

Застосування модифікацій матричного методу для моделювання хвильових процесів у шаруватому півпросторі

© Д. В. Малицький, О. І. Хитряк, 2012

Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України,
Львів, Україна

Надійшла 6 січня 2010 р.

Представлено членом редколегії О. В. Кендзерю

Рассматриваются различные модификации матричного метода Томпсона — Хаскела для моделирования волнового поля на свободной поверхности слоистого полупространства. Каждая из предложенных модификаций наиболее эффективна при определенных ограничениях на входные данные задачи. В зависимости от модели среды использован тот или иной метод моделирования. На основе теоретических вычислений с помощью пакета MATLAB разработан комплекс прикладных программ для математического моделирования волновых процессов в слоистом полупространстве.

The authors suggest applying various modifications of Thompson — Haskel's matrix method for modeling wave field on the free surface of the layered half-space. Each of the proposed modifications is the most effective for certain restrictions on the input data of the problem. Depending on the environment model it is suggested applying one or another method of modeling. Based on the theoretical calculations we have developed the complex of applications by using the MATLAB package for mathematical modeling of wave processes in the layered half-space.

Вступ. Матричний метод, як один із великої кількості відомих підходів, розроблений для розв'язування прямої динамічної задачі сейсміки у шаруватому півпросторі. Цей метод дає змогу оминати складну процедуру виконання граничних умов на межі контакту двох різних однорідних ізотропних шарів. Уперше такий підхід запропонував В. Томсон, ефективно розвинув його І. Данкін [Dunkin, 1965]. Матричний формалізм полягає у тому, що кожен однорідний ізотропний шар пружного середовища характеризується матрицями четвертого (P — SV -задача) і другого порядку (SH -задача), а всю систему плоско-паралельних шарів описують характеристичною матрицею. Алгоритми, які побудовані на основі цього методу, є достатньо швидкодіючими. Під час розв'язування вказаних задач на ЕОМ не виникає питань стосовно стабільності обчислювальних схем.

Як показано у публікаціях [Малицький, Муїла, 2007; Молотков, 2001; Молотков, 1984; Müller, 1985], матричний метод дає змогу розрахувати інтерференційні коефіцієнти відбиття і заломлення для складних шаруватих пружних середовищ, а в кінцевому випадку і сейсмограми на вільній поверхні півпростору, якщо відомі густина (або модуль зсуву) шарів і швидкість поширення поздовжніх і поперечних пружних хвиль у кожному з шарів моделі. Однак область застосування розрахункової схеми Томсона — Хаскела виявилася принципово обмеженою [Молотков, 1984], оскільки вона дає помилки на високих частотах у діапазоні критичних кутів поширення хвиль. У зв'язку з цим для розвитку матричного методу дуже важливим є інший підхід, який використовує характеристичні матриці п'ятого і шостого порядків і має ширші межі застосування [Молотков, 1984]. Отже, із усіх методів, які використовують для моделю-

вання хвильових полів починаючи із 1980-х років донині, матричний метод і його модифікації є достатньо популярними для сейсмологів.

У запропонованій статті показано основи матричного методу Томпсона — Хаскела та його модифікації, метод з використанням матриць шостого порядку і рекурентний метод. Здійснено математичне моделювання процесів поширення сейсмічних хвиль у вертикально-неоднорідному півпросторі від джерела у вигляді зсувної дислокації, що задається тензором сейсмічного моменту.

