

Математичне моделювання хвильових полів у шаруватих середовищах із додатковими напруженнями

© Д. В. Малицький¹, А. Ю. Павлова¹, В. Ф. Чекурін², 2012

¹Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, Львів, Україна

²Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів, Україна

Надійшла 7 вересня 2011 р.

Представлено членом редколегії О. В. Кендзерю

Рассмотрена модель вертикально-неоднородной среды, когда один или несколько слоев находится под дополнительным напряжением. Дан анализ результатам исследования влияния гидростатического сжатия, действующего в одном из слоев горизонтально-слоистой структуры, на волновое поле, возбужденное точечным импульсным сейсмическим источником, который представлен тензором сейсмического момента и локализован в изотропном слое. Для решения задачи предложено применение матричного метода Томсона — Хаскелла при построении поля перемещения с целью использовать соответственные аналитические соотношения для решения обратной задачи по тензору напряжения или/и параметров источника. Полученные результаты математического моделирования просты в использовании и могут применяться для интерпретации сейсмических записей.

We consider the model of a vertically inhomogeneous medium, when one or more layers are under more stress. We analyzed the results of research of influence of hydrostatic pressure acting in one of the layers of horizontally-layered structure of the wave field excited by pulse point seismic source, which is represented by seismic moment tensor localized in the isotropic layer. We suggested to use the matrix method of Thomson — Haskell for solving the problem to build field movements in order to use relevant analytical relations for solving the inverse problem in respect of stress tensor and/or parameters of the source. The results of mathematical modelling are simple in utilization and can be used for interpretation of seismic records.

Вступ. Відомо багато робіт вітчизняних і закордонних учених [Аки, Ричардс, 1983; Молотов, 1984; Пустовитенко, 2004; Малицький, Муйла, 2007; Малицький, 2010] стосовно математичного моделювання як одного із основних інструментів для аналізу та інтерпретації хвильових полів. Із підходів, які широко використовують у геофізиці, зокрема в сейсмології, можна виділити методи числові (методи скінченних різниць і скінченних елементів), матричний, рефлексивний, променевий та ін. Використання числових методів для моделювання поширення сейсмічних хвиль у неоднорідних середовищах дає досить високу точність результатів, але вимагає покриття сіткою всієї області, зайнятої досліджуванним об'єктом, а також значних обсягів оперативної пам'яті, тривалого часу розрахунку і програм для розв'язування систем алгебричних рівнянь великої розмірності. Тому актуальною є проблема розробки і використання нових теоре-

тичних підходів і методів до математичного моделювання поширення сейсмічних хвиль у неоднорідних середовищах і застосування результатів прямої динамічної задачі сейсмології для визначення та інтерпретації параметрів досліджуваного середовища або/ї характеристик джерела. Такі методи і підходи мають ґрунтуватися на використанні сучасних уявлень про особливості формування вогнищевих зон і геологічної структури, в яких поширюються сейсмічні хвилі. Для розробки цих підходів і методів необхідне виконання широкого кола математичних, фізичних, алгоритмічних, програмних та інших задач, націлених на комплексний аналіз геофізичних і сейсмічних даних, що забезпечить розв'язок як прямих, так і обернених динамічних задач.

Модель горизонтально-шаруватого середовища широко використовують для математичного моделювання та інтерпретації геофізичних даних у сейсмо- та електророзвідці.

Подібна модель дає змогу будувати алгоритми розв'язку прямих задач, які легко реалізуються на комп'ютері і потребують порівняно мало часу для обрахунків. За допомогою цих алгоритмів розв'язують прямі задачі, які потребують великої кількості розв'язків. Значний внесок у розуміння процесів поширення хвиль у шаруватих середовищах, у розвиток методів обрахунку зробили Л. М. Бреховських [1973], Л. А. Молотков [1984], Г. І. Петрашень [1952; Петрашень и др., 1982], Ю. В. Різненченко [1947].

