

## Обратная задача гравитационного поля планет как физическая проблема

© Ю. А. Тараканов<sup>1</sup>, О. В. Карагиоз<sup>2</sup>, 2012

<sup>1</sup>Институт физики Земли РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Национальный институт авиационных технологий,  
Москва, Россия

Поступила 27 мая 2011 г.

*Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко*

Ключевой відмінністю нового фізичного методу інтерпретації є визначення послідовності дискретних характеристик густинних структур — моментів мас відносно осей локальної прямокутної системи координат. Інформацію про структури дістають окремими порціями, для чого дані щодо геометрії гравітаційного поля нагромаджують також деякими порціями. Спочатку розв'язанням оберненої задачі визначають середню згладжену геометричну фігуру джерела — нормальну густинну неоднорідність. Як двовимірну нормальну неоднорідність вибрано сферичну шапку, як тривимірну — різницевий кульовий сектор і різницю секторів. На визначення тривимірної неоднорідності потрібне знання шести моментів і шести елементів поля уздовж дути великого круга. Виявлено залежність розв'язання оберненої задачі потенціалу від кількості гармонік у рядах Лежандра  $K + 1$ . Вища міра гармонік  $K$  у цих рядах дорівнювала 180, 16, 8, 4, 2. Для найважчого варіанта інтерпретації поля — сферичних секторів внутрішнього ядра Землі — кутові радіуси дорівнювали  $1^\circ, 5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ . Унаслідок згладжування аномалій через велику віддаленість структур від поверхні Землі поле секторів однаково при  $K$ , що дорівнюють 180, 16, 8, і під час розв'язання оберненої задачі потенціалу для секторів з лінійним радіусом 1215 км достатньо виміряти дев'ять гармонік. Помилки визначення моментів за шести гармоніками у 100 разів менші, ніж за трьома елементами поля. Раніше було виявлено, що для структур мантії помилки визначення моментів за шести елементами у 10 разів менші. Тому для визначення геометричної форми і розмірів секторів внутрішнього ядра не треба намагатися виміряти велику кількість гармонік поля Землі.

A key feature of the new physical method of interpretation of the Earth's gravity field is determination of the sequence of discrete characteristics of density structures — the mass moments with respect to local rectangular coordinate system. Information about these structures is extracted by separate portions for which purpose the data on the geometry of the gravitational field is also delivered by certain portions. At first, by solving the inverse problem one determines the mean smoothed geometric figure of the source, the normal density heterogeneity. As a two-dimensional normal heterogeneity, we choose a spherical cap, and as a three-dimensional one — a difference spherical sector and a difference of two spherical sectors. To specify a three-dimensional heterogeneity, one needs knowledge of six moments and six field elements along a great-circle arc. In the present paper we reveal the dependence of the solution to inverse problem of the potential on the number of harmonics  $K + 1$  in Legendre series. The moments are calculated by solving the inverse problem of the potential. In the present paper we reveal the dependence of the solution to inverse problem of the potential on the number of harmonics  $K + 1$  in Legendre series. The highest power  $K$  in these series was equal to 180, 16, 8, 4, 2. For the most difficult variant of field interpretation — spherical sectors of the Earth's inner core, the angular radii were equal to  $1^\circ, 5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ . Due to anomalies smoothing because of remoteness of the structures from the Earth's surface, the field of sectors is the same for  $K$  equal to 180, 16, 8. Therefore, to solve the inverse problem of the potential for sectors with linear radius equal to 1215 km, it is sufficient to measure only nine harmonics. The errors in computing the moments from six field elements are smaller by a factor of 100 than those found from three field elements. It was previously shown that the errors of the determining the moments of mantle structures by six elements are smaller by a factor of 10. To determine the geometric shape and size of the inner core sectors it is not necessary to launch a race after measurements of a large number of spherical harmonics in models of the Earth's gravity field.

**Введение.** В настоящей статье исследуется метод *интерпретации совокупности элементов гравитационного поля в одном пункте* на примере однородных тел правильной геометрической формы внутри сферической Земли. Эти тела представляют собой "*нормальную плотностную неоднородность*". В теории потенциала показано, что по гравитационному потенциалу и всем его производным, заданным вне объема тела произвольной формы, невозможно определить распределение плотности внутри этого тела в виде трехмерной непрерывной функции [Антонов и др., 1988]. Такой подход к интерпретации поля будем условно называть *математическим методом*. Поэтому исследуем возможности *физического метода*, когда ищется не плотность в виде непрерывной функции трех координат, а конечное число моментов масс. Моменты масс образуют альтернативную систему *дискретных характеристик* плотностных структур.

**Отличия физического метода интерпретации нескольких элементов гравитационного поля в одном пункте от математического метода.** *Первой физической основой метода является разделение источников поля на два класса — сосредоточенные и распределенные по всей планете.* Поле сосредоточенных источников представлено конечным числом изолированных аномалий. Источник изолированной аномалии на первом этапе интерпретации считается одним телом с плотностью одного знака. Такой источник удовлетворяет условиям *теоремы Новикова* [Антонов и др., 1988]. Поле распределенных источников можно увидеть на карте лишь после вычитания из полного поля Земли суммы полей сосредоточенных плотностных структур.

*Вторая физическая основа метода* состоит в определении информации о *распределении масс, порождающих изолированную аномалию*, в виде конечного числа *дискретных характеристик тела — моментов масс*, которые будем называть просто *моментами*. Изолированные аномалии определяются четко очерченными замкнутыми изолиниями потенциала  $T$  и его вертикальных производных по направленному наружу радиусу сферы  $R$ :  $T_R = -\partial T / \partial R$ ,  $T_{RR} = \partial^2 T / \partial R^2$  и т. д.

*Третья физическая основа метода* состоит в решении обратной задачи потенциала для каждой изолированной аномалии порознь. Для этого используется своя локальная прямоугольная система координат  $Mxuz$ , начало  $M$  которой находится вблизи центра масс  $Q$  источника поля или с ним совпадает. Относительно осей  $x, y, z$  определяются моменты масс путем разложения потенциала и конечного числа его производных в ряд по гармоническим членам в системе координат  $Mxuz$ . Постоянными этих рядов являются искомые моменты.

*Четвертая физическая основа метода* интерпретации изолированной аномалии состоит в использовании сочетания *скалярной* характеристики поля — потенциала, *векторной* характеристики поля — силы притяжения и *тензора* вторых производных потенциала. Сочетание таких элементов поля позволяет собрать достаточную информацию о *геометрии поля* плотностной структуры.

*Пятая физическая основа метода* базируется на введении нового понятия о "*нормальной плотностной неоднородности*" по аналогии с понятием нормального земного эллипсоида. "*Нормальной плотностной неоднородностью*" будем называть однородные тела правильной геометрической формы. Для последовательного приближения к реальной плотностной структуре необходимо определить сначала "*аномалию неоднородности по форме*", а затем "*аномалию неоднородности по плотности*". Аномалия по форме имеет ту же плотность, что и однородное тело, но искажает его правильную геометрическую форму совокупностью прилегающих шаровых трапеций. Аномалия по плотности образуется совокупностью шаровых трапеций, наложенных на однородную часть тела. Аномалии по плотности и по форме определяют *асимметрию источника поля*.

*Шестая физическая основа метода* состоит в решении *новой задачи теории потенциала*, которую в дальнейшем будем называть *обратной задачей моментов*. Решение этой новой задачи определяет *геометрическую форму и размеры* источника поля.

После определения массы, геометрической формы и размеров плотностной структуры вычисляется его плотность. В этом заключается принципиальное отличие *физического метода* интерпретации от *математического*, когда сразу ищется трехмерное распределение плотности источника аномалии без всякого учета физических основ интерпретации гравитационных

аномалий. Это *седьмое отличие физического метода* можно также отнести к основам интерпретации нескольких элементов поля в одном пункте.

Используемые в статье элементы гравитационного поля измеряются не все. Некоторые из них вычисляются по измеренным элементам поля. Количество информации об источниках поля не увеличивается, но информация о поле используется полнее. Алгоритмы решения обратной задачи становятся существенно проще, ибо в них как бы скрыты сложные процедуры пересчета элементов поля.

Интерпретацию полей распределенных плотностных структур можно выполнить с помощью постоянных Лежандра, из которых исключен вклад источников сосредоточенных плотностных неоднородностей. В настоящей статье интерпретация разностного поля не рассматривается.

**Метод интерпретации изолированной гравитационной аномалии.** На рис. 1 показана локальная прямоугольная система координат  $xuz$ , начало которой  $M$  в общем случае может не совпадать с центром масс  $Q$  источника поля. Вертикальная ось  $z$  пересекает поверхность сферы в точке  $E$ , координатами которой являются широта  $\varphi_E$ , долгота  $\lambda_E$  и расстояние  $\rho_E$  от центра масс Земли со средним радиусом  $R$ . Через точку  $E$  проведена дуга большого круга  $S$  под азимутом  $\alpha_E$  к меридиану  $EN$ . В точке  $P(\varphi, \lambda, R)$  на дуге большого круга радиусом  $R$  измеряется или вычисляется гравитационное поле в виде совокупности значений потенциала  $T$ , вертикальной и горизонтальной составляющих силы притяжения  $T_R$  и  $T_S$  соответственно, вторых производных потенциала  $T_{RR}, T_{SR}, T_{SS}$ . В пунктах  $P$  решается обратная задача потенциала по совокупности перечисленных шести элементов поля. Азимут  $\alpha_P$  дуги  $S$  в точках  $P$  разный, дуги большого круга  $NE$  и  $NP$  — меридианы, пункт  $P$  находится на угловом расстоянии  $\Delta$  от экстремумов потенциала и его вертикальных производных, когда точки  $M$  и  $Q$  совпадают.