Постановка задачі. Середовище змодельовано системою однорідних ізотропних плоскопаралельних n шарів на $(n + 1)$ -однорідному півпросторі з вільною поверхнею. На всіх межах між шарами, крім межі, на якій розміщено джерело, виконано умови жорсткого контакту. Постановку задачі описано в роботах [Малицький, Муйла, 2007; Малицький, Хитряк, 2008]. Рівняння руху в i -му шарі, а також початкові і граничні умови мають вигляд

$$\rho_i \mathbf{u}_i = (\lambda_i + 2\mu_i) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_i) - \mu_i \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_i), \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, 0) = 0; \quad \mathbf{r} = (0, 0, z_d), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{i+1}(\mathbf{r}, t); \quad \tau_{zm_i}(\mathbf{r}, t) = \tau_{zm_{i+1}}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \neq (0, 0, z_d), \quad (3)$$

$$\tau_{zm} = 0, \quad z = 0, \quad m = r, \varphi, z. \quad (4)$$

Напруження на вільній поверхні відсутні (4), а хвилі з нижнього півпростору не повертаються (умова випромінювання).

Кожен ізотропний шар i характеризується товщиною h_i , модулем зсуву μ_i і швидкостями поширення поздовжніх $V_{P(i)}$ і поперечних $V_{S(i)}$ хвиль. Джерело сейсмічних хвиль розглядаємо як точкове і задаємо у вигляді тензора сейсмічного моменту M_{ij} , яке розміщене всередині одного із однорідних ізотропних шарів на s -й уявній межі. Переміщення і напруження в i -му шарі визначаємо через скалярний ϕ і векторні ψ, χ потенціали, які вибрано так, щоб вони задовольняли хвильовим рівнянням. Потенціали ϕ, ψ, χ представлені через інтегральні перетворення Фур'є — Бесселя — Мелліна [Малицький, Муйла, 2007; Молотков, 2001].

Легко показати, що цю задачу можна розділити на дві частини: P — SV - і SH -задачі [Молотков, 1984; Малицький, Пак, 2004]. Задача Коші (Dunkin, 1965; Малицький, Муйла, 2007; Молотков, 2001; Молотков, 1984) достатньо добре вивчена, методи побудови розв'язку описані у роботах [Малицький, Пак, 2004; Малицький, Хитряк, 2008]. Отже, використовуючи матричний метод, можна показати, що поле переміщень у циліндричній системі координат у дальній зоні має такий вигляд [Малицький, Муйла, 2007; Малицький, Пак, 2004; Малицький, Хитряк, 2008]:

$$\begin{aligned} u_z^{(0)}(r, \varphi_a, t) = & \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j^\infty}^{\delta+j^\infty} M_1(k, \eta, \varphi_a) g_{1z} e^{k\eta} d\eta + \\ & + \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j^\infty}^{\delta+j^\infty} M_2(k, \eta, \varphi_a) g_{2z} e^{k\eta} d\eta + \\ & + \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j^\infty}^{\delta+j^\infty} M_3(k, \eta, \varphi_a) g_{3z} e^{k\eta} d\eta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_r^{(0)}(r, \varphi_a, t) &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_1(k, \eta, \varphi_a) g_{1r} e^{k\tau\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_2(k, \eta, \varphi_a) g_{2r} e^{k\tau\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_3(k, \eta, \varphi_a) g_{3r} e^{k\tau\eta} d\eta; \\
 u_\varphi^{(0)}(r, \varphi_a, t) &= \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_5(k, \eta, \varphi_a) g_{5\varphi} e^{k\tau\eta} d\eta + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_6(k, \eta, \varphi_a) g_{6\varphi} e^{k\tau\eta} d\eta, \tag{5}
 \end{aligned}$$

де J_0, J_1 — функції Бесселя; φ_a — азимут станції; η — змінна Мелліна; k — горизонтальне хвильове число. Компоненти тензора сейсмічного моменту $M_{xx}, M_{xy}, M_{xz}, M_{yy}, M_{yz}, M_{zz}$ входять у співвідношення

