УДК 550.837

Магнитотеллурический импеданс: фундаментальные модели и возможности их обобщения

© *В. Н. Шуман, 2010*

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 2 февраля 2010 г.
Представлено членом редколлегии В. И Старостенко

Обговорено проблему імпедансного опису електромагнітного поля на поверхні неоднорідної Землі. Проаналізовано концепції тензора імпедансу, тензора Візе — Паркінсона, узагальненого тензора імпедансу, імпедансного наближення Леонтовича та його узагальнень. Підкреслено, що ці моделі носять частковий характер, дійсні тільки за спеціальних форм задання збуджувального поля і не завжди відповідають умовам проведення реального магнітотеллуричного експерименту. Наведено узагальнену систему векторних тотожностей імпедансного типу для гармонічного електромагнітного поля на замкнутих межах розподілу та генероване на їх основі узагальнене точне диференціальне рівняння імпедансів, а також систему скалярних рівнянь, які визначають цю поверхню. Зазначиено, що за необхідності використання їх неповних укорочених форм ці моделі порівняно з класичними в принципі містять внутрішні критерії свого застосування і не потребують для свого обґрунтування додаткових емпіричних або евристичних доповнень.

A problem of impedance description of magnetic field on the surface of heterogenic Earth is discussed in the article. The concepts of impedance tensor, Vise — Parkinson tensor, generalized impedance tensor, Leontovich's impedance approximation and its generalization are analyzed. It is noticed that these models are of particular character and are real only in cases of special forms of giving primary field and do not always correspond to conditions of conducting real magnetotelluric experiment. Generalized system of vector identities of impedance type is given for harmonic electromagnetic field on the closed interfaces and generated on their base generalized accurate differential equation of impedances and the system of scalar equations which determine this surface. It is noticed that in case of necessity of using their incomplete, truncated forms these models in contrast to classical ones, have interior criteria of their application and do not demand for their substantiation any additional empirical or heuristic considerations.

Введение. Проблема импедансного описания электромагнитного поля на границе раздела «диэлектрик — хорошо проводящая среда» имеет сравнительно давнюю историю и довольно обширную библиографию, в которой представлены различные ее аспекты, включая вопросы физической трактовки и методы экспериментальных оценок. Фундамент соответствующей физической теории был заложен в 40-х годах прошлого века в работах Рытова (1940), Щелкунова (Schelkunoff) (1943), Букера (Booker) (1947), Леонтовича (1948) и ряда других исследователей, которые стали уже классическими. Начиная с фундаментальных работ Тихонова (1950) и Каньяра (1953), концепция поверхностного или входного импеданса прочно вошла в практику геоэлектромагнитных исследований земной коры, а изучение импедансных соотношений стало одной из ключевых проблем геоэлектрики. Целесообразность их практического применения станет более понятной, если принять во внимание основную идею магнитотеллурической разведки, сущность которой состоит в выборе такой комбинации компонент естественного электромагнитного поля, измеренных на земной поверхности, которая, по возможности, слабо зависела бы от его структуры в верхнем полупространстве (воздухе) и всецело определялась бы функцией распределения электропроводности в Земле, нахождение которой и является целью магнитотеллурического эксперимента.

Заметим, что все эти годы шло интенсивное накопление экспериментального материала, его осмысления и разработки методов истолкования полученных данных. О конструктивном характере эвристической идеи импедансного описания и ее возможностях экспериментального применения, развитие которой продолжается до настоящего времени, может свидетельствовать та активная дискуссия, которая ведется сегодня в таких ведущих изданиях, как «Успехи физических наук» [Альшиц, Любимов, 2009; 2010; Гульельми, 2009; 2010], «Письма в ЖЭТФ» [Гульельми, 2009], «Физика Земли» [Гульельми, 2009]. Продолжается дискуссия и по вопросу обоснования импедансного описания отклика в современной геоэлектрике, характеризующаяся некоторой специфичностью постановки задачи (см., например, [Дмитриев, Бердичевский, 2002; Шуман, 2009] и цитируемую там литературу). Однако при этом вызывает недоумение то обстоятельство, что упомянутые дискуссии идут как бы в различных плоскостях. Они слабо связаны между собой, а имеющиеся в физических изданиях упоминания или указания на возможность использования полученных результатов в геофизике фрагментарны, не вполне очерчены и корректны. Очевидно, имеется потребность в анализе полученных результатов, их обобщении и развитии соответствующего формализма с учетом взаимодействия физического и математического аспектов. Этой стороне проблемы, определяющей методологическую основу геоэлектромагнетизма, и посвятим дальнейшее изложение.