Систему нелинейных алгебраических уравнений для решения обратной задачи в одном пункте образуют разложения потенциала  $T(x, y, z)$  и его производных по гармоническим многочленам. В настоящей статье исследуется решение обратной задачи потенциала для однородных тел правильной геометрической формы с вертикальной осью симметрии, представляющих "*нормальную плотностную неоднородность*". Все производные потенциала по оси  $u$  таких структур равны нулю и поэтому сама ось на рис. 1 не показана. Разложение потенциала модельного тела по ортогональным многочленам Дубошина [Дубошин, 1961; 1968] в работе [Tarakanov et al., 2007] преобразовано в двойной ряд по аналогии с рядом Лежандра:

$$T(x, y, z) = \frac{Gm}{r} + \frac{Gm}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} \sum_{q=1}^{2k+1} \Psi_{kq} b_{kq}(x, y, z), \quad (1)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная;  $m$  — масса тела, центр которой находится на глубине  $h_Q$ ;  $\Psi_{kq}$  — *постоянные Дубошина (моменты)* степени (degree)  $k$  ( $q$  — номер постоянной в гармонике  $k$ ), аналогичные *постоянным Лежандра*;  $b_{kq}(x, y, z)$  — *многочлены Дубошина*, аналогичные *присоединенным сферическим функциям Лежандра*;  $R$  — средний радиус планеты;  $r$  — расстояние точки  $P(x, y, z)$  от начала  $M$  локальной системы координат. В ряд (1) входят лишь линейно независимые постоянные Дубошина, число которых в гармонике степени  $k$  равно  $2k + 1$ . *Гармоника нулевой степени* в уравнении (1) по физическому смыслу является потенциалом массы источника поля с неизвестной геометрией, помещенной в начало локальных осей. *Гармоника первой степени* порождается смещениями  $x_Q, y_Q, z_Q$  центра масс источника поля относительно начала осей  $Mxyz$ .

Обозначим через  $\Delta T(x, y, z)$  сумму нулевой и первой гармоник:

$$\Delta T(x, y, z) = \frac{Gm}{r} + \frac{Gm}{r} \frac{xx_Q + yy_Q + zz_Q}{r^2}.$$

Если начало  $M$  локальных осей поместить в центр масс  $Q$  плотностной структуры, то  $x_Q = y_Q = z_Q = 0$  и первая гармоника выпадет из ряда (1), а экстремумы "*куполообразных*"

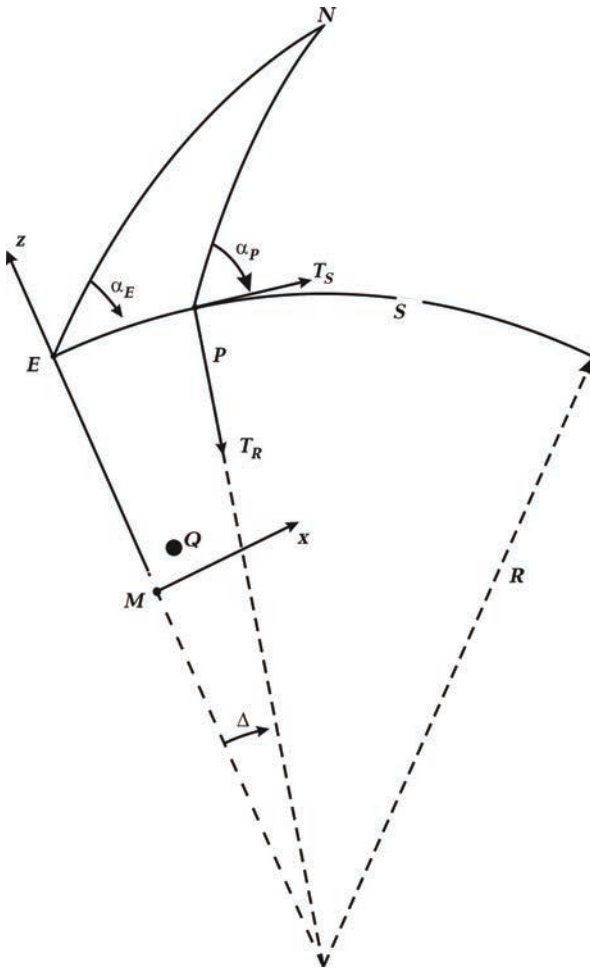


Рис. 1. Локальная система координат  $Mxyz$ .

аномалий"  $T, T_R, T_{RR}$  расположатся на оси  $Qz$ . В этом случае сумма первых двух членов ряда представляет потенциал тела с любой геометрией, когда вся масса тела сосредоточена в ее центре  $Q$ . Гармоника нулевой степени в ряде (1) и в  $\Delta T(x, y, z)$  определяет главную часть поля, когда географическое положение плотностной структуры известно по экстремумам "кулообразных аномалий"  $T, T_R, T_{RR}$ .

Рассмотрим первое приближение интерпретации изолированной аномалии, когда потенциал и его производные порождаются "нормальной плотностной неоднородностью" с вертикальной осью симметрии и круглым горизонтальным сечением.

Разложение потенциала нормальной неоднородности с удержанием в ряде (1) всех гармоник до четвертой степени содержит только шесть ненулевых моментов:  $m, h_Q, \Psi_{21}, \Psi_{35}, \Psi_{41}, \Psi_{42}$  [Tarakanov et al., 2007]. Глубина  $h_Q$  является постоянной ряда Лежандра и входит в гармонику первой степени, описывающую смещение центра масс плотностной неоднородности относительно центра масс Земли. Масса  $m$  источника поля является одновременно постоянной Лежандра и постоянной Дубошина. Безразмерные моменты  $\Psi_{21}, \Psi_{35}, \Psi_{41}, \Psi_{42}$  нормальной плотностной неоднородности не зависят ни от массы, ни от плотности тела и определяют его геометрическую форму и размеры. В дальнейшем эти моменты будем называть "коэффициентами формы" источника поля. Разложение потенциала

и его первых и вторых производных в локальной системе координат образует систему исходных нелинейных алгебраических уравнений относительно пяти постоянных Дубошина —  $m, \Psi_{21}, \Psi_{35}, \Psi_{41}, \Psi_{42}$ :

$$T = \frac{Gm}{R} \beta^{-1} (1 + a_1 \Psi_{21} + a_2 \Psi_{35} + a_3 \Psi_{41} + a_4 \Psi_{42}),$$

$$T_x = -\frac{Gm}{R^2} \beta^{-3} \sin \Delta (1 + b_1 \Psi_{21} + b_2 \Psi_{35} + b_3 \Psi_{41} + b_4 \Psi_{42}),$$

$$T_z = -\frac{Gm}{R^2} \alpha \beta^{-3} (1 + c_1 \Psi_{21} + c_2 \Psi_{35} + c_3 \Psi_{41} + c_4 \Psi_{42}),$$

$$T_{xx} = -\frac{Gm}{R^3} \beta^{-3} (1 + d_0 + d_1 \Psi_{21} + d_2 \Psi_{35} + d_3 \Psi_{41} + d_4 \Psi_{42}),$$

$$T_{zz} = -\frac{Gm}{R^3} \beta^{-3} (1 + k_0 + k_1 \Psi_{21} + k_2 \Psi_{35} + k_3 \Psi_{41} + k_4 \Psi_{42}),$$

$$T_{xz} = 3 \frac{Gm}{R^3} \alpha \beta^{-5} \sin \Delta (1 + n_1 \Psi_{21} + n_2 \Psi_{35} + n_3 \Psi_{41} + n_4 \Psi_{42}). \quad (2)$$

В рядах (2)  $a_i, b_i, \dots, n_i$  ( $i=0, 1, 3, 4$ ) — многочлены Дубошина, в которых координаты  $x, z$  и  $r$  для более компактной записи заменены безразмерными координатами

$$\frac{x}{R} = \sin \Delta, \quad \frac{z}{R} = \frac{h_Q}{R} - 1 + \cos \Delta = \alpha, \quad \frac{r^2}{R^2} = 1 + \left(1 - \frac{h_Q}{R}\right)^2 - 2 \left(1 - \frac{h_Q}{R}\right) \cos \Delta = \beta^2. \quad (3)$$

Для исключения в рядах (2) нелинейности в виде произведений массы  $m$  и коэффициентов  $\Psi_{21}, \Psi_{35}, \Psi_{41}, \Psi_{42}$  образованы отношения рядов (2):

$$\frac{T_{xz}}{T_z}, \quad \frac{T_{xx}}{T_z}, \quad \frac{T_{zz}}{T_z}, \quad \frac{T_x}{T}, \quad (4)$$