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_{xz} \cos \varphi_a + M_{yz} \sin \varphi_a, \quad M_2 = M_{zz}, \\
 M_3 &= \cos^2 \varphi_a \cdot M_{xx} + \sin^2 \varphi_a \cdot M_{yy} + \sin 2\varphi_a \cdot M_{xy}, \\
 M_5 &= \cos \varphi_a M_{yz} - \sin \varphi_a M_{xz}, \\
 M_6 &= \sin 2\varphi_a \cdot M_{xx} - \sin 2\varphi_a \cdot M_{yy} - 2 \cos 2\varphi_a \cdot M_{xy}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Залежно від способу обчислення підінтегральних виразів $g_{1z}, g_{2z}, g_{3z}, g_{1r}, g_{2r}, g_{3r}, g_{5\varphi}, g_{6\varphi}$, які містять інформацію про характеристики середовища, розглянемо кілька модифікацій матричного методу. Кожна з них оперує такими характеристичними матрицями:

$$D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,4}} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{A}_n \mathbf{L}_n \mathbf{A}_n^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^{-1}; \tag{7}$$

$$D^* = (d^*_{ij})_{i,j=\overline{1,4}} = \mathbf{A}_{n+1}^{*-1} \mathbf{A}_n^* \mathbf{L}_n^* \mathbf{A}_n^{*-1} \dots \mathbf{A}_2^{*-1} \mathbf{A}_1^* \mathbf{L}_1^* \mathbf{A}_1^{*-1}; \tag{8}$$

$$D' = (d'_{ij})_{i,j=\overline{1,4}} = \mathbf{A}_{n+1}^{-1} \mathbf{A}_n \mathbf{L}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_{d+1}^{-1}; \tag{9}$$

$$D'^* = (d'^*_{ij})_{i,j=\overline{1,4}} = \mathbf{A}_{n+1}^{*-1} \mathbf{A}_n^* \mathbf{L}_n^* \mathbf{A}_{n-1}^* \dots \mathbf{A}_{d+1}^{*-1}; \tag{10}$$

$$D'' = (d''_{ij})_{i,j=\overline{1,4}} = \mathbf{A}_d \mathbf{L}_d \mathbf{A}_d^{-1} \dots \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^{-1}; \tag{11}$$

$$D^{**} = \left(d^{**}_{ij} \right)_{i,j=1,4} = \mathbf{A}_d^* \mathbf{L}_d^* \mathbf{A}_d^{*-1} \dots \mathbf{A}_2^{*-1} \mathbf{A}_1^* \mathbf{L}_1^* \mathbf{A}_1^{*-1}. \quad (12)$$

Тут D (P — SV -задача) та D^* (SH -задача) — характеристичні матриці всього n -шаруватого середовища на $(n+1)$ -півпросторі; D' , D'^* — характеристичні матриці середовища під джерелом (P — SV - та SH -задачі відповідно); D'' , D''^* — характеристичні матриці середовища над джерелом (P — SV - та SH -задачі відповідно).

У (7)—(12) входять матриці, що містять фізичні параметри i -го шару, а саме [Малицький, Хитряк, 2008]:

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta_i & \beta_i \\ \alpha_i & -\alpha_i & -1 & -1 \\ 2\mu_i \alpha_i & -2\mu_i \alpha_i & -\mu_i g_i & -\mu_i g_i \\ \mu_i g_i & \mu_i g_i & -2\mu_i \beta_i & 2\mu_i \beta_i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_i = \left[e^{kh_i \alpha_i}, e^{-kh_i \alpha_i}, e^{kh_i \beta_i}, e^{-kh_i \beta_i} \right], \quad \mathbf{L}_i^* = \left[e^{kh_i \beta_i}, e^{-kh_i \beta_i} \right],$$

$$\mathbf{A}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_i \beta_i & -\mu_i \beta_i \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де $\alpha = \pm \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{V_P^2}}$; $\beta = \pm \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{V_S^2}}$; $g = 1 + \beta^2$; h_i — потужність i -го шару; μ_i — модуль зсуву.

Розглянемо теоретичні основи отриманих нами модифікацій матричного методу, враховуючи той факт, що, наприклад, для SH -задачі немає потреби переходити до матриць вищого порядку.