Важливою задачею геофізики, в тому числі сейсмології, є визначення поля переміщень на земній поверхні, коли один або декілька шарів перебувають під додатковим напруженням, яке будемо представляти тензором напружень. Ця задача є актуальною для прикладної і розвідувальної геофізики під час моделювання поля переміщень навколо свердловин. Наприклад, у праці [Аки, Ричардс, 1983] компоненти переміщень виражено через тензор напружень і фізичні параметри однорідного шару. Однак подібні задачі мають кінематичний характер. Тому постає питання розв'язання задачі математичного моделювання процесів поширення сейсмічних хвиль у шаруватому середовищі для вектора переміщень як функції часу, коли частина середовища перебуває під додатковим напруженням.

Параметри пружних збурень істотно залежать від структури і властивостей середовища. Отже, збуджуючи пружні хвилі в такому середовищі та вимірюючи зумовлені ними переміщення у визначених точках, наприклад, на вільній поверхні об'єкта, можна отримати апостеріорну інформацію щодо його внутрішньої будови. Цю властивість використовують, зокрема, у прикладній геофізиці для визначення будови горизонтально-шаруватих геологічних структур [Аки, Ричардс, 1983].

Теорія матричного методу. Статичні напруження змінюють швидкості поширення пружних збурень у твердих тілах, а відтак, можуть впливати на картину хвильового поля. Незважаючи на те, що зміни пружних властивостей і густини мас твердих тіл під дією напружень доволі малі, вони можуть істотно впливати на інтерференційні картини полів пружних збурень. За певних умов це явище можна було б використати для дистанційного визначення напружень у шарах геологічних структур. Тому кількісна оцінка впливу початкових напружень у геологічних структурах на інтерференцію хвильових полів має важливе значення. У статті

досліджено вплив гідростатичного тиску, що діє в одному із шарів горизонтально-шаруватої структури, на хвильове поле, збуджене точковим імпульсним сейсмічним джерелом, яке представлено тензором сейсмічного моменту і є локалізованим у ізотропному шарі. Зазначимо, що сейсмічне джерело може бути розподіленим у часі, тобто кожна компонента сейсмічного тензора залежить від часу, але є точковою у просторі.

Методика дослідження ґрунтується на розв'язуванні прямої задачі поширення пружних хвиль у напівнескінченному горизонтально-шаруватому середовищі з використанням матричного методу Томсона—Хаскела [Молотков, 1984; Малицький, Муйла, 2007] та кількісному аналізу часових залежностей компонент вектора переміщень на поверхні півпростору.

Автори статті пропонують використання матричного методу Томсона—Хаскела для побудови поля переміщень з метою застосування відповідних аналітичних співвідношень для розв'язання оберненої задачі за тензором напружень або/і параметрів джерела. Для використання зазначеного методу наведемо такі судження. Вважаємо, що середовище промодельовано пачкою однорідних ізотропних шарів із паралельними межами, за винятком тих шарів, які перебувають під додатковим напруженням. Джерело сейсмічних хвиль представлено тензором сейсмічного моменту, що містить шість незалежних компонент. Подібний тип вогнища активно використовують у геофізиці й сейсмології. На межах між шарами виконуються умови жорсткого контакту (неперервність переміщень і напружень). Земна поверхня є вільною від напружень. Джерело хвиль розміщено всередині ізотропного шару на визначеній глибині $z=z_s$. Хвилі із нижнього півпростору ($n+1$) не повертаються (умова випромінювання), додатковим напруженням є гідростатичний стиск у шарі, наприклад в i -му, який розміщено нижче дії джерела (рис. 1).