представляющие собой линейную алгебраическую систему четырех уравнений для четырех "коэффициентов формы", которая решена аналитически методом Гаусса. После последовательного исключения неизвестных "коэффициентов формы" получено трансцендентное уравнение для постоянной Лежандра первой степени — глубины  $h_Q$  центра масс "нормальной плотностной неоднородности". Это уравнение будем называть *уравнением глубин*:

$$F(h_Q) = 0, \quad (5)$$

где функция глубины  $F(h_Q)$  имеет простую структуру [Tarakanov et al., 2007]:

$$F(h_Q) = \frac{\beta^2 R T_z}{\alpha T} + \frac{A}{B}. \quad (6)$$

Здесь

$$A = 1 + c_1 \Psi_{21} + c_2 \Psi_{35} + c_3 \Psi_{41} + c_4 \Psi_{42}, \quad B = 1 + a_1 \Psi_{21} + a_2 \Psi_{35} + a_3 \Psi_{41} + a_4 \Psi_{42},$$

$$\Psi_{21} = E_1 / E_2, \quad \Psi_{35} = D_0 + D_{21} \Psi_{21}, \quad \Psi_{41} = B_0 + B_{21} \Psi_{21} + B_{35} \Psi_{35},$$

$$\Psi_{42} = A_0 + A_{21} \Psi_{21} + A_{35} \Psi_{35} + A_{41} \Psi_{41},$$

$$E_1 = E_6 + E_5 D_0 + E_3 (B_0 + B_{35} D_0) + E_4 (A_0 + A_{41} B_0 + A_{35} D_0 + A_{41} B_{35} D_0),$$

$$E_2 = 1 - E_5 D_{21} - E_3 (B_{21} + B_{35} D_{21}) - E_4 (A_{21} + A_{41} B_{21} + A_{35} D_{21} + A_{41} B_{35} D_{21}),$$

$$E_3 = \frac{a_3 c_{21} - b_3}{b_1 - a_1 c_{21}}, \quad E_4 = \frac{a_4 c_{21} - b_4}{b_1 - a_1 c_{21}}, \quad E_5 = \frac{a_2 c_{21} - b_2}{b_1 - a_1 c_{21}}, \quad E_6 = \frac{c_{21} - 1}{b_1 - a_1 c_{21}},$$

$$D_0 = D_1 / D_3, \quad D_{21} = D_2 / D_3, \quad D_1 = D_4 + B_0 D_5 + (A_0 + A_{41} B_0) D_6,$$

$$D_2 = D_7 + B_{21} D_5 + (A_{21} + A_{41} B_{21}) D_6, \quad D_3 = 1 - B_{35} D_5 - (A_{35} + A_{41} B_{35}) D_6,$$

$$D_4 = \frac{c_{35} - k_0 - 1}{k_2 - c_2 c_{35}}, \quad D_5 = \frac{c_3 c_{35} - k_3}{k_2 - c_2 c_{35}}, \quad D_6 = \frac{c_4 c_{35} - k_4}{k_2 - c_2 c_{35}}, \quad D_7 = \frac{c_1 c_{35} - k_1}{k_2 - c_2 c_{35}},$$

$$B_0 = B_1 / A_1, \quad B_{21} = B_2 / A_1, \quad B_{35} = B_3 / A_1,$$

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{c_{42} - 1}{n_4 - c_4 c_{42}}, & A_{21} &= \frac{c_1 c_{42} - n_1}{n_4 - c_4 c_{42}}, & A_{35} &= \frac{c_2 c_{42} - n_2}{n_4 - c_4 c_{42}}, & A_{41} &= \frac{c_3 c_{42} - n_3}{n_4 - c_4 c_{42}}, \\
 A_1 &= \frac{c_3 c_{42} - n_3}{n_4 - c_4 c_{42}} - \frac{c_3 c_{41} - d_3}{d_4 - c_4 c_{41}}, & B_1 &= \frac{c_{41} - d_0 - 1}{d_4 - c_4 c_{41}} - \frac{c_{42} - 1}{n_4 - c_4 c_{42}}, \\
 B_2 &= \frac{c_1 c_{41} - d_1}{d_4 - c_4 c_{41}} - \frac{c_1 c_{42} - n_1}{n_4 - c_4 c_{42}}, & B_3 &= \frac{c_2 c_{41} - d_2}{d_4 - c_4 c_{41}} - \frac{c_2 c_{42} - n_2}{n_4 - c_4 c_{42}}, \\
 c_{21} &= -\frac{\beta^2 R T_x}{T \sin \Delta}, & c_{35} &= \frac{\alpha R T_{zz}}{T_z}, & c_{41} &= \frac{\alpha R T_{xx}}{T_z}, & c_{42} &= -\frac{\beta^2 R T_{xz}}{3 T_z \sin \Delta}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

После вычисления моментов от первой до четвертой степени  $h_Q$ ,  $\Psi_{21}$ ,  $\Psi_{35}$ ,  $\Psi_{41}$ ,  $\Psi_{42}$  вычисляется момент нулевой степени — масса  $m$ . Массу источника в единицах массы  $M$  Земли удобнее определять по “куполообразным аномалиям”, которые не обращаются в нуль. Это — потенциал  $T$  или высота геоида  $\zeta = T/\gamma$ ,  $\gamma = GM/R^2$ . Можно использовать силу притяжения и вертикальный градиент вблизи экстремума:

$$\begin{aligned}
 \frac{m_1}{M} &= \frac{\beta \zeta / R}{1 + a_1 \Psi_{21} + a_2 \Psi_{35} + a_3 \Psi_{41} + a_4 \Psi_{42}}, & \frac{m_2}{M} &= \frac{-\beta^3 R^2 T_z / \alpha GM}{1 + c_1 \Psi_{21} + c_2 \Psi_{35} + c_3 \Psi_{41} + c_4 \Psi_{42}}, \\
 \frac{m_3}{M} &= \frac{-\beta^3 R^3 T_{zz} / GM}{1 + k_0 + k_1 \Psi_{21} + k_2 \Psi_{35} + k_3 \Psi_{41} + k_4 \Psi_{42}}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В принципе, массу можно определить и по “волнообразным аномалиям”  $T_x$ ,  $T_{xz}$ , и по производной  $T_{xx}$ , характеризующейся смешанной геометрической формой. В настоящей статье масса вычислялась по высоте геоида.

По итогам численной интерпретации полей модельных тел в земной мантии был сделан вывод, что *ошибка решения обратной задачи потенциала по шести элементам поля в десять раз меньше, чем по трем*. Здесь выполнено непосредственное сравнение точности решений по элементам  $T$ ,  $T_S$ ,  $T_R$ ,  $T_{SR}$ ,  $T_{RR}$ ,  $T_{SR}$  и  $T$ ,  $T_S$ ,  $T_R$ . Функция глубин при интерпретации потенциала и двух проекций силы притяжения намного проще, чем по формулам (6) и (7) [Tarakanov et al., 2003]:

$$F(h_Q) = \frac{\alpha \zeta \gamma}{\beta^2 R T_z} + \frac{A_1}{B_1}, \tag{9}$$

где

$$A_1 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Psi_{21}}{\beta^2} \left( 1 - 3 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right), \quad B_1 = 1 + \frac{9}{2} \frac{\Psi_{21}}{\beta^2} \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right). \tag{10}$$

В формулах (10)

$$\begin{aligned}
 \Psi_{21} &= \frac{2}{3} \beta^2 \frac{C_1}{D_1}, \\
 C_1 &= \alpha T_x - T_z \sin \Delta, & D_1 &= T_z \sin \Delta \left( 1 - 5 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) - 3 \alpha T_x \left( 1 - \frac{5}{3} \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right).
 \end{aligned} \tag{11}$$

После решения уравнения глубин определяется масса тела:

$$\frac{m}{M} = \frac{\beta \zeta}{R E_1}, \quad (12)$$

где

$$E_1 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Psi_{21}}{\beta^2} \left( 1 - 3 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right).$$

В работе [Tarakanov et al., 2003] кроме решений по алгоритмам (9)—(12) было получено решение по сочетанию элементов  $T_S$ ,  $T_R$ ,  $T_{RR}$ . Однако замена потенциала на вертикальный градиент силы притяжения привела к существенному увеличению ошибки решения обратной задачи. Поэтому в дальнейшем второе решение обратной задачи по трем элементам поля не использовалось. *Физический смысл* этого результата состоит в том, что с ростом порядка производной потенциала увеличивается чувствительность производных к источникам аномалий на меньших глубинах. Предшествующие исследования решения обратной задачи потенциала выполнены для модельных тел на больших глубинах мантии и даже во внутреннем ядре Земли [Tarakanov, Karagioz, 2007a; b]. Без использования потенциала глубину подошвы таких структур вычислить с приемлемой ошибкой невозможно.

**Численное решение обратной задачи гравитационного потенциала для модельных плотностных структур. 1. Модельные тела.** Представим себе телесный угол с круглым горизонтальным сечением (рис. 2). Обозначим угол между осью симметрии  $Oz$  телесного угла и его образующей линией через  $\theta$ . Вершину телесного угла совместим с центром сферы радиусом  $\rho_0$ . Тогда телесный угол вырежет на поверхности сферы *сферическую шапку* с *угловым радиусом*  $\theta$  и *линейным радиусом*  $\rho_0$ . Поместим построенную сферу внутри земной сферы радиусом  $R$  так, чтобы центры обеих сфер совпадали. В дальнейшем будем вычислять глубину  $h_0$  залегания шапки:  $h_0 = R - \rho_0$ .

Телесный угол, ограниченный сверху сферической шапкой, образует *шаровой сектор* (рис. 3). Если телесный угол ограничить сверху и снизу шапками с линейными радиусами  $\rho_r$  и  $\rho_f$ , то получим *разностный шаровой сектор* с кровлей (goof) и подошвой (foot) на глубинах  $h_r = R - \rho_r$  и  $h_f = R - \rho_f$  соответственно. Полный сектор будем описывать угловым и линейным радиусами  $\theta$ ,  $\rho_r$ . Сектором и разностным сектором с угловыми радиусами  $\theta = 0,001^\circ$  и  $\theta = 1^\circ$  будем моделировать соответственно *отрезок* и *стержень*.

