

## Порог протекания и проницаемость частично расплавленных полиминеральных агрегатов

© О. В. Арясова, 2011

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 9 августа 2010 г.

Представлено членом редколлегии В. В. Гордиенко

Побудовано чисельну модель проникності частково розплавленого бімінерального агрегату, зерна якого мають різні форми та розміри, в припущенні, що розплави виникають тільки на ребрах контактуючих зерен різного складу. Припущено, що всі зерна складаються з однакових квадратних (у двувимірному випадку) або кубічних (тривимірна постановка) елементів двох різних складів. Приналежність елемента до одного із складів визначається випадковим чином. При цьому прийнято, що елементи однакового складу зі спільною гранню утворюють одне зерно, яке не має внутрішніх меж. Отже, зерна кожного з «мінералів» можуть мати складну форму і різні розміри. Показано, що для такого агрегату виникнення зв'язаної системи часткового плавлення потребує плавлення по ребрах не менш ніж приблизно 15 % зерен. Крім того, якщо в породі першою плавиться мінеральна фаза, модальний вміст якої є недостатнім для подолання порогу зв'язності, інфінітезимальне плавлення не супроводжується сегрегацією розплаву.

Permeability of partially molten bimineral aggregate with differing grain sizes and grain forms is numerically modeled. It is assumed that melt appears only at edges of contacting grains of different compositions. Every grain is supposed to consist of a number of identical square (2D case) or cubic (3D case) elements. Belonging of an element to one of the compositions is defined randomly. In this case it is assumed that the elements with the same composition, which share a side combine to form a grain without internal boundaries. Therefore the grains of each of «minerals» may have a complicated form and different sizes. It is demonstrated that formation of an infinite cluster of melt inclusions requires melting at the edges of more than about 15 % of grains. The latter value may be adopted as a permeability threshold. Therefore, if the modal content of the first consumed mineral phase is too low to overcome the connectivity threshold, an infinitesimal melting is not accompanied by melt segregation.

**Введение.** Проницаемость частично расплавленных агрегатов зависит, как известно, от содержания жидкости или пористости  $\phi$ , размера зерен  $a$  и топологии пористости, которая в термодинамическом равновесии определяется тем, как расплав смачивает твердую фазу [Laporte, Provost, 2000; Wark, Watson, 2000; Wark et al., 2003]. В свою очередь, топология распределения расплава зависит от равновесного значения заполненного расплавом двугранного угла между двумя зернами породы, имеющими общее ребро. Если равновесное значение этого угла меньше  $60^\circ$ , что типично для силикатных пород и их расплавов, то включения расплава в частично расплавленном агрегате образуют тубулы вдоль общих ребер трех зерен (так называемое тройное сочленение). В полиминеральных агрегатах, состоящих из одинаковых зерен, расплавы возникают одновременно на всех ребрах, причем тубулы образуют связную систему уже при инфинитезимальном плавлении. При этом проницаемость  $k(\phi)$  квадратично зависит

от размера зерен и степенным образом от содержания жидкости:  $k(\phi) \propto \mu a^2 \phi^n$ , где показатель степени  $n$  лежит в пределах от 2 до 3 [McKenzie, 1984; Wark et al., 2003].

В реальных породах зерна могут различаться по размеру и составу. Влияние размеров зерен на проницаемость полиминеральных агрегатов рассмотрели D. Wark и E. Watson [2000], которые пришли к заключению, что значительного отличия проницаемости таких систем от идеализированных частично расплавленных агрегатов, состоящих из зерен одинакового размера, нет. В то же время в полиминеральных агрегатах имеется определенная очередность плавления, зависящая как от состава, так и от давления [Walter, 2005]. Поэтому может оказаться, что вблизи солидуса при низкой степени плавления, когда плавится только один из минералов, модальное содержание которого мало, количества включений расплава не достаточно для возникновения связной системы. В частности, именно такая ситуация возможна при плавлении

мантийного перидотита в условиях, близких к подошве литосферы. В этом случае первой потребляемой при плавлении фазой является клинопироксен, массовое содержание которого даже в фертильных составах не превышает 20 % [Walter, 2005], а в средней мантийной породе менее 10 % [Pearson et al., 2005].

