

## Синтез линейной и нелинейной постановок обратной задачи в гравиразведке и магниторазведке

© П. И. Балк<sup>1</sup>, А. С. Долгаль<sup>2</sup>, Л. А. Христенко<sup>3</sup>, 2011

<sup>1</sup>Берлин, ФРГ

<sup>2</sup>Горный институт УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>3</sup>Пермский госуниверситет, Пермь, Россия

Поступила 4 апреля 2011 г.

*Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко*

Запропоновано новий підхід до спільної оцінки фізичних і геометричних параметрів геологічних об'єктів за результатами вимірювань гравітаційного (або магнітного) поля. Підхід ґрунтується на ідеї модифікації монтажного методу розв'язку нелінійної оберненої задачі "рудного" типу заміною припущення про відомі точні значення густини (намагніченості) тіл на інтервальну форму задавання допустимих значень петрофізичних параметрів, що більшою мірою відповідає геофізичній практиці. Наведено алгоритм побудови окремих прийнятних варіантів інтерпретації, який може стати елементом більш загальної технології, що реалізує концепцію гарантованого підходу і полягає в пошуках геологічно змістовних інваріантів на множині всіх допустимих розв'язків оберненої задачі.

We suggest a new approach to the combined estimator of physical and geometric parameters of geological objects by the results of gravimetric (or magnetic) field measurements. The idea to modify the assembly method for solving nonlinear inverse problem of "ore type" by the exchange of the assumption about known exact values of the object density (magnetization) for an interval form of the permissible value assignment for petrophysical parameters underlie this approach and is more adequate to geophysical practice. The algorithm of the construction of single reasonable interpretation variants represented in this article may become the element of more general technology. This technology realizes the concept of the guaranteed approach and consists in the search of geological substantial invariants on the set of all feasible solutions of the inverse problem.

**Введение.** В математике обратные задачи подразделяются на линейные и нелинейные в соответствии с типом оператора прямой задачи [Старостенко, 1978; Тихонов и др., 1995]. В геофизике к линейным обратным задачам обычно относят те из них, где оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным — обратные задачи, в которых искомыми являются их геометрические параметры [Блох, 1998; Булах, 2010]. За некоторым исключением (как, например, при изучении границы между толщиной осадочных пород с экспоненциальным законом изменения плотности с глубиной и кристаллическим фундаментом [Авчан, Озерская, 1968; Балк

и др., 1988]) математический и геофизический принципы деления обратных задач на два класса эквивалентны. Предлагается также брать за основу при классификации степень сложности строения изучаемого объекта [Гравиразведка, 1981]. При такой классификации обратные задачи подразделяются на три типа: рудные (источники поля — локальные объекты в однородной вмещающей среде), структурные (источник поля — субгоризонтально-слоистая среда), а также обратные задачи со сложным распределением масс, представляющим комбинацию рудных и структурных элементов.

Любая классификация призвана рассортировать все известные постановки обратных за-

дач по отдельным подмножествам (классам), в которые вошли бы однотипные задачи, близкие как по степени сложности, так и по методам, необходимым для их решения. В настоящее время известны два основных направления развития математических методов интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки. Одно из них ориентировано на задачу оценки физических, другое — на задачу оценки геометрических параметров источников поля.

Как известно, горные породы — это сложные гетерогенные образования. Сложенные ими геологические тела являются, согласно современным представлениям, неоднородными по физическим характеристикам мультифрактальными объектами [Кобрунов, 2008], так как петроплотностные и петромагнитные характеристики однородных по вещественному составу объектов далеко не всегда константы. Например, намагниченность однородных по составу магнитовозмущающих тел, обладающих высокой магнитной восприимчивостью, зависит от их формы и может быть различной для отдельных фрагментов таких тел [Миков, 1975]. Иначе говоря, в реальных условиях интерпретации неопределенность значений физических параметров — это неотъемлемый атрибут любой постановки обратной задачи, даже если сами значения физических параметров при этом играют роль мешающих факторов. Постоянную плотность (намагниченность), фигурирующую во многих известных постановках обратных задач, следует, скорее всего, рассматривать как некое условное "среднее" значение физического параметра, порождающее приблизительно то же самое поле, что и неизвестное истинное. Существование такого "среднего" значения обеспечивает фактор  $\epsilon$ -эквивалентности. Но если подобная идеализация и допустима, то безошибочно установить априори это "среднее" значение невозможно по нескольким причинам, в числе которых различие физических свойств горных пород, определенных на образцах и в естественном залегании [Вахромеев, Давыденко, 1987]. Можно добавить, что в настоящее время — как в Украине, так и в России — резко сократились объемы буровых работ и петрофизических исследований. Таким образом, отказ от предпосылки об известных точных значениях физических параметров следует рассматривать как едва ли не обязательный элемент любой постановки обратной задачи, претендующей на адекватность реалиям геофизической практики.

Попытки создания алгоритмов решения обратных задач с неполной априорной информацией как о геометрических, так и о физических параметрах аномалиеобразующих тел (будем называть такие задачи смешанными), на основе классических методов условной минимизации уже предпринимались [Майер и др., 1985], но обнаружилось, что такие алгоритмы не в состоянии учесть весь объем априорной информации, имеющейся в распоряжении интерпретатора. Неоднородность пространства оптимизируемых параметров, имеющих различный физический смысл и размерность, только усугубляла ситуацию. Не случайно, что известные автоматизированные технологии интерпретации гравиметрических и магнитных данных в смешанных постановках представляют собой крупноблочные итерационные схемы, в которых процедура уточнения физических параметров (при закрепленных геометрических параметрах) и геометрических параметров (при фиксированных физических параметрах) поочередно сменяют друг друга [Булах, 2010].

В статье применительно к задачам рудного типа предлагается не практиковавшийся ранее подход к совместной оценке физических и геометрических параметров геологических объектов по результатам измерений гравитационного (или магнитного) поля. В его основе лежит идея модификации монтажного метода решения нелинейной обратной задачи "рудного" типа за счет замены предположения об известных точных значениях плотности (намагниченности) тел на более слабое условие, по которому информация о петрофизических параметрах носит размытый характер, что, как отмечалось, в большей степени соответствует реалиям геофизической практики.

**Постановка задачи.** Для определенности будем вести изложение в терминах обратной задачи гравиметрии. Пусть аномалия гравитационного поля  $\Delta \hat{g}$  задана своими приближенными значениями  $\Delta \tilde{g}_i = \Delta \hat{g}(X_i) + \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , на множестве точек  $X_i$  произвольного рельефа и обусловлена массами, распределенными с избыточными плотностями  $\delta_k > 0$  по  $K$  связным односвязным объемам (парциальным носителям)  $\bar{S}_k \in \mathbf{R}^3$ , а априорные сведения о свойствах помех  $\xi_i$ , векторе плотностей  $\bar{\delta} = (\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_K)$ , пространственном расположении и геометрии тел  $\bar{S}_k$  содержат неопределенность, свойственную практическим постановкам задач количественной интерпретации геофизических данных. Конкретизируем условия задачи.

1. Априори задано количество  $K$  аномалиеобразующих тел  $\hat{S}_k$ .

2. Парциальные носители масс  $\hat{S}_k, k = 1, 2, \dots, K$ , являются предположительно ограниченными связными односвязными множествами в  $\mathbf{R}^3$ .

3. Указаны области  $D_k$  геологического пространства, заведомо содержащие аномалиеобразующие тела (по сравнению со скалярными оценками минимальной и максимальной глубин погружения верхней и нижней кромок тел включения  $\hat{S}_k \subset D_k$  выглядят более привлекательно).

4. Известны (или предположительно могут быть заданы интерпретатором) отдельные фрагменты  $S_k^+ \subset \hat{S}_k, k = 1, 2, \dots, K$ , изучаемых тел.

5. Могут быть указаны некоторые области  $S_k^- \subset D_k$ , заведомо не содержащие фрагменты изучаемых тел:  $S_k^- \cap \hat{S}_k = \emptyset, k = 1, 2, \dots, K$ .

6. Допустимые варианты контактирования отдельных аномалиеобразующих тел заданы с помощью бинарной квадратной матрицы  $\Lambda$  с элементами  $\lambda_{r,t}, r, t = 1, 2, \dots, K: \lambda_{r,t} = 1$  — парциальные носители  $S_r$  и  $S_t$  могут иметь общую границу, в противном случае  $\lambda_{r,t} = 0$ .

7. Требование отсутствия общих кусков границы у отдельных пар  $(i, j)$  носителей масс  $\hat{S}_i$  и  $\hat{S}_j$  может быть дополнено ограничением на минимально допустимое расстояние  $\rho_{i,j}$  между ними:  $\rho(\hat{S}_i, \hat{S}_j) \geq \rho_{i,j}$ .

Априорные представления интерпретатора о сложности границ тел  $\hat{S}_k$  выражены в терминах гладкости этих границ.