*Изолированные аномалии модельных тел* определялись разложением их гравитационного потенциала  $T(\varphi, \lambda, \rho)$  по сферическим функциям с использованием безразмерных нормированных постоянных Лежандра:

$$T(\varphi, \lambda, \rho) = \frac{GM}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{R}{\rho} \right)^{k+1} \sum_{n=0}^k \left( C_{kn}^* \cos n\lambda + S_{kn}^* \sin n\lambda \right) P_{kn}^*(\sin \varphi), \quad (13)$$

где  $M$  — масса Земли, а постоянные Лежандра выражаются через отношения массы моделей и Земли  $m/M$ .

**1.1. Точечная масса.** Точечная масса является телом нулевой меры. Моменты точечной массы, сферической поверхности и шара с одинаковыми массой  $m$ , глубиной ее центра  $h_Q$ , широтой  $\varphi_Q$  и долготой  $\lambda_Q$  определяются одинаковыми формулами:

$$\begin{bmatrix} C_{kn}^* \\ S_{kn}^* \end{bmatrix} = \frac{m}{M} \frac{1}{2k+1} \left( 1 - \frac{h_Q}{R} \right)^k P_{kn}^*(\sin \varphi_Q) \begin{bmatrix} \cos n \lambda_Q \\ \sin n \lambda_Q \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $\cos n \lambda_Q$  и  $\sin n \lambda_Q$  используются соответственно при вычислениях  $C_{kn}^*$  и  $S_{kn}^*$ .

**1.2. Сферическая шапка.** Сферическая шапка с бесконечно малой толщиной и постоянной поверхностной плотностью (см. рис. 2) представляет *двумерное тело*. Постоянные Ле-

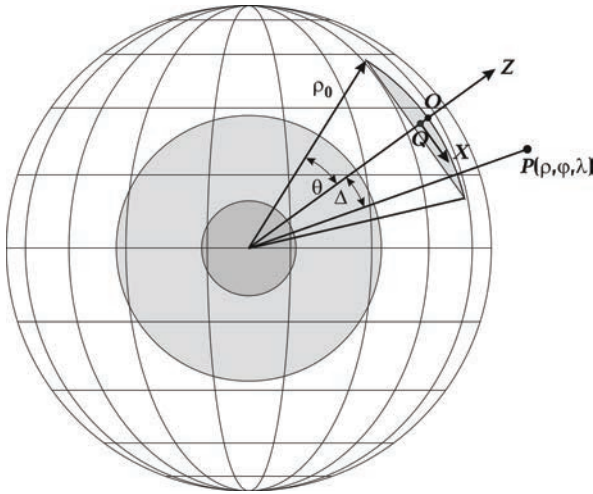


Рис. 2. Двумерная сферическая шапка. Геометрические параметры шапки — угловой радиус  $\theta$  и линейный радиус  $\rho_0$ .

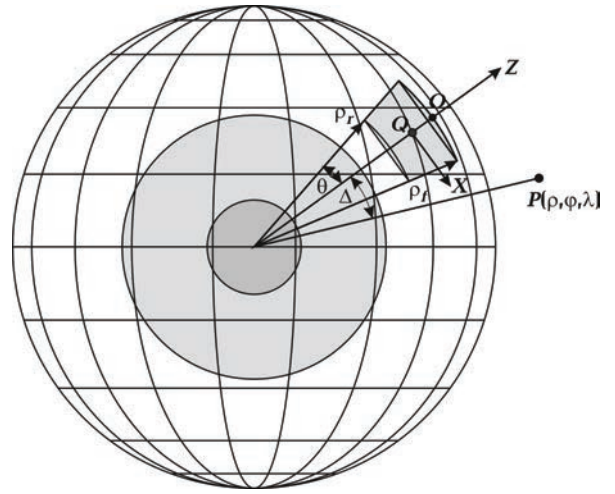


Рис. 3. Трехмерный разностный шаровой сектор. Геометрические параметры сектора — угловой радиус  $\theta$  и линейные радиусы кромки и подошвы  $\rho_r$  и  $\rho_f$ .

жандра нулевой гармоники ( $k = 0, n = 0$ ) определяются отдельными формулами:

$$C_{00}^* = \frac{m}{M}, \quad S_{00}^* = 0. \quad (15)$$

Моменты первой и последующих степеней определяются одинаковыми формулами ( $k \geq 1$ ):

$$\begin{bmatrix} C_{kn}^* \\ S_{kn}^* \end{bmatrix} = \frac{m}{M} \frac{\left(1 - \frac{h_O}{R}\right)^k}{(2k+1)^2} \frac{P_{k-1}(\cos \theta) - P_{k+1}(\cos \theta)}{1 - \cos \theta} P_{kn}^*(\sin \varphi_Q) \begin{bmatrix} \cos n \lambda_Q \\ \sin n \lambda_Q \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где  $P_0$  и  $P_1$  — полиномы Лежандра нулевой и первой степеней:  $P_0(\cos \theta) = 1$ ,  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ , а при  $k \geq 2$  используется рекуррентная формула:

$$P_{k+1}(\cos \theta) = \frac{2k+1}{k+1} \cos \theta P_k(\cos \theta) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(\cos \theta). \quad (17)$$

1. 3. Разность двух шаровых секторов. Рассмотрим трехмерное тело постоянной плотности как разность двух шаровых секторов (см. рис. 3). Нулевая гармоника ( $k = 0, n = 0$ ) имеет вид

$$C_{00}^* = \frac{m}{M}, \quad S_{00}^* = 0. \quad (18)$$

При  $k \geq 1$

$$\begin{bmatrix} C_{kn}^* \\ S_{kn}^* \end{bmatrix} = \frac{3m}{M} \frac{\left(\frac{\rho_r}{R}\right)^{k+3} - \left(\frac{\rho_f}{R}\right)^{k+3}}{\left(\frac{\rho_r}{R}\right)^3 - \left(\frac{\rho_f}{R}\right)^3} \frac{P_{k-1}(\cos \theta) - P_{k+1}(\cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(2k+1)^2(k+3)} P_{kn}^*(\sin \varphi_Q) \begin{bmatrix} \cos n \lambda_Q \\ \sin n \lambda_Q \end{bmatrix}. \quad (19)$$



Одномерное тело представим вертикальным отрезком или близким к нему разностным шаровым сектором при  $\theta = 0,001^\circ$ . В некоторых моделях в качестве одномерного тела будем рассматривать вертикальный стержень при  $\theta = 1^\circ$ .

**2. Вычисление элементов поля в локальной системе координат по элементам поля на дуге большого круга.** Постоянные Лежандра модельных тел выражаются через их массы  $m$ , линейные радиусы  $\rho_Q, \rho_0, \rho_r, \rho_f$  и угловой радиус  $\theta$  для двумерных и трехмерных структур. Обратная задача гравитационного потенциала для точечных масс и сферической шапки решалась при исследовании зависимости результата от геометрической формы структур мантии Земли [Tarakanov et al., 2007]. В настоящей статье формулы (14)—(19) используются для выбора истинного решения обратной задачи трехмерных моделей среди нескольких. Решение обратной задачи выполняется при условии, что геометрия источника поля интерпретатору не известна. Результатом решения задачи являются постоянные Дубошина  $m, h_Q, \psi_{21}, \psi_{35}, \psi_{41}, \psi_{42}$ . Поэтому есть только одна возможность — поместить полученную массу тела *неизвестной геометрической формы* в ее центр на глубине  $h_Q$ , широте  $\varphi_Q$  и долготе  $\lambda_Q$ , вычислить постоянные Лежандра по формулам (14), вставить их в разложение потенциала (13) и его производные после замены  $\rho = R$ , а затем сравнить оценки этих элементов поля с модельными значениями. Таким образом, прямая задача потенциала и его производных решается дважды: первый раз — по точным параметрам модельных тел, а второй — по приближенным значениям моментов  $m, h_Q$ . Использование моментов  $m, h_Q, \psi_{21}, \psi_{35}, \psi_{41}, \psi_{42}$  возможно лишь после решения новой задачи теории потенциала, которая ранее была названа *обратной задачей моментов*. Обратная задача моментов была *аналитически и численно* решена для описанных выше тел в мантии [Tarakanov, Karagioz, 2007 a, b] и во внутреннем ядре [Tarakanov, Karagioz, 2008] Земли *только в нулевом приближении*, которое в теории решения систем нелинейных уравнений называется грубым приближением. Геометрическая форма и размеры двумерного тела — сферической шапки — вычисляются точно как по сочетанию моментов  $h_Q, \psi_{21}$ , так и по сочетанию моментов  $h_Q, \psi_{35}$ . Геометрическую форму и размеры трехмерного шарового сектора и разности секторов определить в первом и последующих приближениях можно только по одному сочетанию моментов  $h_Q, \psi_{21}, \psi_{35}$ . Ошибки решения обратной задачи моментов даже в нулевом приближении сильно зависят от точности оценки моментов в процессе решения обратной задачи гравитационного потенциала. Поэтому в настоящей статье исследуется зависимость решения обратной задачи потенциала от количества гармоник в рядах Лежандра и Дубошина.