В настоящей статье показано, как зависит порог проницаемости агрегата, в котором расплавы возникают вдоль ребер только части зерен кристаллической структуры, от числа зерен, испытавших плавление. Эта задача будет рассмотрена в упрощенной постановке. Предполагается, что все зерна состоят из одинаковых квадратных (в двумерном случае) или кубических (трехмерная постановка) элементов двух различных составов. Принадлежность элемента одному из составов определяется случайным образом. При этом принимается, что элементы одинакового состава с общей гранью образуют одно зерно без внутренних границ. Таким образом, зерна каждого из «минералов» могут иметь сложную форму и различающиеся размеры. Предполагается, что расплавные включения возникают только на ребрах контактирующих зерен разного состава. Для каждого значения относительного количества элементов одного из составов проницаемость рассчитывалась многократно, что позволяет оценить среднестатистический порог проницаемости и зависимость проницаемости от содержания одного из «минералов».

**Проницаемость системы расплавных включений, расположенных на ребрах кубической решетки.** Рассмотрим полиминеральный агрегат, состоящий из различных по размеру и форме мономинеральных зерен двух различных составов. Как обсуждалось в работе [Арясова, Хазан, 2005], задача о протекании жидкости эквивалентна задаче о протекании тока через разветвленную систему сопротивлений.

Начнем с двумерной задачи. Упрощая реальную ситуацию, будем считать, что сам агрегат имеет форму прямоугольника, а все его элементы — форму одинаковых по размеру квадратов со стороной  $a$ . При этом два типа элементов отличаются по составу. Элементы одинакового состава формируют мономинеральные зерна различных размеров и форм. На рис. 1 показан агрегат, состоящий из зерен двух составов: 1 показан на рисунке черным цветом, 2 — белым. Пусть размеры агрегата равны  $La$ ,  $Wa$  по осям  $X$ ,  $Y$  соответственно. Верхняя и нижняя поверхности агрегата перпендикулярны к оси  $Y$  и являются идеально проводящими шинами,

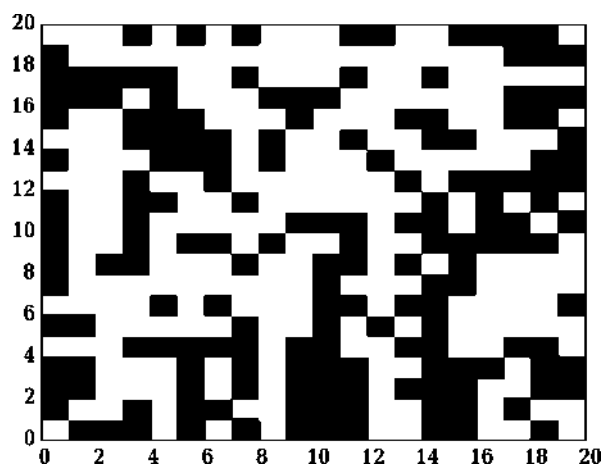


Рис. 1. Двумерный биминеральный агрегат.

между которыми поддерживается фиксированная разность потенциалов  $\Delta U$ . В реальных породах плавление начинается в местах тройных сочленений зерен. По аналогии примем, что в нашей модели проводящими являются только ребра на границах зерен различного состава. Иначе говоря, внутренние границы зерен должны быть непроводящими. Однако с точки зрения построения вычислительного алгоритма проще считать, что внутренние ребра также проводящие, но их проводимость  $\sigma_s$  мала по сравнению с проводимостью сочленений различных минералов  $\sigma_l$ , т. е. будем искать решение в пределе  $\sigma_s/\sigma_l \rightarrow 0$ . Нас интересует, при каких условиях система, состоящая из проводящих ребер в местах сочленений различных «минералов» (далее — проводящих ребер), будет связной, т. е. расплавные включения на этих ребрах образуют, по крайней мере, один кластер, пронизывающий весь агрегат от нижней до верхней шины. В первую очередь необходимо выяснить порог проницаемости такой системы — минимальный процент проводящих включений, при котором возникает проникающий кластер. Рассмотрим агрегат, состоящий из элементов двух различных составов. Пусть  $p$  — вероятность того, что элемент имеет состав 1, тогда  $1-p$  — вероятность того, что элемент имеет состав 2. О наступлении связности можно судить по резкому росту тока, протекающего через шины. Таким образом, для нахождения порога связности при фиксированном значении  $p$  разбрасываем случайным образом элементы состава 1 по решетке и определим значение тока. Повторяя многократно эту процедуру для того же значения  $p$ , найдем средний по большому числу реализаций полный ток  $I_p$ , протекающий

через шину. Заранее очевидно, что следует ожидать симметрии результатов относительно  $p=0,5$ .