8. Точные значения  $\delta_k$  плотностей неизвестны, однако с высокой степенью достоверности можно задать диапазоны их возможных значений:

$$\delta'_k \leq \delta_k \leq \delta''_k, k = 1, 2, \dots, K.$$

9. Закон распределения суммарной помехи  $\xi$  в измерениях  $\Delta \tilde{g}_i$  (или хотя бы точные значения ее отдельных вероятностных характеристик) не известен, зато можно указать двусторонние ограничения на норму помехи:

$$\varepsilon_{\min} \leq \|\xi\| \leq \varepsilon_{\max}.$$

Сформулировать условия задачи недостаточно. Необходимо определиться в вопросе, что считать приемлемым решением обратной задачи и каким будет критерий состоятельности алгоритма.

Авторы едины во мнении, что в условиях объективного существования множества  $G$  допустимых решений обратной задачи понятие "оптимальности" теряет смысл, поскольку

ку без информации о вероятностных свойствах помех все допустимые решения равноправны и в качестве результата интерпретации с одинаковым успехом может выступать любое из них. Как ни парадоксально, но  $\varepsilon$ -эквивалентность (как деструктивный фактор в вопросе достижения требуемого качества интерпретации) в этом случае выступает "союзником", упрощая поиск одного из допустимых решений — чем шире множество  $G$ , тем легче "выйти" на любой из его элементов. Это дает возможность применять упрощенные и экономичные в вычислительном плане технологии поиска. Состоятельность алгоритма заключается не только в способности "выйти" на допустимое решение обратной задачи, но и идентифицировать построенное решение как приемлемое. Однако если проверить решение на предмет его допустимости не составляет проблемы, то на предмет оптимальности — уже не всегда просто (например, когда это условие глобального минимума невязки).

**Необходимые сведения о монтажном подходе.** Предваряя описание предлагаемого метода, напомним вкратце, что собой представляет монтажный подход. Его можно определить как специализированный физически оправданный и геологически содержательный подход к решению условно-экстремальных задач, возникающих при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в сложных условиях, характеризующихся наличием разнородной априорной информации о строении изучаемой геологической среды. С момента первых публикаций В. Н. Страхова и М. И. Лапиной [Страхов, Лапина, 1976], а также А. В. Овчаренко [Овчаренко, 1975], он получил заметное развитие (библиография в [Балк, 2000]). Появилась потребность в дополнительных обозначениях и более строгих понятиях, необходимых при изложении новых модификаций монтажного метода.

Пусть  $\mu$  — мера Лебега в пространстве  $\mathbf{R}^3$ . Скажем, что упорядоченное конечное семейство  $T$  замкнутых связных односвязных подмножеств  $T_n \subset \mathbf{R}^3, \mu(T_n) > 0, n \in N_0 \subseteq \mathbf{N}$ , образует замощение множества  $S \subset \mathbf{R}^3$ , а  $T_n$  — элементы этого замощения, если  $\mu(T_i \cap T_j) = 0$  для всех  $i, j \in N_0 (i \neq j)$  и  $S \subseteq \bigcup_{n \in N_0} T_n$

(в простейшем случае их роль могут играть правильные геометрические фигуры). Систему  $A$ , составленную из всевозможных объединений  $\Omega_m$  элементов  $T_n$ , назовем классом конфигураций на заданном замощении  $T$ . В

монтажном методе система  $A$  выполняет роль модельного класса, элементами  $\Omega_m$  которого аппроксимируются неизвестные носители  $\hat{S}$  возмущающих масс.

Операции с конфигурациями, необходимые при реализации монтажного подхода, выполняются с использованием понятия ядра конфигурации  $\Omega$ :

$$Y[\Omega] = \{T_n \in T : T_n \subset \Omega\},$$

а также понятий оболочки, границы и внутренности конфигурации множеств

$$O[\Omega] = \{T_n \notin Y[\Omega] : T_n \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

$$\Gamma[\Omega] = \{T_n \in Y[\Omega] : O[T_n] \not\subset Y[\Omega]\},$$

$$B[\Omega] = \{T_n \in Y[\Omega] : T_n \notin \Gamma[\Omega]\}$$

соответственно (рис. 1). Если оболочку, границу и внутренность конфигурации  $\Omega$  рассматривать как функции, то, в отличие от ядра  $Y[\Omega]$ , они не аддитивны.

В компьютерных технологиях все операции в классе  $A$  непосредственно производятся не с конфигурациями как таковыми, а с множествами номеров элементов замощения, составляющих их ядра, что позволяет обходиться лишь целочисленной арифметикой и радикально упрощает вычислительный процесс.

Простейшей операцией в классе конфигураций является построение оболочки  $O[T_n]$  отдельного элемента замощения  $T_n$ .

Конфигурацию  $\Omega$ , определенную на замощении  $T = \{T_n\}$ , назовем связной, если для любых элементов  $T_i, T_j \in Y[\Omega]$  найдется упорядоченное подмножество  $\{T_{k(1)}, T_{k(2)}, \dots, T_{k(r)}\} \subseteq Y[\Omega]$ , обеспечивающее выполнение включений:  $T_i \in O[T_{k(1)}], T_{k(s)} \in O[T_{k(s+1)}], s = 1, 2, \dots, r-1, T_{k(r)} \in O[T_j]$ . Скажем, что конфигурация  $\Omega (O[\Omega] \subset T)$  является односвязной, если дополнение множества  $Y[\Omega]$  до  $T$  представляет собой ядро некоторой связной конфигурации. Расстояние  $\rho_A(\Omega_1, \Omega_2)$  между связными конфигурационными множествами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  можно измерять минимальным числом элементов замощения, образующих совместно с элементами множеств  $Y[\Omega_1]$  и  $Y[\Omega_2]$  ядро связной конфигурации. Непустое связное объединение  $H$  элементов  $T_n \in \Gamma[\Omega]$  назовем отростком конфигурации  $\Omega$ , если оболочка  $O[T_n]$  каждого элемента  $T_n \in Y[H]$  имеет с множеством  $B[\Omega]$  пустое пересечение. Число  $L$  элементов замощения, составляющих ядро  $Y[H]$  отростка  $H$ , назовем длиной этого отростка. Отношение  $\nu(\Omega)$  числа элементов, входящих в оболочку  $O[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ , к числу элементов, входящих в ядро  $Y[\Omega]$ , назовем индексом компактности этой конфигурации (рис. 2). В монтажных алгоритмах связность помогает разделять в пространстве  $\mathbf{R}^3$  области, занятые массами с различными значениями физического параметра. Односвязность геологических тел предполагает отсутствие в них пустот. Функцию расстояния  $\rho_A(\Omega_1, \Omega_2)$  можно использовать как

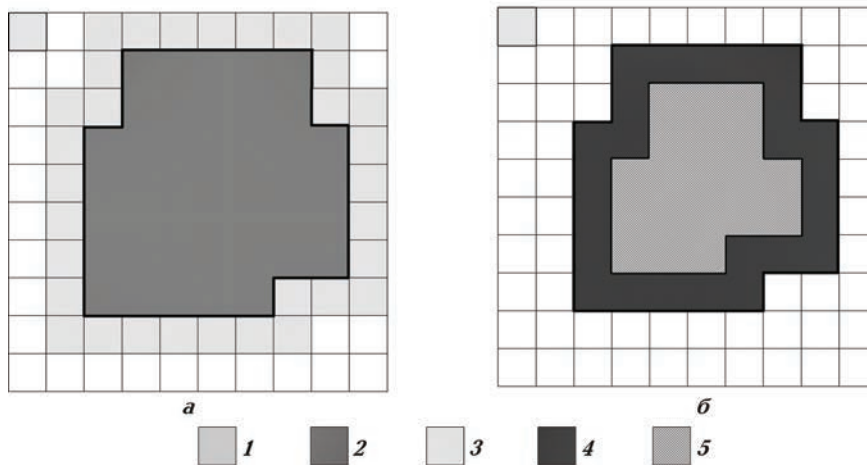


Рис. 1. Графическое представление основных понятий, используемых в монтажном методе:  $a$  — оболочка  $O[\Omega]$  и ядро  $Y[\Omega]$ ;  $b$  — граница  $\Gamma[\Omega]$  и внутренность  $B[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$  (отдельный элемент замощения  $\omega_\alpha$  (1); элементы замощения  $\omega_\alpha$ , принадлежащие ядру  $Y[\Omega]$  (2), оболочке  $O[\Omega]$  (3), границе  $\Gamma[\Omega]$  (4), внутренности  $B[\Omega]$  (5) двумерной конфигурации  $\Omega$ ).