Гравитационное поле модельных тел вычислялось по разложению потенциала (13), где постоянные ряда Лежандра модельных тел определяются формулами (14)—(19). Первые и вторые производные потенциала получены дифференцированием ряда (13) по  $\varphi, \lambda, \rho$ . После дифференцирования потенциала были получены составляющие силы притяжения и их градиентов в географически ориентированной системе осей  $P\xi\eta\zeta$ , когда ось  $\xi$  направлена на север по касательной к меридиану, ось  $\eta$  — на восток, а ось  $\zeta$  — по радиусу сферы наверх. После подстановки  $\rho = R$  получены производные потенциала на поверхности сферы [Tarakanov et al., 2007]. Производные потенциала по касательной к дуге  $S$  и радиусу сферы  $R$  определяются через производные по осям  $\xi, \eta, \zeta$  с помощью азимута  $\alpha_P$  на рис. 1:

$$T_S = T_\xi \cos \alpha_P + T_\eta \sin \alpha_P, \quad T_R = -T_\zeta, \quad T_{SS} = T_{\xi\xi} \cos^2 \alpha_P + T_{\eta\eta} \sin^2 \alpha_P + T_{\xi\eta} \sin 2\alpha_P,$$

$$T_{SR} = -T_{\xi\xi} \cos \alpha_P - T_{\eta\zeta} \sin \alpha_P, \quad T_{RR} = T_{\zeta\zeta}, \quad (20)$$

где три вторые производные в прямоугольной географически ориентированной системе координат  $P\xi\eta\zeta$ , лежащей на поверхности сферы, выражаются через шесть вторых производных и три отношения первых производных к радиусу сферы в сферической системе координат  $\varphi, \lambda, \rho$ , а именно:

$$T_{\xi\xi} = \frac{T_{\varphi\varphi}}{R^2} - \frac{T_R}{R}, \quad T_{\eta\eta} = \frac{T_{\lambda\lambda}}{R^2 \cos^2 \varphi} - \frac{T_R}{R} - \frac{T_\varphi}{R^2} \operatorname{tg} \varphi, \quad T_{\xi\eta} = \frac{T_{\varphi\lambda}}{R^2 \cos \varphi} + \frac{T_\lambda}{R^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi,$$

$$T_{\zeta\zeta} = T_{RR}, \quad T_{\xi\xi} = -\frac{T_{\phi R}}{R} - \frac{T_{\phi}}{R^2}, \quad T_{\eta\xi} = -\frac{T_{\lambda R}}{R \cos \phi} - \frac{T_{\lambda}}{R^2 \cos \phi}.$$

Зная численные значения производных (20), можно вычислить производные потенциала в локальной системе координат через угловое расстояние  $\Delta$  пункта решения обратной задачи потенциала (см. рис. 1):

$$T_x = T_S \cos \Delta - T_R \sin \Delta, \quad T_z = -T_S \sin \Delta - T_R \cos \Delta, \quad T_{xx} = T_{SS} \cos^2 \Delta + T_{RR} \sin^2 \Delta - T_{SR} \sin 2\Delta, \\ T_{zz} = T_{SS} \sin^2 \Delta + T_{RR} \cos^2 \Delta + T_{SR} \sin 2\Delta, \quad T_{xz} = -T_{SR} \cos 2\Delta + \frac{1}{2} (T_{RR} - T_{SS}) \sin 2\Delta. \quad (21)$$

Численные значения потенциала, выраженные через высоту геоида и производные (21), подставляются в функции глубин (6) и (9). Численное решение уравнений глубин  $F(h_Q) = 0$  при *решении обратной задачи потенциала* как по трем, так и по шести элементам поля выполнено, как обычно, путем перебора глубин  $h_Q$  от 0 до 6371 км. Структуры внутреннего ядра для сравнения точности решения обратной задачи по трем и шести элементам поля выбраны в качестве самого трудного варианта интерпретации гравитационного поля моделей.

**3. Результаты решения обратной задачи по трем и шести элементам поля.** Решение обратной задачи потенциала для сферических секторов выполнено как по трем, так и по шести элементам поля. Угловые радиусы  $\theta$  секторов менялись в последовательности  $1^\circ, 5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ , а линейные радиусы кровли (roof) и подошвы (foot) секторов равны соответственно  $\rho_r = 1215$  км и  $\rho_f = 0$  км. Глубины кровли и подошвы определялись через линейные радиусы:  $h_r = R - \rho_r = 5156$  км,  $h_f = R - \rho_f = 6371$  км. Радиус внутреннего ядра принят равным  $\rho_r = 1215$  км, согласно работе [Anderson, 1983], когда на глубине 5156 км заканчивается кристаллизация вещества внутреннего ядра.

Численное решение обратной задачи потенциала выполнено для всех пяти моделей на угловых расстояниях  $\Delta$ , менявшихся от 1 до  $179^\circ$  с шагом  $1^\circ$ . Однако ввиду большого объема приведены табл. 1 и 2 для секторов с угловыми радиусами 15 и  $90^\circ$ . В таблицах нет пунктов на расстояниях  $\Delta = 0^\circ$  и  $\Delta = 180^\circ$ , где возможна сингулярность решения уравнений глубин (6) и (9). Высшая степень гармоники в ряде Лежандра обозначена через  $K$ . Общее число гармоник в рядах Лежандра с учетом нулевой гармоники равно  $K + 1$ .

Величины  $K$  уменьшались в последовательности 180, 16, 8, 4, 2. В левой колонке таблиц выписаны решения обратной задачи потенциала в пунктах  $P$ , расположенных на угловых расстояниях  $\Delta$  от экстремумов  $\zeta, T_R, T_{RR}$ . Моменты модельного тела в каждом пункте интерпретации выделены жирным шрифтом. Жирным шрифтом выделены модельные значения всех элементов поля сферического сектора при  $K = 180$ . При  $K = 16, 8, 4$  элементы поля совпадают с величинами, выписанными в таблицах, а для трех гармоник с учетом нулевой степени ( $K = 2$ ) ошибки вычисления  $\zeta$  достигают 1%, а ошибки производных потенциала — нескольких процентов. Для сокращения объема таблиц элементы поля приведены только при  $K = 180$ .

Для каждого значения  $K$  решение обратной задачи потенциала имеет несколько корней, но в левой половине таблиц выписаны только истинные решения, которые легко отделяются от ложных корней после повторного решения прямой задачи по оценкам моментов в решении обратной задачи потенциала [Tarakanov et al., 2007]. Пункты интерпретации выполнялись с шагом  $1^\circ$  по угловому расстоянию  $\Delta$ , но для сокращения приведены решения лишь для ключевых значений углового расстояния  $\Delta$ . Жирным шрифтом выписаны теоретические значения *моментов модельных тел* [Tarakanov, Karagioz, 2007a]:

$$\frac{h_Q}{R} = 1 - \frac{3}{8} (1 + \cos \theta) \frac{(\rho_r / R)^4 - (\rho_f / R)^4}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3}, \\ \Psi_{21} = \left(1 - \frac{h_Q}{R}\right)^2 - \frac{3}{10} \frac{(\rho_r / R)^5 - (\rho_f / R)^5}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3} \cos \theta (1 + \cos \theta),$$

Т а б л и ц а 1. Решение обратной задачи гравитационного потенциала Аля сектора массой  $m/M = 5 \cdot 10^{-6}$  при  $h_r = 5156$  км,  $h_f = 6371$  км,  $\theta = 15^\circ$  при различных значениях  $K$

$\Delta, ^\circ$	$K$	$h_Q, \text{ км}$	$\Psi_{21}, 10^{-4}$	$\Psi_{35}, 10^{-5}$	$\Psi_{41}, 10^{-6}$	$\Psi_{42}, 10^{-5}$	$m/M, 1 \cdot 10^{-6}$	$\zeta, \text{ м}$	$T_R, \text{ МГал}$	$10^2 T_S, \text{ МГал}$	$10^2 T_{RR}, E$	$10^3 T_{SR}, E$	$10^2 T_{SS}, E$
1	—	5475,2750	-9,52	8,60	2,78	-1,11	5,0000	37,1099	6,6711	-1,9503	2,4449	-0,1079	-1,2225
1	16	5474,0179	-7,80	—	—	—	4,9996	37,0710	6,6502	-1,9018	—	—	—
1	8	5474,0100	-7,70	—	—	—	4,9996	37,0710	6,6502	-1,9018	—	—	—
1	4	5470,2603	-4,00	—	—	—	4,9983	37,0847	6,6556	-1,9042	—	—	—
1	2	5454,3923	35,29	—	—	—	4,9952	37,0609	6,6212	-1,7633	—	—	—
1	16	5475,2602	-9,48	8,04	1,46	-0,58	5,0000	37,0653	6,6477	-1,8980	2,4282	-0,1040	-1,2141
1	8	5475,2428	-9,44	7,58	0,81	-0,33	5,0000	37,0654	6,6477	-1,8980	2,4282	-0,1040	-1,2141
1	4	5476,0000	-11,30	24,2	-14,3	5,72	5,0001	37,0593	6,6442	-1,8870	2,4251	-0,1029	-1,2125
1	2	5469,1124	8,69	204	185	-74,0	4,9989	36,9940	6,5937	-1,7278	2,3806	-0,0894	-1,1903
10	—	5475,2750	-9,52	8,60	2,78	-1,11	5,0000	37,0013	6,6290	-19,2257	2,4200	-1,0602	-1,2084
10	16	5474,0457	-7,80	—	—	—	4,9996	36,9649	6,6096	-18,7597	—	—	—
10	8	5474,0394	-7,80	—	—	—	4,9996	36,9649	6,6096	-18,7598	—	—	—
10	4	5470,4506	-4,30	—	—	—	4,9984	36,9777	6,6148	-18,7869	—	—	—
10	2	5454,2249	35,33	—	—	—	4,9951	36,9627	6,5865	-17,4682	—	—	—
10	16	5475,2605	-9,48	8,05	1,48	-0,59	5,0000	36,9596	6,6072	-18,7235	2,4046	-1,0225	-1,2009
10	8	5475,2442	-9,44	7,63	0,88	-0,35	5,0000	36,9597	6,6072	-18,7239	2,4046	-1,0226	-1,2009
10	4	5475,9822	-11,20	23,40	-15,50	6,20	5,0001	36,9544	6,6042	-18,6247	2,4021	-1,0125	-1,1997
10	2	5469,1609	8,42	208	191	-76,4	4,9989	36,8972	6,5595	-17,1132	2,3625	-0,8850	-1,1805
30	—	5475,2750	-9,52	8,60	2,78	-1,11	5,0000	36,1781	6,3161	-51,5465	2,2393	-2,7660	-1,1078
30	16	5474,2388	-8,10	—	—	—	4,9997	36,1587	6,3067	-50,5471	—	—	—
30	8	5474,2390	-8,10	—	—	—	4,9997	36,1587	6,3067	-50,5472	—	—	—
30	4	5471,7965	-5,90	—	—	—	4,9987	36,1650	6,3103	-50,6654	—	—	—