Для алгоритмизации задачи о нахождении тока, протекающего сквозь агрегат при заданной разности потенциалов между шинами, воспользуемся методом, предложенном в работе [Арясова, Хазан, 2005]. По аналогии с этой работой, выберем в качестве неизвестных значения потенциалов в узлах решетки. Составим систему уравнений для нахождения этих неизвестных из условия равенства нулю суммы токов в каждом из узлов. Количество неизвестных системы очевидно совпадает с количеством узлов, не лежащих на шинах, и равно

$$N = (L+1) \times (W-1).$$

Рассмотрим внутренний узел решетки. Ток, подтекающий к узлу, определяется потенциалами в этом узле и в четырех ближайших узлах. Таким образом, в уравнение баланса токов для узлов, находящихся на первом снизу (над шиной) или последнем (под верхней шиной) «этаже», входят четыре неизвестных, для узлов на средних «этажах» — пять неизвестных. Поэтому максимальное число неизвестных, входящих в одно уравнение системы, равно 5.

Введем сквозную нумерацию узлов, начиная с первого снизу «этажа». Поскольку матрица будет иметь пятидиагональный вид, вместо матрицы размерностью  $N \times N$  будем сохранять матрицу размерностью  $N \times 5$ , записывая в нее только коэффициенты при неизвестных, входящих в уравнение. Для решения системы используется метод Зейделя [Самарский, 1989]. После нахождения потенциалов ток, протекающий через агрегат, ищется как сумма токов, протекающих через одну из шин.

С другой стороны, наличие связной системы проводящих ребер можно проверить явно. Будем «строить» такую связную систему, начиная с верхней шины. Вначале инициализируем единицами узлы верхнего «этажа», связанные проводящими ребрами с верхней шиной, и будем считать, что все они принадлежат разным кластерам. Закрепим за ними номера кластеров от 1 до  $n$ , где  $n$  — число таких узлов верхнего «этажа». Кроме того, создадим двумерный «массив кластеров», в котором будем сохранять номера кластеров и количество ребер в них. Таким образом, число двумерных элементов этого массива равно  $n$ . Первоначально все номера кластеров совпадают с номерами элементов массива, и каждый кластер содержит по одному элементу.

Используя метод поиска в ширину [Кормен и др., 2006], найдем все узлы, находящиеся на проводящих ребрах, и закрепим за каждым из них номер кластера «материнского» узла. Для удобства в дальнейшем будем называть такие узлы проводящими.

Теперь из проводящих узлов сформируем кластеры. Для этого, пробегаая все узлы сверху вниз, отыскиваем пары соседних проводящих узлов, соединенных проводящим ребром. Если узлы принадлежат разным кластерам, сравниваем номера соответствующих кластеров в «массиве кластеров» и меняем больший из них на меньший, увеличивая число элементов кластера с меньшим номером на единицу. Поменяем также номера всех остальных кластеров, имеющих такой же (больший из двух) номер. Если же оба узла принадлежат одному кластеру, увеличиваем на единицу число ребер соответствующего кластера в «массиве кластеров».

Дойдя до нижнего «этажа», проверяем, какие из проводящих узлов нижнего «этажа» связаны с нижней шиной проводящими элементами. Кластеры, которым они принадлежат, если такие существуют, и будут искомыми.

Аналогичным образом рассматривается трехмерная задача. Здесь считаем, что агрегат имеет форму параллелепипеда, а элементы — кубов с ребром  $a$ . Если размеры агрегата  $L_a, L_b, L_c$  по осям  $X, Y, Z$  соответственно, то количество неизвестных потенциалов в узлах решетки равно  $(L+1) \times (W+1) \times (H-1)$ , а матрица системы будет иметь семидиагональный вид. Для нахождения проводящих узлов в трехмерной модели метод поиска в ширину был модифицирован, что позволило сократить время работы программы.