Модель тензора импеданса и ее ограничения. Как известно [Бердичевский, Дмитриев, 2004], основными базовыми методами современной геоэлектрики с естественным возбуждением поля являются магнитотеллурическое зондирование (МТЗ), в котором синхронно измеряются вариации электрического и магнитного полей в точке регистрации на земной поверхности, и локальное магнитовариационное зондирование (МВЗ), при котором ограничиваются измерением только магнитного поля. При этом входной импеданс (импеданс на границе раздела «земля—воздух») в теории магнитотеллурики определяется на двух модельных уровнях [Дмитриев, Бердичевский, 2002].

Первый — это скалярный импеданс горизонтально-слоистой структуры, возбуждаемой полем с линейныи изменением его тангенциальных магнитных компонент (импеданс Тихонова — Каньяра). В этой одномерной модели

$$E_x = ZH_y\,,\ \ E_y = -ZH_x\,, \qquad (1)$$

где Z — скалярный импеданс, являющийся функционалом электропроводности $\sigma(z)$ — непрерывной или кусочно-непрерывной функции глубины z.

Второй — тензор импеданса горизонтально-неоднородной среды, возбуждаемой вертикально падающей на эту границу раздела плоской волной. В этом случае определяется как тензор импеданса

$$[Z]=\begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}\left(E_{x1}\,H_{y2}-E_{x2}\,H_{y1}\right)\left(E_{x2}\,H_{x1}-E_{x1}\,H_{x2}\right)\\ \left(E_{y1}\,H_{y2}-E_{y_2}\,H_{y1}\right)\left(E_{y2}\,H_{x1}-E_{y1}\,H_{x2}\right)\end{bmatrix}}{E_{x1}\,H_{y2}-E_{x2}\,H_{y1}}\,,$$

связывающий между собой тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E}\tau=[Z]\mathbf{H}\tau\,, \qquad (2)$$

а индексы 1 или 2 обозначают поля от двух линейно независимых источников различной поляризации, так и тензор Визе — Паркинсона (типпер)

$$[W]=\lfloor W_{zx}\; W_{zy}\rfloor,$$

связывающий вертикальную компоненту магнитного поля вариации с его горизонтальными компонентами

$$H_z = W_{zx}\,H_x + W_{zy}H_y\,. \qquad (3)$$

В классическом варианте магнитотеллурических исследований метод МТЗ играет ведущую роль, в то время как метод МВЗ сводится к распознаванию и локализации неоднородностей разреза. Однако в последнее время возрастает интерес к такому комплексу мт-исследований, в котором роль базисного метода отводится МВЗ, а МТЗ служит для контроля и уточнения получаемых результатов [Бердичевский, Дмитриев, 2004]. При этом подразумевается трехмерная инверсия импедансов и типперов, чувствительная к стабильности экспериментальных оценок компонент упомянутых функций отклика (тензоров [Z] и [W]). Однако, как свидетельствует эксперимент, реализуемая в рамках этой модели точность определения компонент этих тензоров, как правило, ниже точности измерений составляющих поля вариаций и зачастую не дает повода для излишнего оптимизма (см., например, [Eisel and Egbert, 2001; Варенцов и др., 2003]). Существует физический аспект проблемы: типпер более чувствителен к эффектам источника поля, чем импеданс, т.е. временная изменчивость его частных оценок значительно выше импедансных, а качество линейных связей, в целом, существенно ниже.

С целью расширения возможностей магнитотеллурики в работе [Дмитриев, Бердичевский, 2002] предложена обобщенная модель импеданса, которая включает упомянутые выше два модельных уровня и дополняет их третьим: «...тензором импеданса горизонтально-неоднородной среды, возбуждаемой полем с линейным изменением его горизонтальных компонент и вертикальной магнитной компонентой»

$$\mathbf{E} = \left[\tilde{Z}'\right]\mathbf{H}\,;$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(E_x, E_y, E_z = 0\right), \ \ \mathbf{H} = \mathbf{H}\left(H_x, H_y, H_z\right),$$

$$\left[\tilde{Z}'\right] = \begin{bmatrix} Z'_{xx} & Z'_{xy} & Z'_{xx} \\ Z'_{yx} & Z'_{yy} & Z'_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Заметим, что в этом случае определение тензора Визе — Паркинсона не предусматривается, так как он может и не существовать. Однако, несмотря на предпринятую таким образом попытку учета вертикальной компоненты H_z в нормальном поле, положенная в ее основу модель возбуждения неоднородной среды в виде системы замкнутых токов в локальной области непроводящей атмосферы (см. рис. 1 работы [Дмитриев, Бердичевский, 2002]) отражает лишь частный специфический аспект проблемы и в общем случае не меняет существа дела.