Окончание табл. 1

30	2	5453,1628	35,20	—	—	4,9942	36,2004	6,3190	-48,5505	—	—	—
30	16	5475,2630	-9,49	8,16	1,65	5,0000	36,1557	6,3053	-50,4701	2,2323	-2,6888	-1,1054
30	8	5475,2543	-9,47	7,97	1,39	5,0000	36,1558	6,3053	-50,4708	2,2323	-2,6889	-1,1054
30	4	5475,8272	-10,70	16,8	-25,9	5,0001	36,1542	6,3049	-50,3646	2,2324	-2,6794	-1,1058
30	2	5469,5873	6,25	238	243	4,9989	36,1486	6,2963	-47,4938	2,2232	-2,4368	-1,1058
<b>59</b>	—	<b>5475,2750</b>	<b>-9,52</b>	<b>8,60</b>	<b>2,78</b>	<b>5,0000</b>	<b>34,0409</b>	<b>5,5602</b>	<b>-72,9231</b>	<b>1,8328</b>	<b>-3,6471</b>	<b>-0,8913</b>
59	16	5474,5914	-8,80	—	—	4,9998	34,0558	5,5654	-72,3651	—	—	—
59	8	5474,5910	-8,80	—	—	4,9998	34,0558	5,5654	-72,3651	—	—	—
59	4	5474,2798	-9,50	—	—	4,9998	34,0561	5,5653	-72,4499	—	—	—
59	2	5451,6171	28,86	—	—	4,9934	34,1099	5,6013	-74,1806	—	—	—
59	16	5475,2682	-9,51	8,37	2,16	5,0000	34,0555	5,5652	-72,3033	1,8365	-3,6095	-0,8948
59	8	5475,2698	-9,51	8,42	2,27	5,0000	34,0555	5,5652	-72,3031	1,8365	-3,6095	-0,8948
59	4	5475,3448	-9,31	1,27	-60,2	5,0000	34,0553	5,5650	-72,3517	1,8363	-3,6152	-0,8946
59	2	5470,9014	-0,17	317	458	4,9990	34,1012	5,5936	-72,4279	1,8587	-3,6142	-0,9124
<b>90</b>	—	<b>5475,2750</b>	<b>-9,52</b>	<b>8,60</b>	<b>2,78</b>	<b>5,0000</b>	<b>31,5306</b>	<b>4,7618</b>	<b>-66,7977</b>	<b>1,4496</b>	<b>-3,0772</b>	<b>-0,7022</b>
90	16	5474,7198	-9,70	—	—	5,0001	31,5447	4,7679	-67,0758	—	—	—
90	8	5474,7203	-9,70	—	—	5,0001	31,5447	4,7679	-67,0757	—	—	—
90	4	5475,5635	-9,90	—	—	5,0000	31,5452	4,7682	-66,9665	—	—	—
90	2	5445,6511	-3,30	—	—	5,0009	31,5245	4,7556	-71,3290	—	—	—
90	16	5475,2702	-9,53	8,44	2,93	5,0000	31,5448	4,7680	-67,0363	1,4533	-3,0954	-0,7049
90	8	5475,2689	-9,53	8,42	2,85	5,0000	31,5448	4,7680	-67,0364	1,4533	-3,0954	-0,7049
90	4	5474,6577	-9,22	-11,10	-55,0	5,0000	31,5444	4,7679	-67,0299	1,4533	-3,0919	-0,7049
90	2	5470,8975	-1,18	340	1000	5,0003	31,5392	4,7634	-69,3754	1,4492	-3,2668	-0,7015

Т а б л и ц а 2. Решение обратной задачи гравитационного потенциала для сектора массой  $m/M = 5 \cdot 10^{-6}$  при  $h_r = 5156$  км,  $h_f = 6371$  км,  $\theta = 90^\circ$  при различных значениях  $K$

$\Delta, ^\circ$	$K$	$h_Q, \text{ км}$	$\Psi_{21}, 10^{-4}$	$\Psi_{35}, 10^{-5}$	$\Psi_{41}, 10^{-6}$	$\Psi_{42}, 10^{-5}$	$m/M, 1 \cdot 10^{-6}$	$\zeta, \text{ м}$	$T_R, \text{ МГал}$	$10^2 T_S, \text{ МГал}$	$10^2 T_{RR}, E$	$10^3 T_{SR}, E$	$10^2 T_{SS}, E$
1	—	5915,3750	5,11	-4,47	3,42	-1,37	5,0000	34,1192	5,6040	-0,5913	1,8656	-0,0272	-0,9328
1	16	5923,4604	3,99	—	—	—	5,0023	34,2773	5,6826	-0,7493	—	—	—
1	8	5923,4598	3,99	—	—	—	5,0023	34,2773	5,6826	-0,7493	—	—	—
1	4	5923,1194	4,02	—	—	—	5,0022	34,2784	5,6831	-0,7497	—	—	—
1	2	5927,0252	3,28	—	—	—	5,0032	34,2508	5,6694	-0,7225	—	—	—
1	16	5915,0852	5,20	-5,74	0,29	-0,11	5,0000	34,3095	5,6960	-0,7662	1,9259	-0,0389	-0,9629
1	8	5915,0832	5,20	-5,75	0,28	-0,11	5,0000	34,3095	5,6960	-0,7662	1,9259	-0,0389	-0,9629
1	4	5915,1197	5,19	-5,72	-0,13	0,05	5,0000	34,3093	5,6959	-0,7659	1,9258	-0,0388	-0,9629
1	2	5915,5801	5,05	-10,1	-3,57	1,43	5,0000	34,2947	5,6873	-0,7439	1,9191	-0,0371	-0,9596
10	—	5915,3750	5,11	-4,47	3,42	-1,37	5,0000	34,0861	5,5941	-5,8908	1,8611	-0,2711	-0,9306
10	16	5923,2942	4,01	—	—	—	5,0023	34,2363	5,6686	-7,4315	—	—	—
10	8	5923,2937	4,01	—	—	—	5,0023	34,2363	5,6686	-7,4315	—	—	—
10	4	5922,9684	4,04	—	—	—	5,0022	34,2374	5,6690	-7,4357	—	—	—
10	2	5926,8703	3,30	—	—	—	5,0032	34,2113	5,6562	-7,1725	—	—	—
10	16	5915,0887	5,20	-5,71	0,33	-0,13	5,0000	34,2667	5,6813	-7,5950	1,9182	-0,3847	-0,9588
10	8	5915,0869	5,20	-5,72	0,32	-0,13	5,0000	34,2667	5,6813	-7,5951	1,9182	-0,3847	-0,9588
10	4	5915,1212	5,19	-5,70	-0,11	0,04	5,0000	34,2665	5,6812	-7,5920	1,9181	-0,3844	-0,9588
10	2	5915,5772	5,05	-10,1	-3,60	1,44	5,0000	34,2532	5,6733	-7,3822	1,9121	-0,3678	-0,9559
30	—	5915,3750	5,11	-4,47	3,42	-1,37	5,0000	33,8234	5,5155	-17,1248	1,8256	-0,7930	-0,9133
30	16	5922,0896	4,19	—	—	—	5,0022	33,9159	5,5597	-20,8602	—	—	—
30	8	5922,0896	4,19	—	—	—	5,0022	33,9159	5,5597	-20,8602	—	—	—
30	4	5921,8710	4,21	—	—	—	5,0021	33,9164	5,5600	-20,8700	—	—	—