Модифікації матричного методу для P — SV - і SH -задач. Надалі під товстими шарами розуміємо шари потужностей не меншого порядку, ніж 10^3 , а для тонких шарів — потужності порядку 10^2 і менші. Для побудови синтетичних сейсмограм для тонкошаруватої моделі ми розробили три модифікації матричного методу: з використанням характеристичної матриці над джерелом, під джерелом та рекурентний метод.

Для першого із вищенаведеного методів коефіцієнти $g_{1z}, g_{2z}, g_{3z}, g_{1r}, g_{2r}, g_{3r}$ [Малицький, Муйла, 2007] складаються із елементів матриці (7) і (11) порядку 4×4 . Для SH -випадку коефіцієнти $g_{5\phi}, g_{6\phi}$ містять елементи (8) і (12) порядку 2×2 . Цю модифікацію доцільно використовувати, якщо кількість шарів над джерелом значно менша від кількості шарів під джерелом, що зменшує вплив похибки обчислень на кінцевий розв'язок задачі та кількість обчислювальних затрат.

У матричному методі, що використовує характеристичні матриці під джерелом, вирази $g_{1z}, g_{2z}, g_{3z}, g_{1r}, g_{2r}, g_{3r}$ записуємо через елементи характеристичної матриці всього середовища та через матриці під джерелом (9) для задачі P — SV . Коефіцієнти $g_{5\phi}, g_{6\phi}$ SH -задачі складаються із елементів матриць (8) і (10). Якщо під джерелом є менша кількість шарів, рекомендується використовувати цю модифікацію.

Рекурентний метод дає можливість обчислювати поле переміщення на вільній поверхні без використання елементів характеристичних матриць. Члени, до яких входять елементи характеристичної матриці всього середовища, задаємо через рекурентні співвідношення, що наведені у статті [Малицький, Пак, 2004].

Три зазначені модифікації матричного методу у випадку P — SV -задачі дають змогу обчислювати поле переміщення на вільній поверхні шаруватого півпростору лише для тонкошару-

ватої моделі середовища. Проте у випадку *SH*-задачі ці модифікації можна використовувати з метою побудови поля переміщень для моделі із товстими шарами.

Чисельні розрахунки трьома методами дають ідентичні результати (рис. 1). Як приклад розглянуто модель середовища: три шари на півпросторі, для якої параметри третього шару та півпростору однакові.

Джерело сейсмічних хвиль представлено тензором сейсмічного моменту

$$M = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{13} & 2 \cdot 10^{13} & -2 \cdot 10^{13} \\ 2 \cdot 10^{13} & -6 \cdot 10^{13} & 7 \cdot 10^{13} \\ -2 \cdot 10^{13} & 7 \cdot 10^{13} & 5 \cdot 10^{13} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

розміщеним всередині третього шару на глибині $h_S = 390$ м (табл. 1).

Використовуючи програмний пакет MATLAB, одержуємо чисельні розрахунки хвильового поля, згідно з тензором (14) і даними табл. 1. Епіцентрально відстань 40 км, азимут $\varphi_a = 3\pi/5$.

На основі трьох розглянутих методів розроблено відповідні модифікації, що дають можливість обчислювати поле переміщення для комбінованих моделей середовища. Всі вони ґрунтуються на переході до матриць шостого порядку за схемою, що описана у [Молотков, 1984; Малицький, Хитряк, 2008].

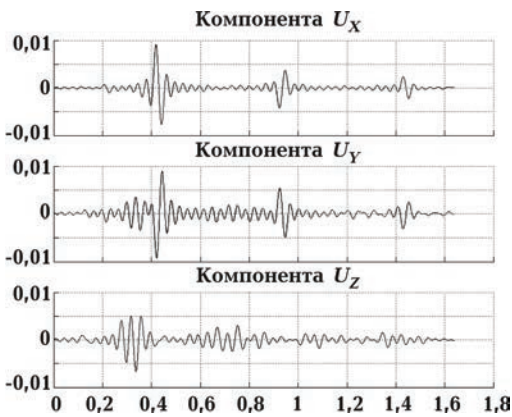
Для переходу від матриць четвертого порядку до матриць шостого порядку отримуємо співвідношення