Как известно, физика формирования электромагнитного отклика на поверхности Земли, вообще говоря, совершенно иная и на данном этапе может быть сформулирована на основе современной концепции глобальной электрической цепи как фундаментальной геофизической системы в электромагнитном окружении Земли. Она позволяет рассматривать магнитосферу, ионосферу, атмосферу и литосферу в качестве единой электродинамической структуры. Эта цепь формируется совокупностью источников ЭДС, являющихся результатом ряда геофизических процессов разделения и накопления зарядов, сосредоточенных в атмосфере, магнитосфере, ионосфере и литосфере. Ее токовый контур наряду с относительно тонким стратифицированным атмосферным участком (проводимость атмосферы увеличивается с высотой по экспоненциальному закону и на высотах более 50 км может считаться проводником с проводимостью, сравнимой со средней проводимостью Земли) включает плазменную ионосферно-магнитосферную и твердотельную литосферную оболочки, высокая проводимость которых является необходимым условием функционирования системы [Анисимов, Мареев, 2008].

Обобщенная глобальная электрическая цепь включает генератор ЭДС на внешней границе магнитосферы (магнитопаузе), управляемый энергией солнечного ветра, атмосферные генераторы электрического поля в нижней атмосфере (грозы), электрически связанные с ионосферой и магнитосферой вдоль геомагнитных силовых линий и, далее, генератор ЭДС на внутренней границе поверхности Земли, обусловленный естественной радиоактивностью Земли и электронно-ионными потоками из ее недр. При этом продольные токи вдоль силовых линий геомагнитного поля связывают внешнюю магнитосферу и ионосферу, а наличие слабо проводящей (но не электрически нейтральной) атмосферной оболочки заставляет продольные магнитосферные токи замыкаться на ионосферу. Заметим, что сложность исследований глобальной цепи состоит в том, что ионосфера и литосфера — омические среды, где электрическое поле и ток связывает закон Ома. В магнитосфере прямой связи между электрическим полем и током нет.

Концепция обобщенной глобальной электрической цепи стимулировала новый подход к определению структуры геомагнитных вариаций на поверхности Земли и ее атмосфере, в частности к проблеме наличия в ней тороидального магнитного поля. В рассматриваемом контексте важное значение имеет теорема Фукушимы [Fukushima, 1976]: *при однородной проводимости ионосферы и радиальных силовых линиях геомагнитного поля, вдоль которых текут продольные токи, магнитный отклик на земной поверхности, формируемый этими токами, полностью компенсируется полем ионосферных педерсеновских токов.*

Однако (ввиду отсутствия полной симметрии) в природе такой механизм реализуется лишь частично, только в первом приближении. В итоге, так как атмосферный слой относительно тонкий, продольные токи в магнитосфере (как и вертикальные токи в области «Земля—ионосфера») формируют тороидальную компоненту в магнитном отклике на земной поверхности: как свидетельствует эксперимент и теоретические расчеты, даже в средних широтах возможно появление тороидальной компоненты магнитного поля [Kisabet, Rostoker, 1977]. Не удивительно, что в столь трудно формализуемой ситуации (при бимодальном возбуждении Земли) неизбежное распространение получили различные интуитивные идеи и подходы описания электромагнитного отклика, основанные на весьма упрощенных физических представлениях, к которым, очевидно, можно отнести и модели тензора и обобщенного тензора импеданса, тензора Визе — Паркинсона, определяемые равенствами (2), (4) и (3).

Приближение Леонтовича и современная магнитотеллурика. Как известно [Леонтович, 1948], на границе раздела «изотропный диэлектрик — изотропная проводящая среда» с большой комплексной диэлектрической проницаемостью $|\varepsilon| >> 1$ приближенно выполняется граничное условие Леонтовича:

$$\mathbf{E}_\tau - \zeta \mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ — касательные компоненты электрического и магнитного полей, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, ζ — поверхностный импеданс. Согласно [Леонтович, 1948], его вывод основан на соображениях качественного характера о структуре электромагнитного поля в проводящей среде вблизи границы раздела, а условия применимости детально обсуждались Рытовым (1940), Леонтовичем (1948), Senior and Volakis (1995) и другими исследователями и в сумме сводятся к следующим:

- внешнее поле вдоль границы раздела изменяется медленно в масштабе длины волны λ_0 в вакууме;
- изменение свойств среды медленное в масштабе локальной длины волны в ней;
- в каждой точке среды величина $|n| >> 1$, где $n = \sqrt{\varepsilon\mu / \varepsilon_0\mu_0}$ — фактор рефракции; $|\mathrm{Im}\, n| k_0\rho >> 1$, где ρ — наименьший радиус кривизны поверхности раздела, $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}$.