Тоді в циліндричній системі координат поле переміщень на земній поверхні такого середовища визначено у вигляді [Малицький, 2010]

$$\begin{aligned}
 u_z^{(0)}(r, \varphi_a, t) = & \\
 = & \int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_1(k, \eta, \varphi_a) g_{1z} e^{k\eta} d\eta + \\
 + & \int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_2(k, \eta, \varphi_a) g_{2z} e^{k\eta} d\eta +
 \end{aligned}$$

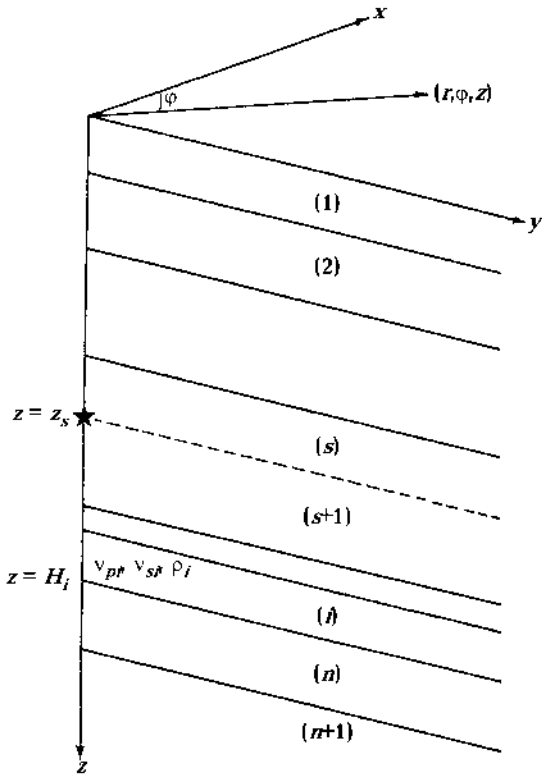


Рис. 1. Модель вертикально-неоднорідного середовища.

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_3(k, \eta, \varphi_a) g_{3z} e^{k\eta} d\eta, \\
 & u_r^{(0)}(r, \varphi_a, t) = \\
 & = \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_1(k, \eta, \varphi_a) g_{1r} e^{k\eta} d\eta + \\
 & + \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_2(k, \eta, \varphi_a) g_{2r} e^{k\eta} d\eta + \\
 & + \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_3(k, \eta, \varphi_a) g_{3r} e^{k\eta} d\eta, \\
 & u_\varphi^{(0)}(r, \varphi_a, t) = \\
 & = \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_5(k, \eta, \varphi_a) g_{5\varphi} e^{k\eta} d\eta + \quad (1) \\
 & + \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr)}{2\pi j} dk \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} M_6(k, \eta, \varphi_a) g_{6\varphi} e^{k\eta} d\eta.
 \end{aligned}$$

Параметри $g_{1z}, g_{2z}, \dots, g_{6\varphi}$ виразів (1) визначено через елементи характеристичної матриці всього середовища D ($P-SV$ -випадає) і D^* (SH -випадає) і характеристичної матриці всього середовища над джерелом $D_{s,1}^{-1}$ і $D_{s,1}^{*-1}$ [Малицький, Муйла, 2007]:

$$\begin{aligned}
 D &= A_{n+1}^{-1} A_n L_n A_n^{-1} A_{n-1} L_{n-1} \dots A_2^{-1} A_1 L_1 A_1^{-1}, \\
 D^* &= A_{n+1}^* A_n^* L_n^* A_n^{*-1} A_{n-1}^* L_{n-1}^* \dots A_2^* A_1^* L_1^* A_1^{*-1}, \\
 D_{s,1}^{-1} &= (d_{ij}^*) = A_s^{-1} L_s A_s A_{s-1}^{-1} L_{s-1}^{-1} A_{s-1} \dots A_1^{-1} L_1^{-1} A_1, \\
 \tilde{F}^{(j)} &= D_{s,1}^{-1} \cdot F^{(j)} = (\tilde{F}_1^{(j)}, \tilde{F}_2^{(j)}, \tilde{F}_3^{(j)}, \tilde{F}_4^{(j)})^T,
 \end{aligned}$$