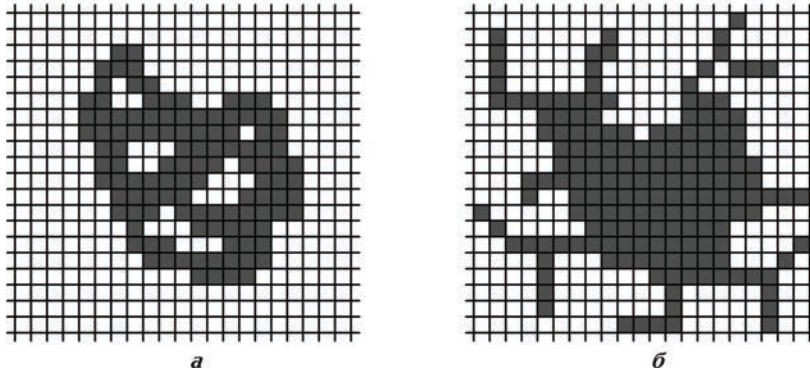


Рис. 2. Топологические особенности конфигураций  $\Omega$ : *a* — неодносвязная безостровковая конфигурация,  $\nu(\Omega) = 0,56$ ; *б* — односвязная конфигурация с отрогками,  $\nu(\Omega) = 1,02$ .

меру допустимой близости модельных конфигурационных носителей при обеспечении одного из условий, перечисленных в постановке обратной задачи. При формализации условия гладкости решения можно потребовать, чтобы длина отрогков в модельном носителе не превышала заданного  $L_0$ , а значение  $\nu(\Omega)$  можно использовать как интегральную характеристику гладкости носителя. Отсутствие свойства аддитивности у функций  $O[\Omega]$ ,  $\Gamma[\Omega]$ ,  $B[\Omega]$  должно учитываться при построении итерационных процессов для анализа различных топологических особенностей конфигурационных носителей масс.

Схема, по которой выстраиваются монтажные алгоритмы решения обратной задачи при известных плотностях, представляет собой конечный итерационный процесс последовательного уточнения множества  $\Omega_j^* = \{\Omega_{1,j}^*, \Omega_{2,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*\}$  оценок  $\Omega_{k,j}^*$  неизвестных носителей  $S_k$ , построенных на предыдущем шаге  $j$ ,  $j \geq 0$ , при условии, что текущие приближения  $\Omega_{k,j+1}^*$  наследуют качественные особенности предшествующих приближений  $\Omega_{k,j}^*$ , предписанные априорной информацией. Монтажный подход не налагает никаких ограничений на нулевое приближение  $\Omega_0^*$ . Оно может существенно отличаться по полю от точного решения обратной задачи, что является одним из преимуществ монтажных алгоритмов. очередное конфигурационное приближение  $\Omega_{j+1}^*$  образуется из предыдущего  $\Omega_j^*$  путем взаимного обмена ядер и оболочек конфигураций  $\Omega_{j,k}^*$  отдельными подмножествами своих элементов по заданному правилу  $Q$ , определяющему множество  $P_j$  пробных вариантов перехода от  $\Omega_j^*$  к  $\Omega_{j+1}^*$ . При том, что истинные значения  $\delta_k$  в сугубо

нелинейной постановке обратной задачи известны, вектор  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K)$  плотностей масс, распределенных по носителям  $\Omega_{k,j}^*$ , является свободным, а его компоненты  $\delta_k$  — оптимизируемыми параметрами. Это также одна из отличительных особенностей монтажных алгоритмов, удачно использующих интегральную природу потенциальных полей. На каждой итерации  $j$  в качестве наилучшего варианта  $\langle \Omega_j^*, \delta_j^* \rangle$  принимается тот, на котором достигается минимальное значение невязки наблюдаемого и модельного полей. Итерационный процесс завершается, как только на некотором шаге  $j = j_0$  все плотности  $\delta_{k,j}^*$  попадут в достаточно малые окрестности истинных значений  $\delta_k$ , что можно обеспечить, связав значения  $\delta_{k,j}^*$ ,  $k > 1$ , с  $\delta_{1,j}^*$  функциональными зависимостями. Пара  $\langle \Omega_{j_0}^*, \delta_{j_0}^* \rangle$  принимается за решение обратной задачи, если достигнуто допустимое значение невязки.

Монтажные технологии являются идеальным объектом для иллюстрации эффективности применения многопроцессорных вычислительных систем [Балк и др., 2010].

**Алгоритм решения задачи.** На этапе выбора замощения  $T$  и начального приближения  $\Omega_0^* = \{\Omega_{1,0}^*, \Omega_{2,0}^*, \dots, \Omega_{K,0}^*\}$  итерационные процессы решения смешанной и сугубо нелинейной обратных задач идентичны.

Проблема выбора замощения  $T$  аналогична традиционной проблеме выбора класса и параметрической размерности модели источников поля и также требует компромиссного решения: с одной стороны, увеличение размеров элементов замощения  $T_n$  снижает вычислительные затраты на поиск допустимого решения и повышает его устойчивость; с дру-

гой — степень дискретизации геологического пространства должна быть такой, чтобы при оценке допустимого значения невязки подбора поправкой за неадекватность модельного класса можно было бы пренебречь. В случае регулярного замощения, когда элементы  $T_n$  подобны, существуют простые схемы нумерации элементов замощения; упрощается формализация априорной информации и выполнение всех операций в классе конфигураций  $A$ . Опыт показывает, что общие соображения и интуиция вполне достаточны для выбора приемлемого замощения (к тому же, у интерпретатора остается в резерве имитационное моделирование).

За основу для начальных приближений  $\Omega_{k,0}^*$  к парциальным носителям  $\hat{S}_k$  выбираются множества

$$\tilde{\Omega}_k = \{T_n \in T : T_n \cap S_k^+ \neq \emptyset\}.$$

Если области  $S_k^+$  имеют сложную геометрию (случай нескольких подсечений тел скважинами) и конфигурации  $\tilde{\Omega}_k$  не соответствуют априорным представлениям о качественных особенностях носителей  $\hat{S}_k$  (например, не соблюдается условие связности), ядра  $\mathcal{Y}[\tilde{\Omega}_k]$  следует дополнить до ядер минимальных конфигураций  $\Omega_{k,0}^*$ , обладающих нужными свойствами. В работе [Балк, 1993] приведены эффективные процедуры дополнения конфигурации произвольной структуры (при ограничениях на выбор элементов, участвующих в этой процедуре) до минимальной связной односвязной конфигурации, длина любого из отростков которой не превышает заданного  $L_0$ .

Особенности конкретного итерационного монтажного алгоритма определяются структурой его шага и здесь желательно рассмотреть все альтернативные возможности с учетом имеющихся наработок. Казалось бы, чем сложнее структура итерационного шага и больше свободы при выборе очередного приближения, тем тверже гарантии выхода на приемлемое значение невязки; ведь теоретически минимальное значение невязки могла бы дать глобальная оптимизация сразу по всему замощению части пространства, содержащей источники поля. Однако попытки реализации этой идеи с использованием математического программирования [Дядюра, Шалаев, 1968; Перфильев, 1972; Шалаев, 1972] не привели к успеху, причем не по причине низкой продуктивности ЭВМ того времени; проблемы возникли уже на этапе формализации ограничений, обеспечивающих связность носителя. Идея

монтажного подхода возникла как раз из-за плохой совместимости классических методов минимизации и нелинейных постановок обратной задачи в сеточных классах источников поля. Безвыигрышной (учитывая результаты из работы [Балк П.И., Балк С.П., 2000]) представляется также идея использования сложных структур итерационного шага и в монтажных алгоритмах. Опыт разработки и эксплуатации программного обеспечения монтажного подхода говорит о том, что в структуре итерационного шага нецелесообразно использовать процедуры сложнее перекристаллизации (операции взаимного обмена элементами замощения между множествами  $O[\Omega_j^*]$  и  $\mathcal{Y}[\Omega_j^*]$ ) по одному элементу с каждой стороны.

Простейшая версия монтажного метода, модификация которой будет здесь использована, — алгоритм регулируемой направленной кристаллизации (РНК). В алгоритме РНК очередное  $j$ -е приближение  $\Omega_j^* = \{\Omega_{1,j}^*, \Omega_{2,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*\}$  образуется путем наращивания ядра одного парциального носителя (пусть  $r$  — его номер) из предшествующего приближения  $\Omega_{j-1}^*$  на один элемент замощения  $T_n \in O[\Omega_{r,j-1}^*]$ :

$$\mathcal{Y}[\Omega_{r,j}^*] = \mathcal{Y}[\Omega_{r,j-1}^*] \cup \{T_n\},$$

$$\mathcal{Y}[\Omega_{k,j}^*] = \mathcal{Y}[\Omega_{k,j-1}^*], \quad k \neq r.$$

Процедура контроля за соблюдением всех условий, предъявляемых к допустимым вариантам перехода к очередному приближению  $\Omega_j^*$  и обусловленных постановкой задачи, может быть подвергнута радикальной декомпозиции и в этом главное преимущество монтажных алгоритмов.