$$B = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{31} \\ d_{12} & d_{32} \end{vmatrix} = \tilde{D}_{12}^{13} = \tilde{d}_{15}, \quad A = - \begin{vmatrix} d_{11} & d_{13} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix} = -\tilde{D}_{13}^{13} = -\tilde{d}_{11},$$

$$M = \begin{vmatrix} d_{14} & d_{11} \\ d_{34} & d_{31} \end{vmatrix} = D_{14}^{13} = \tilde{d}_{13}, \quad N = \begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = \tilde{D}_{23}^{13} = \tilde{d}_{14}; \quad (15)$$

$$\tilde{D} = \tilde{A}_{n+1}^{-1} \tilde{A}_n \tilde{L}_n \tilde{A}_n^{-1} \tilde{A}_{n-1} \tilde{L}_{n-1} \dots \tilde{A}_2^{-1} \tilde{A}_1 \tilde{L}_1 \tilde{A}_1^{-1}. \quad (16)$$

Відзначимо, що за формою характеристична матриця (16) є такою самою, як у випадку (7).



Т а б л и ц я 1. Модель середовища: три шари на півпросторі

Номер шару	V_P , м/с	V_S , м/с	h , м	$\rho \cdot 10^3$, кг/м ³
1	712	475	121	1,92
2	2674	1783	184	2,36
3	3280	2116	85	2,42
Пів-простір	3280	2116	∞	2,42

Рис. 1. Компоненти $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ поля переміщень на вільній поверхні для моделі середовища за даними табл. 1 і тензором сейсмічного моменту (14).

Відповідні коефіцієнти, які входять у співвідношення (5), мають вигляд

$$\begin{aligned}
 g_{1z} &= \left(-d''_{21} + \frac{-\tilde{d}_{11}}{\tilde{d}_{15}} d''_{31} + \frac{\tilde{d}_{13}}{\tilde{d}_{15}} d''_{41} \right) \frac{1}{2\pi \mu_d}, & g_{3z} &= \left(-d''_{23} + \frac{-\tilde{d}_{11}}{\tilde{d}_{15}} d''_{33} + \frac{\tilde{d}_{13}}{\tilde{d}_{15}} d''_{43} \right) \frac{1}{2\pi}, \\
 g_{2z} &= \left\{ - \left[d''_{22} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + d''_{23} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right] + \frac{-\tilde{d}_{11}}{\tilde{d}_{15}} \left[d''_{32} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + d''_{33} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-\tilde{d}_{13}}{\tilde{d}_{15}} \left[d''_{42} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + d''_{43} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right] \right\} \frac{1}{2\pi}, \\
 g_{1r} &= \frac{1}{2\pi \mu_S} \left(-d''_{11} + \frac{\tilde{d}_{14}}{\tilde{d}_{15}} d''_{31} + \frac{-\tilde{d}_{11}}{\tilde{d}_{15}} d''_{41} \right), & g_{3r} &= -\frac{1}{2\pi} \left(-d''_{13} + \frac{\tilde{d}_{14}}{\tilde{d}_{15}} d''_{33} + \frac{-\tilde{d}_{11}}{\tilde{d}_{15}} d''_{43} \right), \\
 g_{2r} &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ - \left[d''_{12} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + d''_{13} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right] + \frac{\tilde{d}_{14}}{\tilde{d}_{15}} \left[d''_{32} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + d''_{33} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-\tilde{d}_{11}}{\tilde{d}_{15}} \left[d''_{42} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + d''_{43} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right] \right\}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Ця модифікація дає змогу розрахувати поле переміщення для таких моделей середовища, у яких шари під джерелом товсті, а над джерелом — тонкі.

Для прикладу розглянемо модель середовища: сім шарів на півпросторі, для якої параметри четвертого та п'ятого шарів однакові (рис. 2, табл. 2).