**Обсуждение результатов.** Отметим, что как в двумерной, так и в трехмерной моделях значение среднего тока возрастает с ростом  $p$  и достигает максимума при  $p=0,5$ , при этом зависимость  $I_p$  от  $p$  оказывается симметричной относительно  $p=0,5$ . Также симметричными оказываются и другие результаты моделирования. Поэтому приведены результаты только для  $p$  в диапазоне  $[0, 0,5]$ : в табл. 1 и на рис. 2 — результаты численного моделирования для двумерных моделей, а в табл. 2 и на рис. 3 — для трехмерного агрегата. Поскольку в двумерном случае первые кластеры возникают при  $p=0,35 \div 0,40$ , в табл. 1 опущены результаты моделирования для значений  $p < 0,3$ . По аналогичным соображениям в табл. 2 опущены результаты моделирования для  $p < 0,1$ .

Общий характер всех кривых как в двумерном, так и в трехмерном случае совпадает. По-

Т а б л и ц а 1. Описание моделей. Двумерный случай

Размеры решетки	Параметр	$p$				
		0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
40×40	$C_p$	0	0	0	0,40	1,10
	$g_p$	2,32	2,82	3,60	4,67	6,81
	$n_c/n_l$	0	0	0,2244	0,7548	0,8386
	$I_p/I_{\max}$	0,0082	0,0237	0,1578	0,8518	1,0000
50×30	$C_p$	0	0,10	0,50	1,10	1,30
	$g_p$	2,26	2,77	3,51	4,68	7,15
	$n_c/n_l$	0	0,0239	0,2214	0,6485	0,8644
	$I_p/I_{\max}$	0,0088	0,0518	0,2184	0,8927	1,0000
30×50	$C_p$	0	0	0,10	0,90	1,50
	$g_p$	2,30	2,76	3,56	4,66	6,59
	$n_c/n_l$	0	0	0,0750	0,6433	0,8863
	$I_p/I_{\max}$	0,0079	0,0176	0,0644	0,7193	1,0000
60×60	$C_p$	0	0	0,30	1,20	1,30
	$g_p$	2,38	2,79	3,64	4,82	7,01
	$n_c/n_l$	0	0	0,0410	0,5964	0,9173
	$I_p/I_{\max}$	0,0094	0,0205	0,1273	0,7790	1,0000

Примечание:  $C_p$  — среднее количество кластеров,  $g_p$  — средняя величина зерна состава 1,  $n_c$  — среднее количество высокопроводящих ребер, входящих в кластер,  $n_l$  — среднее количество высокопроводящих ребер агрегата,  $I_p$  — среднее значение полного тока,  $I_{\max}$  — среднее максимальное значение тока.

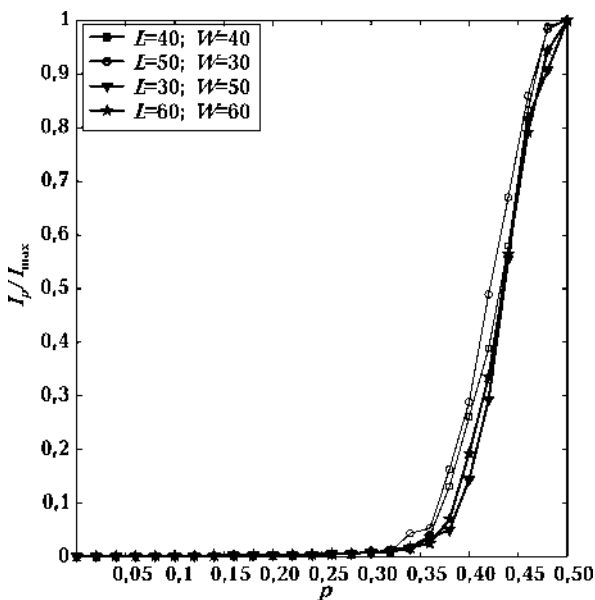


Рис. 2. Относительный ток  $I_p/I_{\max}$ , протекающий через шину двумерного агрегата.