Итак, пусть  $T_n$  — некий элемент из оболочки  $O[\Omega_{r,j-1}^*]$ . Требуется установить, является ли вариант включения этого элемента в ядро  $\mathcal{Y}[\Omega_{r,j-1}^*]$  допустимым. Начнем с того, что при такой простой организации итерационного шага, как в методе РНК, конфигурация  $\Omega_{r,j}^*$  автоматически наследует свойство связности конфигурации  $\Omega_{r,j-1}^*$ . Связная конфигурация является к тому же односвязной, если ее оболочка является ядром связной конфигурации. Пусть  $\mathcal{Y}[\Omega^{(1)}]$  — ядро конфигурации, состоящее из единственного элемента замощения  $T_m$ , принадлежащего множеству  $O[\Omega_{r,j}^*]$ . Организуем итерационный процесс на базе следующего рекуррентного соотношения  $\mathcal{Y}[\Omega^{(t+1)}] = \mathcal{Y}[\Omega^{(t)}] \cup (O[\Omega^{(t)}] \cap O[\Omega_{r,j}^*])$ ,  $t \geq 1$ . Если  $\mathcal{Y}[\Omega^{(p+1)}] = O[\Omega_{r,j}^*]$

на некотором шаге  $t = p$ , то множество  $O[\Omega_{r,j}^*]$  является ядром некоторой связной конфигурации, а конфигурация  $\Omega_{r,j}^*$  — односвязной. Напротив, если  $\mathcal{Y}[\Omega^{(t)}] = \mathcal{Y}[\Omega^{(t-1)}]$  на некотором шаге  $t$  и при этом  $\mathcal{Y}[\Omega^{(t)}] \neq \mathcal{Y}[\Omega_{r,j}^*]$ , то конфигурация  $\Omega_{r,j}^*$  не является односвязной и, соответственно, рассматриваемый вариант перехода от  $\Omega_{j-1}^*$  к  $\Omega_j^*$  исключается из рассмотрения. Аналогичный вывод следует, если  $T_n \not\subset D_r$  или  $T_n \cap S_r^- \neq \emptyset$ . Недопустимым является также вариант, приводящий к взаимопересечению парциальных носителей  $T_n \in \mathcal{Y}[\Omega_{k,j-1}^*]$  для какого-либо  $k \neq r$ . Чтобы установить, не противоречит ли пробный вариант  $\langle r, T_n \rangle$  сформулированным в постановке задачи условиям контактирования парциальных носителей, построим индексное множество  $I = \{s : T_n \in O[\Omega_{s,j-1}^*], s = 1, 2, \dots, K; s \neq r\}$ . Если  $\lambda_{r,s} = 0$  хотя бы для одного индекса  $s \in I$ , то вариант наращивания ядра  $\mathcal{Y}[\Omega_{r,j-1}^*]$  на элемент замощения  $T_n$  неприемлем. Если постановка задачи содержит ограничение на минимально допустимые расстояния  $\rho_{s,t}$  между парами носителей  $S_s$  и  $S_t$ , то (с учетом размеров элементов замощения) следует предварительно перейти к ограничениям на минимально допустимые расстояния  $\rho_A(\Omega_{s,j}^*, \Omega_{t,j}^*)$ . Пусть  $(s, t)$  — фиксированная пара индексов. Положим  $\Omega^{(0)} = \Omega_{s,j}^*$  и организуем итерационный процесс  $\mathcal{Y}[\Omega^{(i)}] = \mathcal{Y}[\Omega^{(i-1)}] \cup O[\Omega^{(i-1)}], i \geq 1$ . Тогда  $\rho_A(\Omega_{s,j}^*, \Omega_{t,j}^*) = i_0 - 1$ , где  $i_0$  — минимальное значение индекса  $i$ , при котором выполняется неравенство  $\mathcal{Y}[\Omega_{t,j}^*] \cap \mathcal{Y}[\Omega^{(i)}] \neq \emptyset$ . Из "нелинейной" части постановки нерассмотренным остается условие гладкости носителя. Если  $O[T_n] \cap B[\Omega_{r,j}^*] \neq \emptyset$ , то элемент  $T_n$  не входит ни в один отросток  $H$  пробной конфигурации  $\Omega_{r,j}^*$ . Если указанное неравенство не выполняется, а априорные ограничения допускают наличие у приближенных решений отростков, длина которых не превышает заданного  $L$ , то необходимо положить  $\Omega^{(0)} = T_n$  и организовать итерационный процесс  $\mathcal{Y}[\Omega^{(i)}] = \mathcal{Y}[\Omega^{(i-1)}] \cup (O[\Omega^{(i-1)}] \cap \Gamma[\Omega_{r,j}^*]), i \geq 1$ , с критерием останова  $\mathcal{Y}[\Omega^{(t)}] = \mathcal{Y}[\Omega^{(t-1)}]$ . Тогда длина  $L$  отростка  $H \supset T_n$  будет равна числу элементов, составляющих ядро конфигурации  $\Omega^{(t)}$ .

Таким образом, множество  $P_j$  складывается из всевозможных вариантов включения элементов замощения, входящих в объединение оболочек парциальных носителей  $\Omega_{k,j-1}^*$  и прошедших (с помощью описанных выше процедур) контроль за соблюдением первых восьми

условий задачи, в ядра парциальных носителей.

Осталось определиться в выборе номера  $r$  парциального носителя  $\Omega_{r,j-1}^*$ , ядро которого на шаге  $j$  было бы наиболее выгодно пополнить элементом замощения  $T_n$ , и собственно номера  $n = n(r, j)$  такого элемента. Решать его необходимо с прицелом на глобальное условие, по которому на некоторой итерации  $j = j_0$  все плотности  $\delta_{k,j}^*$ , минимизирующие невязку  $\varepsilon_j$  наблюдаемого и подобранного (модельного) полей, обязаны попасть в априори заданные интервалы  $[\delta'_k, \delta''_k]$ , а само значение  $\varepsilon_j$  — в интервал  $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ . Ясно, что оптимальность выбора пары  $\langle r, n(r, j) \rangle$  непосредственно завязана на критерий выбора значений плотностей  $\delta_{k,j}^*$  и потому проблема требует компромиссного решения.

Казалось бы, с целью минимизации функционала невязки

$$\Phi(\delta) = \Phi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K) = \\ = \left\| \Delta \tilde{g}(X) - \Delta g(\Omega_j^*; \delta) \right\|$$

следует плотности  $\delta_k$  масс, распределенных по  $\Omega_{k,j}^*$ , считать свободными параметрами. Но в таком случае нет гарантии, что на какой-то итерации  $j = j_0$  значения  $\delta_k = \delta_{k,j}^*$ , обеспечивающие минимум функционала невязки  $\Phi(\delta)$ , одновременно попадут в интервалы  $[\delta'_k, \delta''_k]$ , а попытка заключить плотности  $\delta_{k,j}^*$  в указанные интервалы спустя какое-то число итераций, по завершению которых текущая невязка уже довольно мала, неминуемо будет сопровождаться скачкообразным ростом последней.

Предлагается организовать итерационный процесс так, чтобы на начальной стадии итерационного процесса плотности  $\delta_{k,j}^*, k = 1, 2, \dots, K$ , согласованно стягивались к границам  $\delta''_k$  интервалов  $[\delta'_k, \delta''_k]$ , а на заключительной стадии уже не выходили за пределы указанных интервалов. При этом заключительная стадия вступает в силу, как только на предыдущей итерации  $j - 1$  плотность  $\delta_{1,j-1}^*$ , доставляющая совместно с плотностями  $\delta_{k,j-1}^*, k = 2, 3, \dots, K$ , минимальное значение функционала невязки  $\Phi$ , окажется меньше  $\delta''_1$ . Это можно обеспечить, если на первой стадии процесса использовать ограничения типа  $\delta''_k \leq \delta_k \leq \varphi_k(\delta_1), k = 2, 3, \dots, K$ , где  $\varphi_k$  — монотонно убывающие и непрерывные на интервале  $(-\infty, \delta''_1)$  функции, удовлетворяющие условию  $\varphi_k(\delta''_1) = \delta''_k$ , а на второй — ограничения  $\delta'_k \leq \delta_k \leq \delta''_k, k = 1, 2, \dots, K$ . Как один из

возможных вариантов предлагается использовать функции

$$\varphi_k(x) = \delta'_k + \frac{\delta''_k - \delta'_k}{\delta'_1 - \delta'_1} (x - \delta'_1) + \delta'_k,$$

$$k = 2, 3, \dots, K.$$

Если на итерации  $j$  достигнуто допустимое расхождение  $\varepsilon_j$  наблюдаемого поля и поля масс, распределенных с плотностями  $\delta_{k,j}^*$  по парциальным объемам  $\Omega_{k,j}^*$ , то пара  $\langle \Omega_j, \delta_j^* \rangle$  принимается за приближенное решение обратной задачи. Если же на некотором шаге  $j$  плотности  $\delta_{k,j}^*$  вышли на значения  $\delta'_k$ , но при этом ни на одной итерации не было достигнуто приемлемое значение невязки, то следует вывод, что построить допустимое решение не удалось.