Тензор сейсмічного моменту має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} 5,687 \cdot 10^{17} & 7,805 \cdot 10^{17} & 1,498 \cdot 10^{17} \\ 7,805 \cdot 10^{17} & 2,046 \cdot 10^{17} & 9,594 \cdot 10^{17} \\ 1,498 \cdot 10^{17} & 9,594 \cdot 10^{17} & 7,733 \cdot 10^{17} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Згідно з (18) і даними табл. 2, отримано три компоненти поля переміщення на вільній поверхні. Джерело сейсмічних хвиль розміщене всередині четвертого шару на глибині $h_S = 1924$ м, епіцентрально відстань — 19 км, азимут $\varphi_a = 0,84222$ рад.

У статті [Малицький, Хитряк, 2008] наведено формули для модифікації матричного методу з використанням характеристичної матриці всього середовища шостого порядку і характеристичної матриці під джерелом четвертого порядку. Цю модифікацію доцільно використовувати для обчислення поля переміщення у моделях, в яких над джерелом товсті шари, а під джерелом — тонкі.

Як приклад візьмемо модель середовища: сім шарів на півпросторі, параметри четвертого та п'ятого шарів однакові (рис. 3, табл. 3).

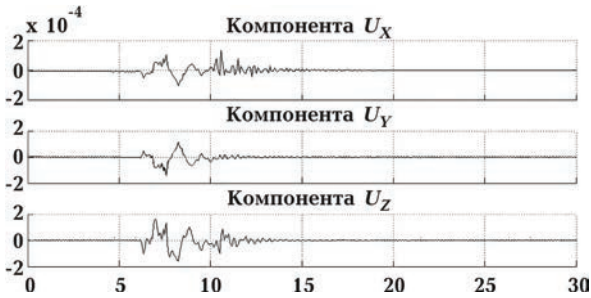


Рис. 2. Компоненти $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ поля переміщень на вільній поверхні для моделі середовища за даними табл. 2 і тензором сейсмічного моменту (18).

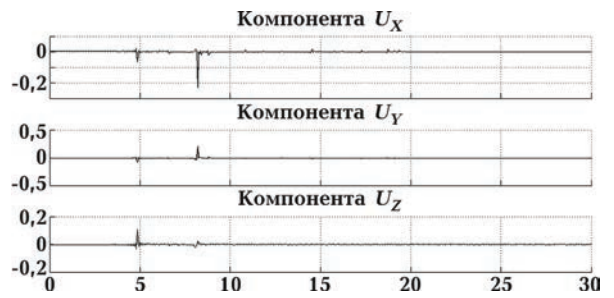


Рис. 3. Компоненти $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ поля переміщень на вільній поверхні для моделі середовища за даними табл. 3 і тензором сейсмічного моменту (18).

Т а б л и ц я 2. Модель середовища: сім шарів на півпросторі

Номер шару	V_P , м/с	V_S , м/с	h , м	$\rho \cdot 10^3$, кг/м ³
1	5000	3000	480	2,3
2	5300	3120	650	2,5
3	6300	3700	560	2,65
4	6400	3760	234	2,96
5	6400	3760	6530	2,96
6	6850	4020	7610	3,35
7	6980	4110	5500	3,46
Півпростір	7050	4190	∞	3,85

Т а б л и ц я 3. Модель середовища: сім шарів на півпросторі

Номер шару	V_P , м/с	V_S , м/с	h , м	$\rho \cdot 10^3$, кг/м ³
1	5000	3000	4800	2,3
2	5300	3120	6500	2,5
3	6300	3700	5600	2,65
4	6400	3760	2340	2,96
5	6400	3760	653	2,96
6	6850	4020	721	3,35
7	6980	4110	550	3,46
Півпростір	7050	4190	∞	3,85

Джерело сейсмічних хвиль розміщене всередині четвертого шару на глибині $h_d = 19\,240$ м (табл. 3). Епіцентральна відстань — 19 км, азимут $\varphi_a = 0,84222$ рад.