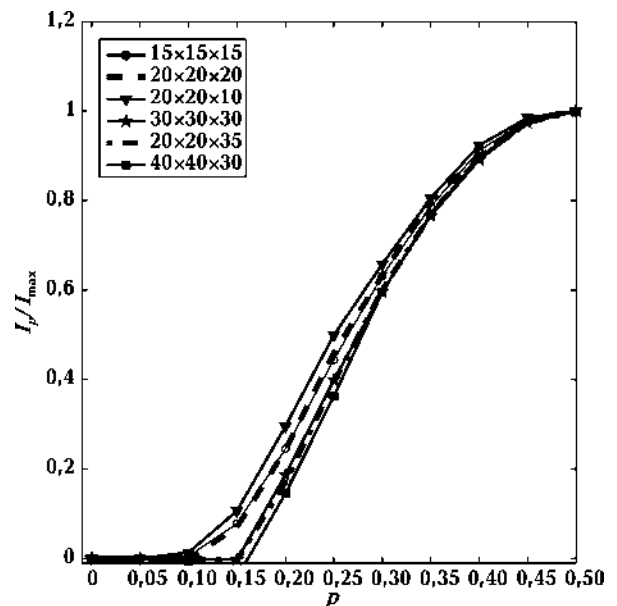


Рис. 3. Относительный ток  $I_p/I_{\max}$ , протекающий через шину трехмерного агрегата.

**Таблица 2. Описание моделей. Трехмерный случай**

Размеры решетки	Параметр	$p$								
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
15×15×15	$C_p$	0,40	1,20	1,20	1,20	1,10	1,00	1,00	1,00	1,10
	$g_p$	1,38	1,66	2,11	2,97	4,23	6,74	10,95	20,08	34,41
	$n_c/n_l$	0,082	0,738	0,940	0,964	0,973	0,974	0,975	0,976	0,976
	$I_p/I_{\max}$	0,005	0,078	0,245	0,444	0,632	0,786	0,912	0,979	1,000
20×20×10	$C_p$	0,70	1,50	1,40	1,30	1,10	1,10	1,10	1,00	1,00
	$g_p$	1,39	1,72	2,169	2,89	4,31	6,89	10,85	19,45	35,05
	$n_c/n_l$	0,161	0,748	0,925	0,951	0,960	0,963	0,963	0,964	0,965
	$I_p/I_{\max}$	0,004	0,078	0,245	0,444	0,632	0,786	0,912	0,979	1,000
20×20×20	$C_p$	0,40	1,30	1,20	1,00	1,10	1,20	1,20	1,00	1,10
	$g_p$	1,39	1,73	2,23	2,98	4,35	7,07	12,85	21,01	40,64
	$n_c/n_l$	0,071	0,837	0,951	0,973	0,980	0,982	0,982	0,982	0,982
	$I_p/I_{\max}$	0,000	0,071	0,243	0,460	0,633	0,803	0,898	0,982	1,000
20×20×35	$C_p$	0	1,40	1,00	1,30	1,00	1,10	1,10	1,20	1,10
	$g_p$	1,40	1,73	2,25	3,06	4,53	7,32	12,00	23,32	42,76
	$n_c/n_l$	0	0,87	0,96	0,983	0,988	0,99	0,99	0,99	0,99
	$I_p/I_{\max}$	0,000	0,000	0,171	0,393	0,600	0,769	0,896	0,974	1,000
30×30×30	$C_p$	0,30	1,30	1,30	1,10	1,20	1,10	1,00	1,00	1,10
	$g_p$	1,41	1,75	2,24	3,09	4,67	7,75	13,72	23,99	44,30
	$n_c/n_l$	0,056	0,887	0,967	0,983	0,987	0,989	0,989	0,989	0,989
	$I_p/I_{\max}$	0,002	0,003	0,187	0,399	0,596	0,766	0,891	0,974	1,000
40×40×30	$C_p$	0,60	1,20	1,20	1,20	1,10	1,20	1,30	1,00	1,10
	$g_p$	1,41	1,76	2,27	3,13	4,76	7,93	13,97	25,22	46,33
	$n_c/n_l$	0,0906	0,896	0,970	0,984	0,987	0,988	0,989	0,989	0,989
	$I_p/I_{\max}$	0,000	0,000	0,145	0,363	0,595	0,770	0,895	0,978	1,000

Примечание:  $C_p$  — среднее количество кластеров,  $g_p$  — средняя величина агрегата состава 1,  $n_c$  — среднее количество высокопроводящих ребер, входящих в кластер,  $n_l$  — среднее количество высокопроводящих ребер агрегата,  $I_p$  — среднее значение полного тока,  $I_{\max}$  — среднее максимальное значение тока.