**Результаты численных экспериментов.**

Определимся в том, какую смысловую нагрузку могут нести модельные расчеты в случае, когда от алгоритма требуется построить одно (безразлично какое) из допустимых решений обратной задачи.

Прежде всего, вычислительный эксперимент позволяет снять вопрос о конструктивности алгоритма. Не замалчивая его актуальность в отношении предлагаемого алгоритма, сошлемся здесь на успешный опыт практической реализации трехмерных монтажных технологий [Балк и др., 2009] решения сугубо нелинейных обратных задач, а также на эффективные методы решения задачи квадратичного программирования, возникающие дополнительно на каждой итерации предлагаемого алгоритма (тем более, что число  $K$  оптимизируемых параметров здесь невысоко). Больше того, когда речь идет не об отыскании единственного в своем роде "оптимального" решения, а всего лишь о выделении из множества допустимых решений любого из них, то можно воспользоваться и не "оптимальным", а каким-то упрощенным и более экономичным алгоритмом поиска. В методологическом плане установка на результат интерпретации как на любое допустимое решение обратной задачи освобождает от необходимости подбора "удачных" примеров, иллюстрирующих высокие разрешающие способности предлагаемого метода. При таком подходе высокое или низкое качество результатов интерпретации — это не преимущество или недостаток предложенного метода, а всего лишь демонстрация реальных возможностей геофизического метода, иллюстрация интегральной природы потенциальных полей.

С учетом сказанного рассмотрим модельные расчеты как дополнительную мотивацию практической целесообразности и актуальности выполненных построений, а также как конкретную иллюстрацию затронутых в статье методологических аспектов проблемы (особый акцент сделаем на связку "допустимость — оптимальность"). Для большей наглядности примеры взяты из двумерной постановки.

В расчетах опробован более экономичный адаптивный алгоритм, в котором условно-экстремальная задача решается лишь один раз. Введем в рассмотрение вспомогательный (опорный) вектор  $\lambda = (1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$ , определяющий очередность и направление разрастания ядер парциальных носителей  $\Omega_{k,j}^*$ . На каждой итерации  $j$  вектор  $\lambda$  подлежит корректировке, что служит признаком адаптивности предлагаемого алгоритма. В качестве  $\lambda_0$  можно взять вектор произвольных значений из интервалов  $[\delta'_k, \delta''_k]$ , например,  $\lambda_{k,0} = (\delta'_k + \delta''_k) / 2, k = 2, 3, \dots, K$ . На каждом шаге  $j$  из числа допустимых пробных вариантов перехода от  $\Omega_{j-1}^*$  к  $\Omega_j^*$  выбирается тот, на котором достигается минимум функционала невязки

$$\Phi(\delta_1) = \sum_{i=1}^n \left( \Delta \tilde{g}(X_i) - \sum_{k=1}^K \Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i) (\lambda_{k,j} \delta_1) \right)^2$$

при условии, что плотность  $\delta_1$  тела  $\Omega_{1,j}^*$  — (единственный) свободный параметр, а плотности  $\delta_k$  других тел жестко связаны с  $\delta_1$  функциональной зависимостью  $\delta_k = \lambda_{k,j} \delta_1$  (здесь  $\Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i)$  — поле масс единичной плотности, распределенных по объему  $\Omega_{k,j}^*$ ). Допустим, что среди опробованных минимум  $\Phi(\delta_1)$  достигнут в некотором варианте  $\Omega_j^* = \{\Omega_{1,j}^*, \Omega_{2,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*\}$  при  $\delta_1 = \delta_{1,j}^*$ . Полагая, что  $\langle \{\Omega_{k,j}^*\}_{k=1}^K; \delta_{1,j}^* \rangle$  — не подлежащий пересмотру фрагмент  $j$ -го приближения, берем в качестве оптимальных значений плотностей масс, заполняющих носители  $\Omega_{2,j}^*, \Omega_{3,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*$ , значения  $\delta_k = \delta_{k,j}^*$ , минимизирующие функционал

$$\Phi(\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_K) = \sum_{i=1}^n \left( \Delta \tilde{g}(X_i) - \left[ \delta_{1,j}^* \Delta g(\Omega_{1,j}^*) + \sum_{k=2}^K \Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i) \delta_k \right] \right)^2$$

при ограничениях  $\delta_k'' \leq \delta_k \leq \varphi_k(\delta_{1,j}^*), k = 2, 3,$



...,  $K$ , в случае  $\delta_{1,j}^* \geq \delta_1''$  и  $\delta_k' \leq \delta_k \leq \delta_k''$ ,  $k = 2, 3, \dots, K$ , в случае  $\delta_1' \leq \delta_{1,j}^* < \delta_1''$ . Итерация завершается корректировкой опорного вектора для использования на следующей итерации:

$$\lambda_{k,j+1} = \delta_{k,j}^* / \delta_{1,j}^*, \quad k = 2, 3, \dots, K.$$

При обсуждении модельных примеров степень близости приближенного решения  $\langle \Omega^*, \delta^* \rangle$  к истинному  $\langle \hat{S}, \hat{\delta} \rangle$  будем характеризовать средним значением показателей точности  $\rho_k^{(S)}$ ,  $\rho_k^{(\delta)}$  оценивания парциальных носителей и плотностей соответственно:

$$\rho^{S, \delta} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \rho_k^{(S, \delta)},$$

$$\rho_k^{S, \delta} = \sqrt{\rho_k^{(S)} \rho_k^{(\delta)}},$$

$$\rho_k^S = \mu(\hat{S}_k \cap \Omega_k^*) / \mu(\hat{S}_k \cup \Omega_k^*),$$

$$\rho_k^\delta = 1 - \left| \delta_k^* - \hat{\delta}_k \right| / (\delta_k'' - \delta_k').$$

Глобальные и парциальные показатели являются нормированными величинами;  $[0,1]$  — интервал их возможных значений, причем максимальное значение  $\rho^{S, \delta} = 1$  соответствует идеализированному случаю совпадения точного и приближенного решений.

В случае обратной задачи магниторазведки (при амплитуде аномалий не более 5000 нТл) необходимо (скалярные) значения плотностей заменить на векторные характеристики эффективной намагниченности тел. При более интенсивных аномалиях необходимо учитывать эффект размагничивания [Блох, 1993].

Для сравнения результаты апробации предложенного алгоритма сопоставим с решением обратной задачи в предположении, что некоторые значения  $\tilde{\delta}_k$  являются истинными значениями плотностей масс, распределенных по объемам  $\hat{S}_k$ , причем как для случая  $\tilde{\delta}_k = \hat{\delta}_k$ , так и для случая неадекватности модельных представлений, когда  $\tilde{\delta}_k \neq \hat{\delta}_k$ .

**Пример 1.** Аномалия  $\Delta g$  задана в  $n = 40$  равноотстоящих точках оси  $x$  и обусловлена однородным телом  $\hat{S}$  с избыточной плотностью  $\hat{\delta} = 0,3$  г/см<sup>3</sup>. Предполагается, что плотность  $\hat{\delta}$  неизвестна и ее возможное значение может лежать в интервале от 0,15 до 0,5 г/см<sup>3</sup>. Выполнены три варианта расчетов: 1) по точным значениям поля  $\Delta \tilde{g}(x)$ ; 2) по полю  $\Delta \tilde{g}(x)$ , осложненному нормально распределенной помехой, среднеквадратическое значение которой составляет 5% от максимального значения аномалии; 3) по полю  $\Delta \tilde{g}(x)$ , осложненному асимметричной помехой той же интенсивности, что и в варианте 2. Результаты расчетов представлены на рис. 3—5, основные числовые характеристики решений вынесены в табл. 1 и 2.

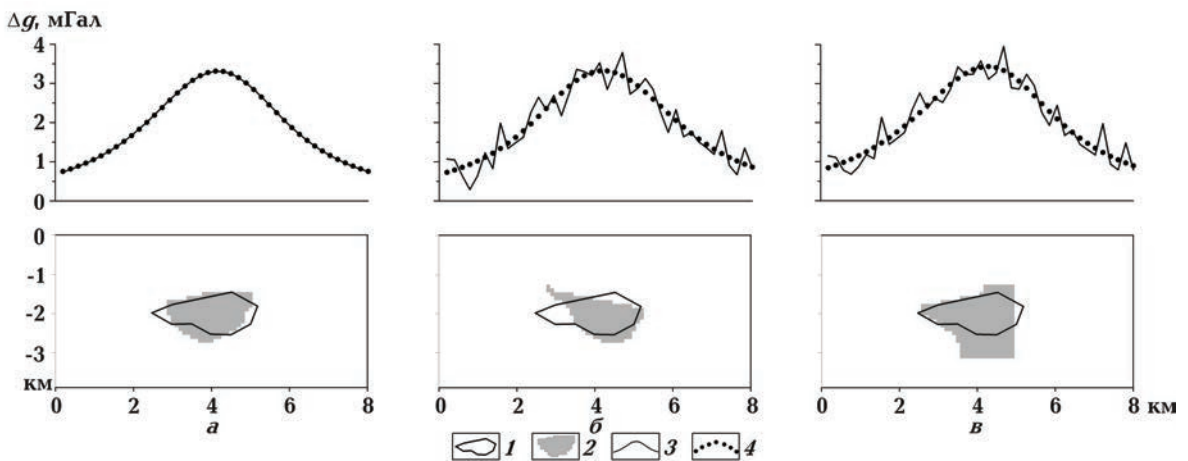


Рис. 3. Допустимые решения смешанной обратной задачи гравиразведки, соответствующие минимуму невязки:  $a$  — по точно заданному полю;  $b$  — по полю, осложненному нормально распределенной помехой;  $v$  — по полю, осложненному асимметричной помехой (1 — аномалиеобразующий объект; 2 — подобранный объект; 3 — график исходного поля; 4 — дискретные значения выбранного поля).

