian).

Katsalova L. M., 2013. One method of implementation of simplified atmospheric circulation model. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universiteta im. Tarasa Shevchenka. Ser. fiz.-mat. nauky* (1), 178—171 (in Ukrainian).

Kibel I. A., 1957. Introduction to hydrodynamic methods of short-term weather forecasting. Moscow: Gostekhizdat, 375 p. (in Russian).

Marchuk G. I., 1967. Numerical methods in weather forecasting. Leningrad: Gidrometeoizdat, 353 p. (in Russian).

Matveev L. T., 1965. General meteorology basics. The physics of the atmosphere. Leningrad: Gidrometeoizdat, 876 p. (in Russian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Yu., 2006. Modelling of natural and anthropogenic processes in the atmosphere. Kyiv: Naukova Dumka, 542 p. (in Ukrainian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Ye., Chernysh R. I., Guk L. M., 2008. Theoretical study of a numerical method solving convective diffusion problem. *Kibernetika i sistemnyy analiz* (2), 161—170 (in Russian).

Prusov V. A., Doroshenko A. Ye., Chernysh R. I., Guk L M., 2007. Efficient difference scheme numerical solution of the convective diffusion problem. *Kibernetika i sistemnyy analiz* (3), 64—74 (in Russian).

Prusov V. A. Snizhko S. I., 2005. Mathematical modeling of atmospheric processes: Textbook. Kyiv: Nika-Tsentr, 496 p. (in Ukrainian).

Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N., 1999. Numerical methods for solving convection-diffusion problems. Moscow: Editorial URSS, 248 p. (in Russian).

Samarskiy A. A., Gulin A. V., 1973. Stability of difference schemes. Moscow: Nauka, 416 p. (in Russian).

Samarskiy A. A., Gulin A. V., 1989. Numerical methods: a manual for schools. Moscow: Nauka, 432 p. (in Russian)]

Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P., 2001. Mathematical modeling: Ideas. Methods. Examples. Moscow: Fizmatlit, 320 p. (in Russian).

Tikhonov A. N., Samarskiy A. A., 1972. The equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 736 p. (in Russian).

Prusov V., Doroshenko A., Faragó I., Havasi Á., 2006. On the numerical solution of the three-dimensional advection-diffusion equation. *Problems in programming* (2-3), 641—647.

Roache P. J., 1985. Computational Fluid Dynamics. Albuquerque: Hermosa Publishers, 616 p.