Для побудови поля переміщення на вільній поверхні півпростору з товстими шарами необхідно застосовувати модифікацію матричного методу, що передбачає використання характеристичних матриць всього середовища шостого порядку та комбінацію матриць над і під джерелом четвертого та шостого порядку відповідно. Така організація розв'язку прямої динамічної задачі сейсміки дає можливість будувати поле переміщення на вільній поверхні шаруватого півпростору для будь-якої кількості шарів довільних потужностей.

Виразимо коефіцієнти g_{1z} , g_{2z} , g_{3z} , g_{1r} , g_{2r} , g_{3r} через елементи характеристичної матриці над джерелом четвертого порядку (11) та характеристичних матриць під джерелом

$$\tilde{D}' = \left(\tilde{d}'_{ij} \right)_{i,j=1,4} = \tilde{A}_{n+1}^{-1} \tilde{A}_n \tilde{L}_n \tilde{A}_{n-1} \dots \tilde{A}_{d+1}^{-1} \quad (19)$$

і всього середовища (16) шостого порядку, які отримані із (7), (9) з використанням відповідної методики переходу [7]:

$$g_{1z} = \frac{d''_{21} \tilde{d}'_{15} + d_{31} \tilde{d}'_{11} + d''_{41} \tilde{d}'_{13}}{\tilde{d}_{15}} \frac{1}{2\pi \mu_s}, \quad g_{3z} = \frac{-d''_{11} \tilde{d}'_{11} - d''_{21} \tilde{d}'_{14} + d''_{41} \tilde{d}'_{16}}{\tilde{d}_{15}} \frac{1}{2\pi},$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{-d''_{11} \tilde{d}'_{15} - d''_{31} \tilde{d}'_{14} + d''_{41} \tilde{d}'_{12}}{\tilde{d}_{15}} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + \frac{-d''_{11} \tilde{d}'_{11} - d''_{21} \tilde{d}'_{14} + d''_{41} \tilde{d}'_{16}}{\tilde{d}_{15}} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right\} \frac{1}{2\pi}, \\
 g_{1r} &= \frac{-d''_{22} \tilde{d}'_{15} - d''_{32} \tilde{d}'_{11} - d''_{42} \tilde{d}'_{13}}{\tilde{d}_{15}} \frac{1}{2\pi \mu_S}, \quad g_{3z} = - \frac{d''_{12} \tilde{d}'_{11} + d''_{22} \tilde{d}'_{14} - d''_{42} \tilde{d}'_{16}}{\tilde{d}_{15}} \frac{1}{2\pi}, \\
 &= - \left\{ \frac{d''_{12} \tilde{d}'_{15} - d''_{32} \tilde{d}'_{14} - d''_{42} \tilde{d}'_{12}}{\tilde{d}_{15}} \frac{1}{\rho_S V_P^2} + \frac{d''_{12} \tilde{d}'_{11} + d''_{22} \tilde{d}'_{14} - d''_{42} \tilde{d}'_{16}}{\tilde{d}_{15}} \left(\frac{2V_S^2}{V_P^2} - 1 \right) \right\} \frac{1}{2\pi}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Як приклад побудуємо поле переміщення на вільній поверхні для моделі середовища: дев'ять шарів на півпросторі, для якої параметри п'ятого та шостого шарів однакові (рис. 4, табл. 4).

Для розрахунку хвильового поля використовуємо формули (5), (6), (20). Джерело сейсмічних хвиль розміщено всередині п'ятого шару на глибині $h_S = 30\,500$ м (див. табл. 1), заданий тензор сейсмічного моменту має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} 8,456 \cdot 10^{16} & -1,456 \cdot 10^{16} & 6,632 \cdot 10^{16} \\ -1,456 \cdot 10^{16} & 7,7563 \cdot 10^{16} & -2,778 \cdot 10^{16} \\ 6,632 \cdot 10^{16} & -2,778 \cdot 10^{16} & 5,257 \cdot 10^{16} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Епіцентрально відстань 30 км, азимут $\varphi_a = \pi/4$.