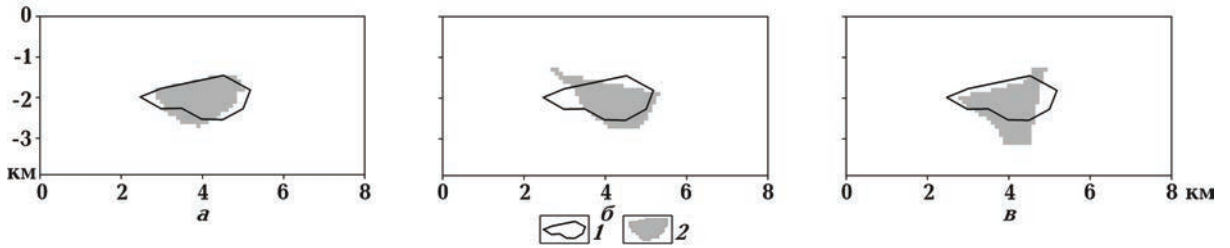


Рис. 4. Результаты решения смешанной обратной задачи гравirazведки, соответствующие плотности  $0,3 \text{ г/см}^3$  подобранного объекта. Условные обозначения те же, что и на рис. 3.

Отметим, прежде всего, высокую степень близости подобранного и точного полей в варианте 1, что важно с точки зрения оценки способности предлагаемого алгоритма выйти

на допустимое значение невязки. Как и ожидалось, во всех вариантах глобальный минимум невязки, качество решения обратной задачи и истинное значение плотности не со-

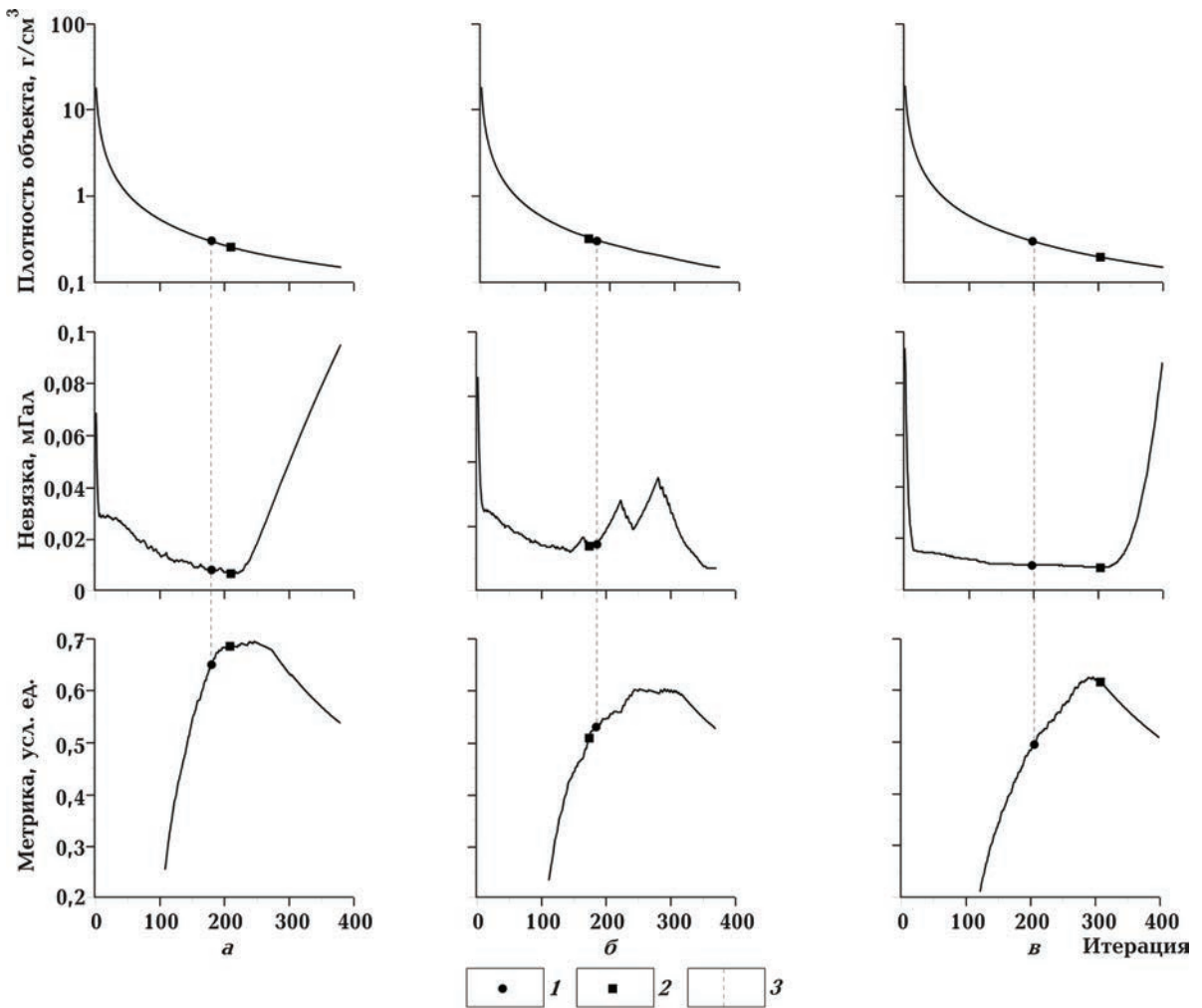


Рис. 5. Графики изменения параметров  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\rho^{\delta}$  в процессе решения смешанной обратной задачи гравirazведки: а—в те же, что и на рис. 3 (1 — решение, соответствующее плотности подобранного объекта  $0,3 \text{ г/см}^3$ ; 2 — решение, соответствующее минимуму невязки полей; 3 — вертикальная прямая, соединяющая решения, соответствующие плотности  $0,3 \text{ г/см}^3$ ).

**Т а б л и ц а 1. Основные параметры решений обратной задачи, соответствующие минимуму невязки наблюдаемого и подобранного полей**

Номер варианта	Число итераций	Невязка, мГал	Подобранная плотность, г/см <sup>3</sup>	Точность $\rho^{S, \delta}$
1	207	0,0061	0,259	0,687
2	177	0,3226	0,294	0,521
3	309	0,3021	0,192	0,614

гласуются друг с другом (все три указанные величины достигаются на различных итерациях). Конкретно в обоих вариантах с помехами точность приближенных решений, достигающих минимальное значение невязки, равно как и тех, что соответствуют точному значению плотности, не является наивысшим — экстремальными (по значению  $\rho^{S, \delta}$ ) оказываются "рядовые" допустимые решения обратной задачи.

По результатам решения примера можно сделать следующий вывод: свойства любых единичных решений обратной задачи являются, вообще говоря, случайными и если плотность неизвестна, то анализ всех допустимых решений смешанной обратной задачи, соответствующих интервалу возможных значений плотности, просто необходим.

**П р и м е р 2.** Аномалия  $\Delta g$  обусловлена тремя однородными бесконечно протяженными призмами плотности  $\bar{\delta}_1 = 0,2$ ,  $\bar{\delta}_2 = 0,3$  и  $\bar{\delta}_3 = 0,5$  г/см<sup>3</sup> и задана своими точными значениями в  $n = 26$  точках оси  $x$  (рис. 6). Элементы замощения — квадраты со стороной 0,25 км. Задействовано большинство ограничений, перечисленных в постановке задачи. Считается известным, что  $K = 3$  и все три не соприкасающиеся друг с другом тела  $\bar{S}_k$  — односвязные области, заполненные массами избыточ-

ной плотности  $\bar{\delta}_1 \in [0,1; 0,3]$ ,  $\bar{\delta}_2 \in [0,1; 0,4]$ ,  $\bar{\delta}_3 \in [0,2; 0,7]$ . Предполагается, что возмущающие тела заключены между плоскостями  $z = 1$  и  $z = 12$  км. В качестве их априори известных фрагментов  $S_k^+$  выступают три элемента замощения  $T_n$  — по одному элементу на каждое тело (при реализации модифицированного алгоритма РНК они принимаются за центры кристаллизации).