Окончание табл. 2

30	2	5925,7258	3,49	—	—	5,0031	33,9015	5,5529	-20,2869	—	—	—
30	16	5915,1185	5,19	-5,52	0,66	5,0000	33,9344	5,5681	-21,2375	1,8594	-1,0646	-0,9277
30	8	5915,1177	5,19	-5,52	0,66	5,0000	33,9344	5,5681	-21,2376	1,8594	-1,0646	-0,9277
30	4	5915,1353	5,18	-5,57	0,14	5,0000	33,9344	5,5681	-21,2345	1,8594	-1,0643	-0,9277
30	2	5915,5538	5,06	-10,2	-3,84	5,0000	33,9291	5,5652	-20,8104	1,8572	-1,0311	-0,9271
<b>60</b>	—	<b>5915,3750</b>	<b>5,11</b>	<b>-4,47</b>	<b>3,42</b>	<b>5,0000</b>	<b>33,0001</b>	<b>5,2650</b>	<b>-30,3356</b>	<b>1,7097</b>	<b>-1,4259</b>	<b>-0,8558</b>
60	16	5919,5186	4,70	—	—	5,0012	32,9662	5,2468	-33,3831	—	—	—
60	8	5919,5186	4,70	—	—	5,0012	32,9662	5,2468	-33,3831	—	—	—
60	4	5919,5014	4,69	—	—	5,0012	32,9663	5,2468	-33,3862	—	—	—
60	2	5923,1468	4,14	—	—	5,0022	32,9694	5,2485	-33,0581	—	—	—
60	16	5915,2106	5,15	-5,04	1,86	5,0000	32,9685	5,2486	-33,7249	1,6982	-1,6402	-0,8439
60	8	5915,2107	5,15	-5,04	1,86	5,0000	32,9685	5,2486	-33,7249	1,6982	-1,6402	-0,8439
60	4	5915,1869	5,16	-5,19	1,14	5,0000	32,9685	5,2486	-33,7286	1,6982	-1,6405	-0,8438
60	2	5915,4918	5,09	-10,6	-4,66	5,0000	32,9736	5,2518	-33,6634	1,7008	-1,6363	-0,8460
<b>90</b>	—	<b>5915,3750</b>	<b>5,11</b>	<b>-4,47</b>	<b>3,42</b>	<b>5,0000</b>	<b>31,8550</b>	<b>4,9101</b>	<b>-35,4398</b>	<b>1,5414</b>	<b>-1,6792</b>	<b>-0,7707</b>
90	16	5918,1995	5,25	—	—	4,9998	31,7733	4,8729	-34,6328	—	—	—
90	8	5918,1996	5,25	—	—	4,9998	31,7733	4,8729	-34,6328	—	—	—
90	4	5918,2684	5,25	—	—	4,9998	31,7733	4,8729	-34,6260	—	—	—
90	2	5922,2252	5,15	—	—	4,9998	31,7745	4,8733	-34,5854	—	—	—
90	16	5915,2648	5,11	-4,82	3,67	5,0000	31,7739	4,8727	-34,8556	1,5180	-1,6329	-0,7531
90	8	5915,2647	5,11	-4,82	3,67	5,0000	31,7739	4,8727	-34,8556	1,5180	-1,6329	-0,7531
90	4	5915,2004	5,11	-5,02	3,34	5,0000	31,7738	4,8727	-34,8587	1,5180	-1,6330	-0,7531
90	2	5915,4650	5,12	-10,7	-5,96	5,0000	31,7735	4,8725	-35,1080	1,5178	-1,6532	-0,7530

$$\begin{aligned}
 \psi_{35} &= \frac{27}{20} \left( 1 - \frac{h_Q}{R} \right) \frac{(\rho_r / R)^5 - (\rho_f / R)^5}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3} \cos \theta (1 + \cos \theta) + \\
 &+ \frac{3}{32} \left[ (\rho_r / R)^3 + (\rho_f / R)^3 \right] (1 + \cos \theta) (1 - 5 \cos^2 \theta) - 3 (1 - h_Q / R)^3, \\
 \psi_{41} &= -\frac{27}{224} \frac{(\rho_r / R)^7 - (\rho_f / R)^7}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3} \cos \theta (1 + \cos \theta) \left( 1 - \frac{7}{3} \cos^2 \theta \right) + \\
 &+ \frac{27}{20} (1 - h_Q / R)^2 \frac{(\rho_r / R)^5 - (\rho_f / R)^5}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3} \cos \theta (1 + \cos \theta) + \\
 &+ \frac{3}{16} (1 - h_Q / R) \left[ (\rho_r / R)^3 + (\rho_f / R)^3 \right] (1 + \cos \theta) (1 - 5 \cos^2 \theta) - \frac{9}{4} (1 - h_Q / R)^4, \\
 \psi_{42} &= \frac{27}{56} \frac{(\rho_r / R)^7 - (\rho_f / R)^7}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3} \cos \theta (1 + \cos \theta) \left( 1 - \frac{7}{3} \cos^2 \theta \right) - \\
 &- \frac{27}{5} (1 - h_Q / R)^2 \frac{(\rho_r / R)^5 - (\rho_f / R)^5}{(\rho_r / R)^3 - (\rho_f / R)^3} \cos \theta (1 + \cos \theta) - \\
 &- \frac{3}{4} (1 - h_Q / R) \left[ (\rho_r / R)^3 + (\rho_f / R)^3 \right] (1 + \cos \theta) (1 - 5 \cos^2 \theta) + 9 (1 - h_Q / R)^4. \quad (22)
 \end{aligned}$$

По физическому смыслу формулы (22) представляют систему алгебраических уравнений для решения обратной задачи моментов, где неизвестными являются  $\cos \theta$  и два линейных радиуса сектора. Обратная задача моментов в нулевом приближении была решена для одномерных, двумерных и трехмерных тел в мантии и во внутреннем ядре в работах [Tarakanov, Karagiuz, 2007a, b; 2008]. Полученная грубая оценка геометрических параметров источников поля показала, что глубины кровли и подошвы и угловой радиус шарового сектора можно получить только по моментам первой, второй и третьей степени —  $h_Q, \psi_{21}, \psi_{35}$ .

Поперечные размеры кровли шаровых секторов с угловыми радиусами  $\theta$ , равными  $1^\circ, 5^\circ, 15^\circ$ , существенно меньше толщины секторов, равной 1215 км, и поэтому такие сектора во всех таблицах характеризуются признаками трехмерного тела:  $\psi_{21} < 0, \psi_{35} > 0$ . Поперечный размер полусферы, представляющей кровлю сектора с угловым радиусом  $\theta = 90^\circ$ , в три раза больше толщины тела, и такой сектор характеризуется признаками двумерного тела:  $\psi_{21} > 0, \psi_{35} < 0$ . Шаровой сектор с угловым радиусом  $\theta = 30^\circ$  близок к изометрической форме, а его геометрия характеризуется смешанными признаками:  $\psi_{21} > 0, \psi_{35} > 0$ . Все модельные тела с вертикальной осью симметрии характеризуются теоретическим отношением коэффициентов четвертой степени:  $\psi_{42} / \psi_{41} = -4$ .

Для всех структур при увеличении углового расстояния  $\Delta$  от 1 до  $180^\circ$  знаки коэффициентов формы сохраняются. Ошибки определения моментов тел растут с увеличением степени момента. Пренебрежимо малы ошибки определения массы всех тел при решении обратной задачи потенциала как по трем элементам поля, так и по шести. Расхождения в точности решения обратной задачи начинаются с момента первой степени — глубины центра масс  $h_Q$ .

При использовании трех элементов поля понижение глубины центра масс стержня ( $\theta = 1^\circ$ ) уменьшается от 700 до 400 м по мере увеличения  $\Delta$  от 1 до  $90^\circ$  и возрастает до 900 м вблизи точки сингулярности ( $\Delta = 179^\circ$ ). Интерпретация по шести элементам поля сопровождается существенно меньшими ошибками по глубине от 15 ( $\Delta = 1^\circ$ ) до 5 м ( $\Delta = 90^\circ$ ) и 12 м ( $\Delta = 179^\circ$ ). Таким образом, ошибки интерпретации по шести элементам поля почти на два порядка меньше.

Ошибки оценки глубины  $h_Q$  растут по мере увеличения углового радиуса модели и достигают максимума для половины шара ( $\Delta = 90^\circ$ ). По трем элементам поля вблизи экстремума "кулообразных аномалий" ( $\Delta = 1^\circ$ ) глубина  $h_Q$  завышается на 8 км при занижении вертикального сжатия тела на 28%. По шести элементам поля систематическое занижение глубины равно всего 290 м при завышении вертикального сжатия всего на 2%. Преимущество использования шести элементов поля очень велико. По мере удаления от экстремума "кулообразных аномалий" это преимущество увеличивается.

В таблицах решение обратной задачи потенциала по шести элементам поля одинаково при  $K = 180, 16, 8$ . По пяти ( $K = 4$ ) и трем ( $K = 2$ ) гармоникам решение по трем элементам поля неудовлетворительно по точности. По шести элементам поля ложные решения по пяти и трем гармоникам ряда Лежандра обнаруживаются по обратным знакам моментов третьей и четвертой степени:  $\psi_{35}, \psi_{41}, \psi_{42}$ . Интерпретация поля сферического сектора *внутреннего ядра* по трем элементам возможна, но с ошибками в 100 раз большими по сравнению с решением обратной задачи по шести элементам. Напомним, что решение обратной задачи потенциала по трем элементам поля для структур *мантии Земли* сопровождается ошибками в 10 раз большими, чем при интерпретации по шести элементам поля [Tarakanov et al., 2003; 2007].

**Обсуждение результатов.** Решение обратной задачи потенциала по шести элементам поля в одном пункте для структур внутреннего ядра Земли в виде шаровых секторов можно получить по полю, содержащему всего девять гармоник в ряду Лежандра — от нулевой до восьмой степени. Поэтому для определения плотностных структур внутреннего ядра Земли не нужно стремиться к определению большого числа гармоник поля в модели поля Земли, а целесообразнее увеличивать точность измерения девяти нижних сферических гармоник.

Выполненное решение обратной задачи для гравитационного поля плотностных структур внутреннего ядра Земли обнаружило важную роль конструирования спутниковых градиентометров. При этом достаточно измерять всего девять нижних гармоник вторых производных. Отсюда возникает возможность осреднения измерений градиентов на большом интервале времени для снижения уровня ошибок измерений, когда вторые производные не вычисляются по ряду Лежандра, а измеряются на борту спутника.