Т а б л и ц я 4. Модель середовища: десять шарів на півпросторі

Номер шару	V_P , м/с	V_S , м/с	h , м	$\rho \cdot 10^3$, кг/м ³
1	5000	$5000 / \sqrt{3}$	8500	2,3
2	5300	$5300 / \sqrt{3}$	5400	2,5
3	6300	$6300 / \sqrt{3}$	6300	2,65
4	6400	$6400 / \sqrt{3}$	6000	2,96
5	6950	$6950 / \sqrt{3}$	4300	3,35
6	6950	$6950 / \sqrt{3}$	5650	3,35
7	7400	$7400 / \sqrt{3}$	3200	3,65
8	7650	$7650 / \sqrt{3}$	4700	3,9
9	7970	$7970 / \sqrt{3}$	8700	4,21
10	8100	$8100 / \sqrt{3}$	3400	4,23
Півпростір	8770	$8770 / \sqrt{3}$	8	4,45

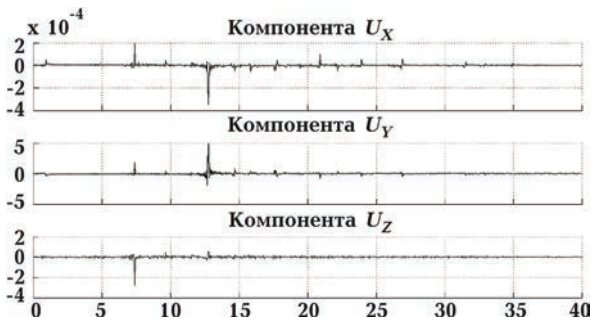


Рис. 4. Компоненти $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ поля переміщень на вільній поверхні для моделі середовища за даними табл. 4 і тензором сейсмічного моменту (21).

задачі. Залежно від моделі середовища запропоновано застосовувати той чи інший метод для моделювання хвильових полів. Зокрема, для тонкошаруватої моделі бажано використовувати матриці четвертого порядку, для моделі із товстими шарами слід переходити до матриць шостого порядку, для комбінованих моделей — методи, що містять матриці обох порядків.

Висновки. Розроблено математичні моделі для поширення сейсмічних хвиль у вертикально-неоднорідних середовищах і отримано строгі аналітичні співвідношення для хвильових полів на вільній поверхні від джерела у вигляді тензора сейсмічного моменту. Одержано нові строгі розв'язки для поля переміщень і здійснено їх інтерпретацію для дальньої зони. У матричному методі та різних його модифікаціях ці розв'язки можна успішно використовувати для аналізу сейсмічних характеристик полів і джерел. На основі теоретичних розрахунків розроблено комплекс прикладних програм для математичного моделювання хвильових процесів у шаруватому півпросторі. Кожна із розглянутих модифікацій є найефективнішою за певних обмежень на вхідні дані

Список літератури

- Малицький Д. В., Муйла О. О. Про застосування матричного методу і його модифікацій для дослідження поширення сейсмічних хвиль у шаруватому середовищі // Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики. — Київ, 2007. — С. 124—136.
- Малицький Д. В., Пак Р. М. Використання рекурентного методу для розв'язання задач сейсмології // Геофиз. журн. — 2004. — 26, № 6. — С. 168—173.
- Малицький Д., Хитряк О. Математичне моделювання хвильових процесів у шаруватому півпросторі з використанням матриць шостого порядку // Геоінформатика. — 2008. — № 4. — С. 44—48.
- Молотков Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. — Москва: Наука, 2001. — 348 с.
- Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. — Москва: Наука, 1984. — 201 с.
- Dunkin I. W. Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seismol. Soc. Amer. — 1965. — 55, № 2. — P. 335—358.
- Müller G. The reflectivity method: a tutorial // J. Geophysics. — 1985. — № 58. — С. 153—174.