Контроль за невязкой наблюдаемого и подобранного полей — это всего лишь косвенный способ оценки достигнутой невязки неизвестного точного и подобранного полей, которая и представляет основной интерес. В этом смысле результаты модельных расчетов, выполненные по точному полю и свободные от особенностей выборки случайных чисел, используемых при конструировании "наблюденого" поля, имеют свои преимущества: все выводы в отношении возможностей алгоритма можно будет сделать, исходя из сравнения достигнутого значения невязки и предполагаемого уровня помех, которые могли бы содержаться в "измеренных" значениях поля.

Минимум невязки при решении обратной задачи по предложенному методу, достигнутый при плотностях  $\delta_1^* = 0,235$ ;  $\delta_2^* = 0,106$ ;  $\delta_3^* = 0,486$  г/см<sup>3</sup>, составляет  $\epsilon = 0,345$  мГал (при этом  $\rho^{S, \delta} = 0,486$ ), и это означает, что

**Т а б л и ц а 2. Основные параметры решений обратной задачи при точно заданном значении плотности аномалиеобразующего объекта**

Номер варианта	Число итераций	Невязка, мГал	Подобранная плотность, г/см <sup>3</sup>	Точность $\rho^{S, \delta}$
1	179	0,0082	0,300	0,647
2	185	0,3229	0,300	0,534
3	198	0,3024	0,300	0,484

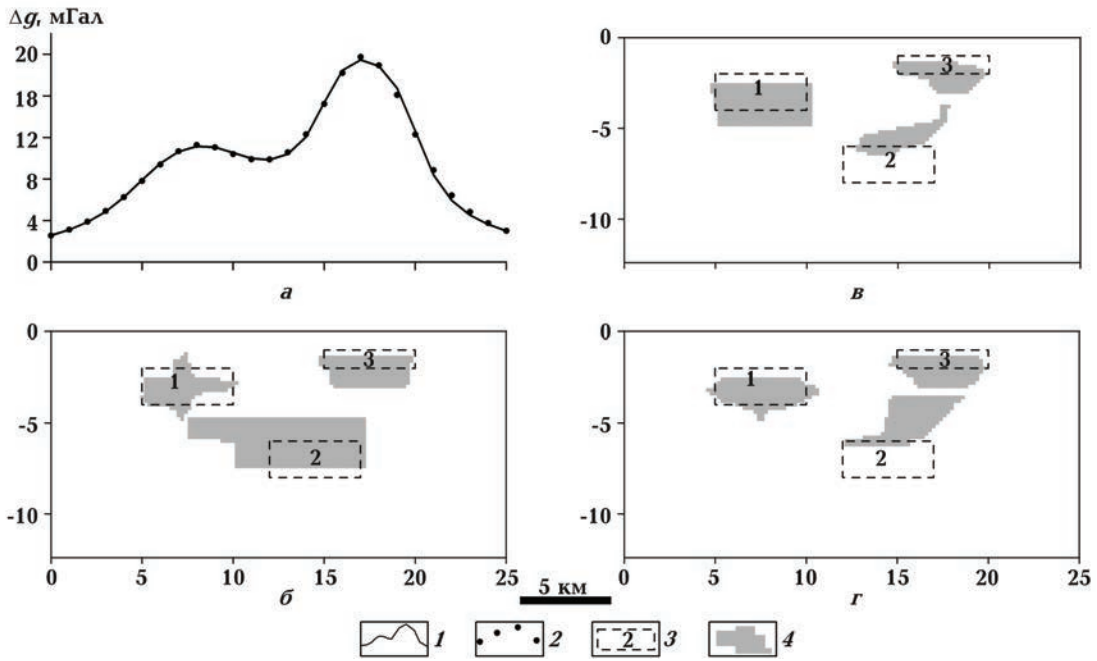


Рис. 6. Результаты решения обратной задачи гравirazведки: а, б — при подбираемых значениях плотности тел (а — графики наблюдаемого и модельного полей, б — геоплотностной разрез); в, г — при фиксированных величинах плотности (в — соответствующих истинным, г — не соответствующих истинным значениям); 1 — график наблюдаемого поля; 2 — дискретные значения модельного поля; 3 — аномалиеобразующие тела и их номера; 4 — подобранные конфигурации.

при интенсивности помех не менее 1,5 % от максимального значения поля метод позволяет выйти на допустимое решение. Для сравнения при заданных истинных значениях плотностей невязка составила 0,258 мГал, а точность решения обратной задачи  $\rho^{S, \delta} = 0,507$ . При ошибочно заданных значениях плотностей  $\tilde{\delta}_1 = 0,3$ ;  $\tilde{\delta}_2 = 0,15$ ;  $\tilde{\delta}_3 = 0,4 \text{ г/см}^3$  невязка оказалась наименьшей из всех трех вариантов — 0,16 мГал, тогда как качество решения  $\rho^{S, \delta} = 0,403$  наихудшее.

Дополнительные выводы можно сделать из анализа зависимостей, приведенных на рис. 7 (чтобы избежать необходимость введения логарифмических шкал, на графике не представлены результаты первых итераций, на которых плотности и невязка имеют достаточно высокие значения).

Общий вывод: предложенный алгоритм позволяет строить допустимые решения при неполной априорной информации о геометрических и физических свойствах изучаемого объекта. Результаты расчетов можно рассматривать и как предостережение от чрезмерной абсолютизации свойств "оптимальности" решений обратной задачи по критерию мини-

муму невязки. Минимизация невязки в итерационных алгоритмах подбора должна использоваться для выхода в область допустимых решений обратной задачи, тогда как сам выбор допустимого решения, соответствующий минимуму невязки, должен рассматриваться просто как один из возможных.

**Заключение.** В геофизической литературе неоднократно поднимался вопрос о необходимости провести своего рода ревизию уже известных методов решения обратных задач и считать обязательным сравнительный анализ возможностей любого предлагаемого алгоритма с возможностями уже существующих алгоритмов. Можно выделить три аспекта этой проблемы: а) что практически нового дает рассматриваемый алгоритм в сравнении со всеми другими, разработанными геофизиками, исходя из реальных потребностей интерпретации потенциальных полей; б) не перекрываются ли возможности предложенного алгоритма результатами абстрактной математической теории решения некорректных обратных задач, если рассматривать последние через призму геофизических интересов и приоритетов; в) с какими свежими идеями из дру-

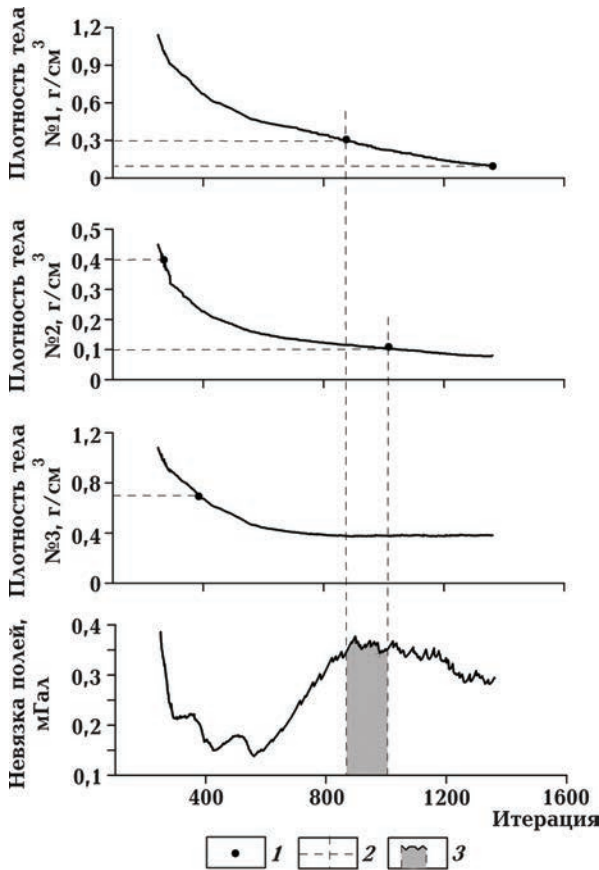


Рис. 7. Графики изменения плотности тел и невязки полей в процессе решения обратной задачи: 1 — граничные точки интервалов допустимых изменений плотности; 2 — соединительные линии; 3 — область допустимых решений обратной задачи, внутри которой плотности всех призм не выходят за пределы заданных значений и невязка полей не превышает 0,4 мГал.

гих разделов прикладной математики, в которых практический интерес главенствует над математическим, переключается концепция предложенного алгоритма и могут ли эти идеи (коль скоро они оказались успешными в своих областях) стимулировать и подпитывать дальнейшие разработки в области создания методов количественной интерпретации геопотенциальных полей.