і мають вигляд

$$\begin{aligned}
 g_{1z} &= \left(-d_{21}'' + \frac{A}{B} d_{31}'' + \frac{M}{B} d_{41}'' \right) \frac{1}{2\pi\mu_s}, \\
 g_{2z} &= \left\{ - \left[d_{22}'' \frac{1}{\rho_s V_p^2} + d_{23}'' \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{A}{B} \left[d_{32}'' \frac{1}{\rho_s V_p^2} + d_{33}'' \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{M}{B} \left[d_{42}'' \frac{1}{\rho_s V_p^2} + d_{43}'' \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right] \right\} \frac{1}{2\pi}, \\
 g_{3z} &= \left(-d_{23}'' + \frac{A}{B} d_{33}'' + \frac{M}{B} d_{43}'' \right) \frac{1}{2\pi}, \\
 g_{1r} &= \frac{1}{2\pi\mu_s} \left(-d_{11}'' + \frac{N}{B} d_{31}'' + \frac{A}{B} d_{41}'' \right), \\
 g_{2r} &= -\frac{1}{2\pi} \left\{ - \left[d_{12}'' \frac{1}{\rho_s V_p^2} + d_{13}'' \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{N}{B} \left[d_{32}'' \frac{1}{\rho_s V_p^2} + d_{33}'' \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{A}{B} \left[d_{42}'' \frac{1}{\rho_s V_p^2} + d_{43}'' \left(\frac{2V_s^2}{V_p^2} - 1 \right) \right] \right\}, \\
 g_{3r} &= -\frac{1}{2\pi} \left(-d_{13}'' + \frac{N}{B} d_{33}'' + \frac{A}{B} d_{43}'' \right), \\
 g_{5\varphi} &= \left(-d_{11}^{*''} - \frac{d_{12}^{*''}}{d_{11}^{*''}} d_{21}^{*''} \right) \frac{1}{2\pi\mu_s}, \\
 g_{6\varphi} &= \left(-d_{12}^{*''} - \frac{d_{12}^{*''}}{d_{11}^{*''}} d_{22}^{*''} \right) \frac{1}{4\pi}.
 \end{aligned}$$

Тут k — горизонтальна компонента хвильового числа; η — змінна Мелліна; φ_a — азимут; J_0, J_1 — функції Бесселя нульового і першого порядків; ρ — густина.

У співвідношеннях для поля переміщень (1) введено також величини [Малицький, Муйла, 2007]

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_{xz} \cos \varphi_a + M_{yz} \sin \varphi_a, \\
 M_2 &= M_{zz},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3 &= M_{xx} \cos^2 \varphi_a + M_{yy} \sin^2 \varphi_a + M_{xy} \sin 2\varphi_a, \\
 M_4 &= -M_{xx} \cos 2\varphi_a + M_{yy} \cos 2\varphi_a - 2M_{xy} \sin 2\varphi_a, \\
 M_5 &= M_{yz} \cos \varphi_a - M_{xz} \sin \varphi_a, \\
 M_6 &= M_{xx} \sin 2\varphi_a - M_{yy} \sin 2\varphi_a - 2M_{xy} \cos 2\varphi_a, \\
 H_s &= h_1 + h_2 + \dots + h_s, \\
 \alpha &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{V_p^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{V_s^2}},
 \end{aligned}$$

де V_{pj}, V_{sj} — швидкості поширення поздовжньої і поперечної хвиль, які визначено для всіх шарів, крім i -го, у вигляді

$$\begin{aligned}
 V_{pj} &= \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}}, \quad V_{sj} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}, \\
 A_j &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta_j & \beta_j \\ \alpha_j & -\alpha_j & -1 & -1 \\ 2\mu_j \alpha_j & -2\mu_j \alpha_j & -\mu_j g_j & -\mu_j g_j \\ \mu_j g_j & \mu_j g_j & -2\mu_j \beta_j & 2\mu_j \beta_j \end{pmatrix}, \\
 L_i &= \begin{bmatrix} e^{kh_j \alpha_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-kh_j \alpha_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{kh_j \beta_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-kh_j \beta_j} \end{bmatrix}, \\
 A_j^* &= \begin{pmatrix} \beta_j & -\beta_j \\ \mu_j \beta_j^2 & \mu_j \beta_j^2 \end{pmatrix}, \\
 L_j^* &= \begin{pmatrix} e^{kh_j \beta_j} & 0 \\ 0 & e^{-kh_j \beta_j} \end{pmatrix}, \quad g_j = 1 + \beta_j^2.
 \end{aligned}$$