явление первого пронизывающего кластера наблюдается как резкое возрастание тока.

Для трехмерной модели первые кластеры появляются при  $p \approx 0,15$ . С уменьшением высоты агрегата значение  $p$  незначительно уменьшается. При этом сразу до 75 % проводящих ребер входят в кластер. На решетках большего размера это значение достигает примерно 85 %. Заметим, что при низких значениях  $p$  почти в половине случаев возникает не один, а два кластера. Это происходит особенно часто в моделях с малой высотой решетки, когда агрегат имеет

уплощенную форму и кластеры «не успевают» встретиться. При низких значениях  $p$  возникают зерна, состоящие всего из нескольких, часто двух, элементов. По достижении порога связности среднее значение полного тока  $I_p$  растет практически пропорционально  $p$  до значений  $p \approx 0,40$ , достигая значения приблизительно  $0,98I_{\max}$ , где  $I_{\max}$  — среднее значение максимального тока, которое достигается при  $p \approx 0,50$ . Далее рост замедляется. Уже при  $p \approx 0,20$  около 95 % проводящих ребер включаются в кластер. Этот показатель с ростом  $p$  слегка растет и при

$p \cong 0,50$  только около 3 % проводящих ребер находятся вне проникающего кластера. Средний размер зерна состава 1 растет с увеличением  $p$  и размеров решетки.

В двумерном случае порог связности значительно выше, чем в трехмерном, и составляет приблизительно 0,35. Здесь различия между значениями для решеток разного размера менее заметны, а линейный характер роста относительного тока сохраняется до значений  $p > 0,45$ . Процент проводящих ребер, входящих

в кластер, несколько ниже, чем в трехмерном случае, и составляет примерно 90 % при  $p \cong 0,50$ .

Таким образом, можно заключить, что возникновение связной системы частичного плавления требует плавления по ребрам не менее 15 % зерен. Фактически, это означает, что в породе, в которой первой плавится минеральная фаза, модальное содержание которой не достаточно для преодоления порога связности, инфинитезимальное плавление не сопровождается сегрегацией расплава.

### Список литературы

- Арясова О. В., Хазан Я. М. Частичное плавление горных пород: связность включений расплава при плавлении по граням зерен кристаллической структур // Геофиз. журн. — 2005. — **27**, № 4. — С. 578—588.
- Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. — 2-е изд. — Москва: Вильямс, 2006. — 1296 с.
- Самарский А. А. Теория разностных схем. — 3-е изд., испр. — Москва: Наука, 1989. — 616 с.
- Laporte D., Provost A. The grain scale distribution of silicate, carbonate and metallosulfide partial melts: a review of theory and experiments // Physics and chemistry of partially molten rocks / Ed. N. Bagdassarov, D. Laporte, A. B. Thompson. — Kluwer Academic Publishers, 2000. — P. 93—140.
- McKenzie D. The generation and compaction of partially molten rock // J. Petrol. — 1984. — **25**. — P. 713—765.
- Pearson D., Canil D., Shirey S. Mantle samples included in volcanic rocks: Xenoliths and diamonds // The Mantle and Core. — Oxford: Elsevier-Pergamon, 2005. — P. 171—276.
- Walter M. J. Melt extraction and compositional variability in mantle lithosphere // The Mantle and Core. — Oxford: Elsevier-Pergamon, 2005. — P. 363—394.
- Wark D. A., Watson E. B. Effect of grain size on distribution and transport of deep-seated fluids and melts // Geophys. Res. Lett. — 2000. — **27**, № 14. — P. 2029—2032.
- Wark D. A., Williams C. A., Watson E. B., Price J. D. Reassessment of pore shapes in microstructurally equilibrated rocks, with implications for permeability of the upper mantle // J. Geophys. Res. — 2003. — **108** (B1). — DOI:1029/2001JB001575.