Существует мнение, что разработка методов совместной оценки физических и геометрических параметров геологических объектов по данным грави- и магниторазведки не актуальна в силу высокой степени проявления эквивалентности. Но до каких-то пор считалось [Журант, 1964], что и некорректные задачи, в том числе обратные задачи геофизики, не подлежат рассмотрению. Однако появи-

лась теория некорректных задач [Тихонов, 1963] и стало ясно, что вся проблема лишь в том, чтобы дополнить постановку задачи информацией, недостающей для обеспечения необходимого качества приближенных решений. Но если основной рабочий инструмент этой теории — метод регуляризации — успешно применяется в различных постановках обратных задач [Тихонов, 1999], характеризуемых определенным типом априорной информации, то в методологическом плане дела обстоят иначе. Интересы математической теории решения некорректных обратных задач и господствующие в ней приоритеты заметно расходятся с реалиями и потребностями геофизической практики. Так, состоятельность метода здесь определяется сходимостью последовательности приближенных решений при стремлении нормы помехи к нулю, а учет дополнительной априорной информации при решении корректно поставленной задачи не является принципиальным [Васин, Агеев, 1993]. Несоответствие реалиям и целям геофизических исследований здесь налицо. На практике, где подлинный интерес представляют лишь конечномерные постановки обратных задач, компактность множества допустимых решений достигается за счет одних лишь естественных ограничений на значения физических и геометрических параметров объекта — практические постановки обратных задач устойчивы де факто. Для практики стремление помехи к нулю — это чисто виртуальная посылка, здесь на первый план выдвигается проблема учета любой информации, позволяющей сузить множество допустимых вариантов интерпретации. Способность решить ее и становится основным признаком состоятельности алгоритма. Но оказалось, что одновременно учесть большой объем разнородной априорной информации, используя стандартные методы решения условно-экстремальных задач, весьма затруднительно. Не в этом ли кроется истинная причина объявить смешанные постановки обратных задач неактуальными?

По ряду признаков концепция модифицированных монтажных алгоритмов для решения смешанных обратных задач грави- и магниторазведки созвучна концепции так называемых "жадных алгоритмов" (Greedy algorithm), получившей в последние годы признание в различных областях прикладной математики, где строгое решение проблемы оптимального выбора связано с непомерными вычислительными затратами [Кормен и др., 2006].

Сущность таких алгоритмов состоит в приведении исходной задачи к сумме подобных задач меньшей размерности и принятии локально оптимальных решений на каждом шаге (отсюда и название "жадный"), допуская, что конечное решение также окажется оптимальным, или близким к нему. Основной вопрос, который возникает при этом, — сколь "близко" построенное решение к неизвестному оптимальному. Однако в нашем случае, где критерием оптимальности решения является не глобальный минимум невязки, а лишь ее приемлемое значение (можно сказать, что любое допустимое решение для нас оптимально), этот вопрос снимается.

Результаты статьи можно рассматривать как иллюстрацию возможностей неформального геофизически содержательного подхода к разработке методов решения обратных задач, соответствующих реалиям и потребностям геофизической практики. Вместе с тем, авторы убеждены, что принципиальный прорыв в вопросе наиболее полного извлечения достоверной информации из результатов измерений гравитационных и магнитных полей удастся достичь тогда, когда построение отдельных приемлемых вариантов интерпретации станет элементом более общей технологии, реализующей концепцию гарантированного подхода и заключающейся в поисках геологически содержательных инвариантов на множестве всех допустимых решений обратной задачи. Лишь при таком подходе к проблеме извлечения достоверной информации из геофизических данных можно в полной мере ощутить необходимость в смешанных постановках обратных за-

дач и количественно оценить меру возросшего проявления  $\varepsilon$ -эквивалентности. В теории интерпретации гравитационных полей концепция гарантированного подхода была сформулирована в конце 70-х годов [Балк, 1979; 1980]. С начала 80-х годов аналогичный подход (даже с тем же названием) стал бурно развиваться в теории оценивания и теории управления (библиография в работе [Костоусова, 2005]), что также косвенно свидетельствует о существовании пока не раскрытых возможностях и перспективах гарантированного подхода в обратных задачах геофизики.

Теоретически возможное и практически реализуемое — не всегда одно и то же. Как отмечает В. И. Старостенко [Старостенко, 1999], "заявление о том, что метод легко обобщается на трехмерный случай, остается в большинстве случаев чистой декларацией". Легко спрогнозировать, что вычислительные затраты на реализацию гарантированного подхода к смешанной обратной задаче (тем более, в трехмерной постановке) будут значительно выше тех, с которыми приходится иметь дело при обычном подходе. Потому окончательный вывод в отношении перспектив рассмотренной постановки задачи и конструктивности идеи использования предложенного метода в технологиях, реализующих концепцию гарантированного подхода, можно будет сделать лишь после разработки и апробации программного продукта на модельных и практических примерах надлежащей степени сложности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-05-96023\_p\_урал\_a) и программы исследований ОНЗ РАН (проект 09-Т-5-1031).

### Список литературы

- Авчан Г. М., Озерская М. Л. Закономерность уплотнения осадочных пород с глубиной // Изв. АН СССР. Сер. геолог. — 1968. — № 2. — С. 137—141.
- Балк П. И. Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии в рамках монтажного подхода // Физика Земли. — 1993. — № 5. — С. 59—71.
- Балк П. И. Об устойчивом методе локализации однородных геологических объектов по гравитационным аномалиям // Геология и геофизика. — 1979. — № 10. — С. 89—98.
- Балк П. И. О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1980. — № 6. — С. 43—57.
- Балк П. И. Столкновение геофизических и математических интересов — главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофиз. журн. — 2000. — 22, № 4. — С. 3—20.
- Балк П. И., Балк С. П. О решении нелинейной обратной задачи гравиметрии с использованием конечноэлементных представлений источников поля // Докл. РАН. — 2000. — 371, № 2. — С. 231—234.

- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А.* Теория и опыт применения монтажного подхода к решению трехмерных обратных задач гравиметрии // Геофиз. журн. — 2009. — 31, № 5. — С. 128—140.
- Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк П.И., Турутанов Е.Х.* О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1988. — № 3. — С. 81—86.
- Балк П.И., Деменев А.Г., Долгаль А.С., Легенцов О.В., Мичурин А.В.* Эффективность применения многопроцессорных вычислительных систем с целью оценки достоверности решения обратной задачи гравиметрии // Вестник Перм. ун-та. Геология. — 2010. — Вып. 1. — С. 50—57.
- Блох Ю.И.* Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. — Москва: МГГА, 1998. — 88 с.
- Блох Ю.И.* Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки: учеб. пос. — Москва: МГГА, 1993. — 79 с.
- Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. — Киев: Наук. думка, 2010. — 463 с.
- Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. — Москва: Наука, 1993. — 262 с.
- Вахромеев Г.С., Давыденко А.Ю.* Моделирование в разведочной геофизике. — Москва: Недра, 1987. — 192 с.
- Гравиразведка.* Справочник геофизика. — Москва: Недра, 1981. — 397 с.
- Дядюра В.А., Шалаев С.В.* Определение местоположения локальных геологических объектов по гравитационным аномалиям // Вопр. развед. геофизики. — 1968. — Вып. 8. — С. 31—36.
- Кобрунов А.И.* Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пос. — Москва: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. — 288 с.
- Кормен Т.Х., Лейзер Ч.Э., Риверст Р.Л.* Алгоритмы: построение и анализ. — Москва: Изд-во МЦМНО, 2006. — 893 с.
- Костоусова Е.К.* Полиэдральные аппроксимации в задачах гарантированного управления и оценивания: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 2005. — 27 с.
- Курант Р.* Уравнения с частными производными. — Москва: Мир, 1964. — 187 с.
- Майер В.И., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Численная оптимизация при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1985. — № 5. — С. 46—57.
- Миков Д.С.* Методы интерпретации магнитных аномалий. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. — 180 с.
- Овчаренко А.В.* Подбор сечения двумерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и рудной геофизики. — Алма-Ата: Изд-во Казах. политехн. ин-та, 1975. — Вып. 2. — С. 71—75.
- Перфильев Л.Г.* Некоторые вопросы обработки и интерпретации геолого-геофизических данных на ЭЦВМ: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Москва, 1972. — 28 с.
- Старостенко В.И.* О теории и методах интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки: некоторые соображения о потребностях сегодняшнего дня // Геофизика и математика. Матер. 1-й Всерос. конф. — Москва: Изд-во ОИФЗ РАН, 1999. — С. 126—127.
- Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев: Наук. думка, 1978. — 228 с.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. — 1976. — 227, № 2. — С. 344—347.
- Тихонов А.Н.* Математическая геофизика. — Москва: ОИФЗ РАН, 1999. — 476 с.
- Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 501—504.
- Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. — Москва: Наука, 1995. — 312 с.
- Шалаев С.В.* Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. — Ленинград: Недра, 1972. — 142 с.