Из измеренных вторых производных внутри спутников необходимо вычитать поле девяти первых гармоник, порождаемых плотностными структурами мантии. Для этого целесообразно составить каталог вклада мантийных структур в первые девять гармоник рядов Лежандра.

С интерпретацией очень небольшого количества гармоник впервые пришлось встретиться в решении обратной задачи гравитационного поля Венеры по трем элементам. Первые постоянные Лежандра при  $k = 2$  и 3 были приведены в работе [Sjogren et al., 1981]. Нулевая и все четные зональные гармоники определяют нормальные фигуры планет, а первая гармоника считается равной нулю вследствие совпадения начала планетарной системы с центром масс планеты. По второй и третьей гармоникам поля Венеры были вычислены изолированные аномалии высот афродитоида, вертикальной и горизонтальной проекций силы притяжения. По решению уравнения глубин (9) и формулам (10)—(12) были вычислены глубина центра масс  $h_Q$ , вертикальное сжатие  $\psi_{21}$  и масса  $m/M$  источников пяти аномалий. После введения поправки на сжатие источников диапазон глубин оказался в диапазоне 930—1140 км. При интерпретации аномалий Земли вычисленные глубины центра масс источников по мере уменьшения  $K$  от 16 до 3 увеличивались в 1,4 раза [Tarakanov et al., 1983]. Глубины источников Венеры были приведены к интерпретации поля при  $K = 16$  путем уменьшения величин глубин в 1,4 раза и оказались в диапазоне 700—800 км [Тараканов и др., 1984].

Следующая интерпретация аномалий Венеры была выполнена по модели поля [Williams, Mottinger, 1983] при  $K = 7$ . После вычисления  $m$  и  $h_Q$  каждого источника изолированной аномалии нулевая и первая гармоники потенциала и его производных в ряду (13) использовались для вычитания из поля Венеры влияний всех плотностных структур. После введения поправ-



ки в глубины центров масс на вертикальное сжатие источников глубины 19 плотностных структур менялись от 620 до 1240 км при средней величине 920 км [Тараканов и др., 1989].

Сравнение интерпретации двух моделей поля Венеры показало, что даже по сумме второй и третьей гармоник удалось получить достоверные сведения о глубинах крупнейших плотностных структур Венеры. После проведенного исследования усовершенствованного метода интерпретации на моделях можно выполнить интерпретацию гравитационного поля Венеры и других планет по шести элементам поля. При этом не нужно гнаться за максимально большим числом сферических гармоник в моделях поля планет. Целесообразнее выбрать те модели, в которых точнее измерены постоянные Лежандра нижних гармоник.

В дальнейшем интерпретация аномалий других планет выполнялась также по небольшому числу гармоник: для Земли  $K = 16$  [Tarakanov, Cherevko, 1981a,b; Tarakanov et al., 1983], для Луны  $K = 16$  [Тараканов и др., 1985], для Марса  $K = 12$  [Тараканов и др., 1998].

Результаты интерпретации модельных структур внутреннего ядра Земли показали возникновение новой *"проблемы девяти гармоник"*: при интерпретации полей структур мантии и даже коры необходимо составлять каталог возмущений постоянных Лежандра первых девяти гармоник найденными плотностными неоднородностями.

Успешное решение обратной задачи гравитационного потенциала для поля модельных плотностных структур внутреннего ядра Земли наталкивает на мысль о возможности определения строения центра галактики Млечный Путь по нескольким нижним гармоникам потенциала галактики. Физической основой определения гравитационного поля галактики может служить измерение изменений элементов орбит некоторых звезд, например Солнца.

**Выводы.** В теории потенциала показано, что по гравитационному потенциалу и всем его производным, заданным вне объема тела произвольной формы, невозможно определить распределение плотности внутри этого тела в виде трехмерной непрерывной функции. Такой подход к интерпретации поля условно назван *математическим* методом. В альтернативном *физическом методе интерпретации изолированных аномалий* гравитационного поля Земли выделены семь основных отличий от *математического метода интерпретации*. Ключевым отличием физического метода является определение последовательности *дискретных характеристик источника поля в виде моментов масс* относительно локальной прямоугольной системы координат. Завершающей стадией интерпретации является решение новой задачи теории потенциала — обратной задачи моментов и вычисление средней плотности *"нормальной плотностной неоднородности"*.

Интерпретация поля изолированных аномалий по шести его элементам по сравнению с интерпретацией этих же аномалий по трем элементам поля в 10 раз точнее для плотностных структур мантии и в 100 раз точнее для структур внутреннего ядра Земли.

При интерпретации аномалий структур внутреннего ядра потенциал и первые его производные можно вычислить по первым девяти гармоникам рядов Лежандра. Однако вторые производные потенциала, скорее всего, придется измерять на круговой орбите. Вдоль дуги большого круга  $S$ , являющейся *"подспутниковой трассой"* на средней высоте спутника, необходимо измерять вертикальный  $T_{RR}$  и горизонтальный  $T_{SR}$  градиенты силы притяжения, а также *"кривизну"*  $T_{SS}$ .

Для интерпретации гравитационного поля шарового сектора массой  $m/M = 5 \cdot 10^{-6}$  достаточно измерить всего девять первых гармоник потенциала и пяти его производных. Чувствительность вертикального *градиентометра* должна быть не ниже  $10^{-3} E$ , а чувствительность *градиентометров* для измерения горизонтального градиента  $T_{SR}$  и *"кривизны"*  $T_{SS}$  — не меньше  $10^{-4} E$ . Величина  $1 E$  равна  $1 \text{ панос}^{-2}$ , а требование к чувствительности приборов порядка  $10^{-3}$ — $10^{-4} E$  относит проблему исследования плотностных структур внутреннего ядра Земли к области нанотехнологий.

Не исключена возможность определения структуры центра галактики Млечный Путь по измерениям постоянных Лежандра небольшого числа нижних гармоник. В принципе, постоянные Лежандра можно вычислить по эволюции элементов орбит некоторых звезд, например Солнца.

## Список литературы

- Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. — Москва: Наука, 1988. — 272 с.
- Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. — Москва: Наука, 1968. — 800 с.
- Дубошин Г.Н. Теория притяжения. — Москва: Физматгиз, 1961. — 288 с.
- Тараканов Ю.А., Камбаров Н.Ш., Приходько В.А. Зависимость интерпретации гравитационных аномалий Марса от сжатия его нормальной фигуры // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. — 1998. — № 3. — С. 70—79.
- Тараканов Ю.А., Камбаров Н.Ш., Приходько В.А. Интерпретация гравитационных аномалий Венеры // Косм. исследования. — 1984. — 22, № 4. — С. 617—621.
- Тараканов Ю.А., Камбаров Н.Ш., Приходько В.А. Оценка мощности литосферы Венеры по ее гравитационному полю // Астроном. журн. — 1989. — 66, № 1. — С. 120—125.
- Тараканов Ю.А., Камбаров Н.Ш., Трубицын В.П., Приходько В.А. Отклонение от гидростатического равновесия Земли и Луны // Физика Земли. — 1985. — № 8. — С. 3—27.
- Anderson D.L. A new look at the inner core of the Earth // Nature (London). — 1983. — 302, № 194. — P. 660.
- Sjogren W.L., Ananda M., Williams B.G., Bikkeland P.W., Esposito P.S., Wimberly R.N., Ritke S.J. Venus gravity fields // Ann. Geophys. — 1981. — 37, № 1. — P. 179—184.
- Tarakanov Yu.A., Cherevko T.N. Large-scale density heterogeneities in the mantle // Phys. Earth Planet. Inter. — 1981a. — 25, № 4. — P. 390—395.
- Tarakanov Yu.A., Cherevko T.N. Thermal nature of the source of the Indian gravity anomaly // J. Volcanology and Geothermal Res. — 1981b. — 10, № 4. — P. 293—298.
- Tarakanov Yu.A., Cherevko T.N., Karagioz O.V. The interpretation of the major non-hydrostatic anomalies of the Earth // Phys. Earth Planet. Int. — 1983. — 31, № 1. — P. 54—58.
- Tarakanov Yu.A., Karagioz O.V. Analytical and numerical solutions of a new problem of gravitational potential theory: the inverse problem of moments // Gravitation and Cosmology. — 2007a. — 13, № 3 (51). — P. 223—232.
- Tarakanov Yu.A., Karagioz O.V. Joint numerical solution of two inverse problems of gravitational potential // Gravitation and Cosmology. — 2007b. — 13, № 4 (52). — P. 312—320.
- Tarakanov Yu.A., Karagioz O.V. Numerical interpretation of the gravitational field of density heterogeneities of the Earth's inner core using models // Gravitation and Cosmology. — 2008. — 14, № 4. — P. 376—385.
- Tarakanov Yu.A., Karagioz O.V., Kudriavitsky M.A. Solution of the inverse problem for the gravitational field from the potential and its five derivatives at one point // Gravitation and Cosmology. — 2007. — 13, № 2 (50). — P. 151—162.
- Tarakanov Yu.A., Karagioz O.V., Kudriavitsky M.A. Unambiguous numerical solution of the direct and inverse problems of the gravitational potential using models // Gravitation and Cosmology. — 2003. — 9, № 3 (35). — P. 214—226.
- Williams B.G., Mottinger N.A. Venus Gravity Field: Pioneer Venus Orbiter Navigation Results // Icarus. — 1983. — 56, № 3. — P. 578—589.