Розрахунок впливу гідростатичного стиску. Зважаючи на те, що шар i (рис. 1) перебуває під дією гідростатичного стиску P , його фізичні параметри (швидкості поширення хвиль поздовжньої C_T і поперечної C_L) визначено у такий спосіб [Tian et al., 2008]:

$$\begin{aligned}
 C_T^2 &= \frac{\mu_0 + \left(m - \frac{1}{6}n\right) \frac{P}{K}}{\rho_0 \left(1 + \frac{P}{K}\right)} = C_T^{02} \frac{1 + \frac{m - \frac{1}{6}n}{\mu_0} \frac{P}{K}}{1 + \frac{P}{K}}, \quad (2) \\
 C_L^2 &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0 + \left(2l + \frac{4}{3}m\right) \frac{P}{K}}{\rho_0 \left(1 + \frac{P}{K}\right)} = C_L^{02} \frac{1 + \frac{2l + \frac{4}{3}m}{\lambda_0 + 2\mu_0} \frac{P}{K}}{1 + \frac{P}{K}},
 \end{aligned}$$

де l, m, n — коефіцієнти Мурнагана.

Розглянемо моделювання хвильових полів для середовища (див. таблицю).

Параметри середовища

V_p , м/с	V_s , м/с	ρ , 10^3 кг/м ³	h , м
2500	2000	2,00	4000
3100	2400	2,30	3000
3100	2400	2,30	3000
3790	2621	2,65	4000
4100	2750	2,75	3000
4200	2800	3,80	—

Вважаємо, що джерело сейсмічних хвиль розміщено в другому шарі на глибині 7000 м, а фізичні параметри другого і третього шарів однакові (див. таблицю). Нехай четвертий шар перебуває під дією гідростатичного стиску і швидкості поширення поздовжньої і поперечної хвиль визначено за формулами (2). Крім того, додаткові параметри для цього шару мають такі значення, ГПа: $\lambda=1,67$; $\mu=18,2$; $l=-3371$; $m=-6742$; $n=-6600$. Значення гідростатичного стиску P змінювалось у межах від 0 до 20 МПа. Зазначимо, що джерело сейсмічних хвиль представлено тензором сейсмічного моменту M_{ij} . У наведеному прикладі розглянемо такі випадки дії джерела:

- 1) всі компоненти сейсмічного тензора нульові, крім $M_{zz}=(1,7409265)10^{14}$ Н·м;
- 2) всі недіагональні компоненти сейсмічного тензора нульові, а діагональні такі: $M_{xx}=M_{yy}=M_{zz}=(1,7409265)10^{14}$ Н·м.

Одержані хвильові поля для поля переміщень на епіцентральної відстані $r=5000$ м показано для першого випадку на рис. 2, для другого — на рис. 3 з використанням співвідношень (1), (2) для різних значень гідростатичного стиску.

Зрозуміло, що прямі P - і S -хвилі мають однакові часи вступу, їх форма імпульсів також однакова для різних значень гідростатичного стиску, що і має бути, оскільки шар i знаходиться нижче вогнища землетрусу. Проаналізувавши хвильові поля (рис. 2 і 3), можна дійти висновку, що додатковий гідростатичний стиск у шарі, що перебуває під джерелом сейсмічних хвиль, не впливає на прямі P - і S -хвилі і несуттєво впливає на обмінні ефекти. Обмінні хвилі, які вступають пізніше, мають різний час вступу, а також дещо різну форму імпульсів (рис. 4, 5).

Висновок. Використано матричний метод Томсона—Хаскела з метою побудови поля переміщення для середовища, яке можна промоделювати пачкою однорідних ізотропних шарів із паралельними межами, за винятком i -го шару, який перебуває під додатковим напруженням. Джерело сейсмічних хвиль представлено тензором сейсмічного моменту M_{ij} . На

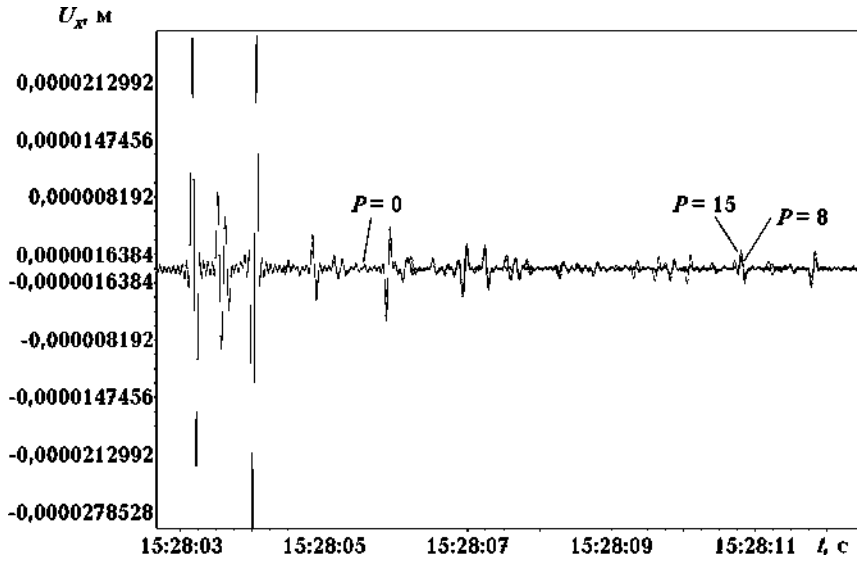


Рис. 2. Хвильові поля для першого випадку: $M_{zz}=1,7409265 \cdot 10^{14}$ Н·м за різних значень гідростатичного стиску P (МПа).

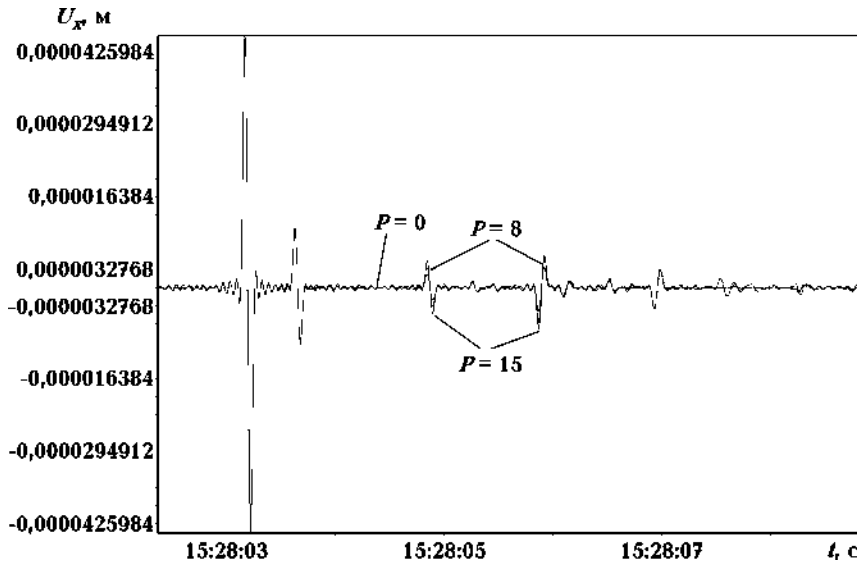


Рис. 3. Хвильові поля для другого випадку: $M_{xx}=M_{yy}=M_{zz}=1,7409265 \cdot 10^{14}$ Н·м для різних значень гідростатичного стиску P (МПа).

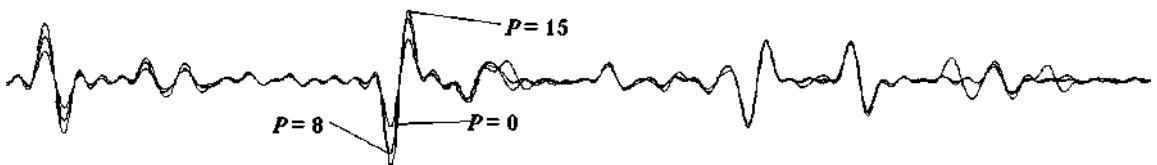


Рис. 4. Обмінні хвилі в першому випадку: $M_{zz}=1,7409265 \cdot 10^{14}$ Н·м для різних значень гідростатичного стиску P (МПа).

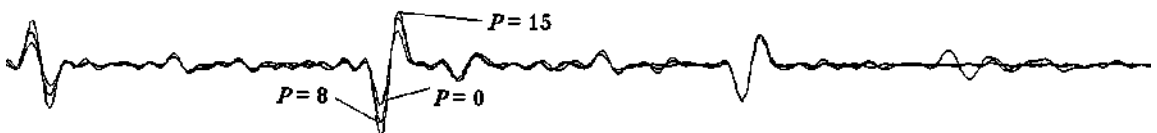


Рис. 5. Обмінні хвилі в другому випадку: $M_{xx}=M_{yy}=M_{zz}=1,7409265 \cdot 10^{14}$ Н·м для різних значень гідростатичного стиску P (МПа).

прикладі розглянутих двох випадків дії джерела одержано прогнозований результат. Оскільки i -й шар розміщено нижче вогнища землетрусу, для різних значень гідростатичного стиску прямі P - і S -хвилі мають однакові часи вступу, а також форми імпульсів. Аналіз одержаних результатів дає змогу стверджувати, що шар, який перебуває під гідростатичним стиском,

впливатиме на обмінні ефекти. На зображених сейсмограмах чітко видно, що обмінні хвилі мають різний час вступу, а також дещо різну форму імпульсів для різних значень гідростатичного стиску. Складніший випадок впливу тензора початкових напружень на хвильове поле на вільній поверхні шаруватого півпростору буде досліджено у подальших роботах.

Список літератури

- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. — Москва: Мир, 1983. — Т. 1. — 520 с; Т. 2. — 360.
- Бреховских А. М. Волны в слоистых средах. — Москва: Наука, 1973. — 343 с.
- Малицький Д. В. Аналітично-числові підходи до обчислення часової залежності компонент тензора сейсмічного моменту // Геоінформатика. — 2010. — 1. — С. 79—86.
- Малицький Д. В., Муйла О. О. Моделювання хвильових полів, збурених ефективно-точковою дислокацією // Вісн. КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. Геологія. — 2007. — Вип. 41. — С. 25—29.
- Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых, упругих и жидких средах. — Москва: Наука, 1984. — 880 с.
- Петрашень Г. И. Распространение упругих волн в слоистых изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями // Учен. зап. Ленингр. горн. ун-та. — 1952. — № 162, вып. 25. — С. 3—189.
- Петрашень Г. И., Молотков Л. А., Крауклис П. В. Волны в слоистых однородных изотропных средах. — Ленинград: Наука, 1982. — 289 с.
- Пустовитенко Б. Г. Форосское землетрясение 18 октября 1998 года, $M_s=4,3$, $I_0=5$ (Крым) // Землетрясения Северной Евразии в 1998 году. — Обнинск: ГС РАН, 2004. — С. 240—248.
- Ризниченко Ю. В. Геометрическая сейсмика слоистых сред // Тр. Ин-та теор. геофизики. — 1947. — 1.
- Tian J., Man Yu., Xie Z., Iq H. Influence of stress on elastic wave velocity around a borehole in rocks // The 14th World conf. on Earthquake Engineering-2008.