При выполнении настоящих условий $\zeta(\omega) = \sqrt{\mu/\varepsilon} = \zeta' + i\zeta''$ (поверхностный импеданс) — величина малая. Знаки компонент $\zeta'>0$ и $\zeta''<0$ определяются условиями диссипации энергии внутри проводящей среды. Приближение Леонтовича хорошо работает в оптике, радиофизике, ряде других задач электродинамики. Однако с целью расширения диапазона применимости метода недавно в работе [Альшиц, Любимов, 2009] предложено обобщение приближения Леонтовича для случая произвольных значений ζ:

$$\mathbf{E}_\tau = \zeta \mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n} + \zeta(1 - R)\mathbf{N}\mathbf{H}_\tau, \tag{6}$$

где $R(\zeta n) = \sqrt{1 - (\zeta n)^2}$, $N(\zeta n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{R(\zeta n)} & 0 \end{pmatrix}$ — матрица $2{\times}2$.

Равенство (6) получило название точного граничного условия Леонтовича при произвольном значении ζ.

Видно, что уравнение (6) по сравнению с классическим уравнением Леонтовича (5) имеет качественно иной вид: в матричной связи между тангенциальными векторами $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ в явном виде появляется фактор рефракции n, который в задаче об отражении волн однозначно связан с углом падения.

Напомним в этой связи, что сочетая приближенное условие Леонтовича (5) с уравнением индукции

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = \frac{\mathbf{i}\omega}{c}\ \mathbf{H},$$

Гульельми получено уравнение импеданса в форме [Гульельми, 1989]

$$A\frac{\partial\zeta}{\partial x} + B\frac{\partial\zeta}{\partial y} + c\zeta + D = 0, \tag{7}$$

где

$$A = H_x,\quad B = H_y;\quad c = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y},\quad D = \left(\frac{i}{\lambda_0}\right)H_z,$$

$\lambda_0 = c/\omega$ — длина волны в вакууме.

Более общий вывод (7) с указанием условий применимости дан Рытовым [Рытов, 1940]. Уравнение (7), в принципе, позволяет находить распределение $\zeta(x, y)$ по латерали и таким образом может быть полезным при истолковании результатов магнитовариационного эксперимента. Однако, как и приближение Леонтовича (5), на основании которого оно получено, также требует неформального предположения об изменении в среде ниже границы раздела фазы волны весьма частного вида поля — плоской монохроматической волны, которое, вообще говоря, и определяет геометрическую (и математическую) структуру поля в ней. Однако геосреда — очень специфический объект исследований. Неоднородности различного ранга составляют саму ее сущность и должны рассматриваться не как отклонения от некой нормы, а как сама норма (см., например, [Красный, Блюман, 1998; Садовский, 2004]. Именно на изучение такого объекта и ориентирован комплекс магнитотеллурического и магнитовариационного методов зондирования. Но в существенно неоднородной среде, вообще говоря, нет распространяющихся (бегущих) волн — волны являются стоячими [Раутиан, 2008]. В этом случае, очевидно, можно говорить лишь о локальном значении фактора рефракции n в какой-то определенной точке среды или, в лучшем случае, о неком эффективном его значении в рамках некоторой аналогии с однородной средой. При этом, разумеется, геометрия волны задается особенностями среды — ее комплексными проницаемостями. Она может быть определена лишь по формулам для решения уравнений Максвелла и тем самым оказывается следствием особенностей исследуемой среды. С этой точки зрения бытующие представления о том, что в основу комплекса методов МТЗ—МВП может быть положено приближение Леонтовича вместо или наряду со стандартными тензорными соотношениями (2), (3), (4) в общем случае не вполне обосновано и нуждается в детализации. Говоря точнее, здесь, скорее, не вполне адекватно ни приближение Леонтовича, ни тензорный подход, при котором передаточные операторы корректны лишь при специальных формах задания падающего поля. Сказанное относится и к поправкам к уравнению (5), связанным с горизонтальной неоднородностью индуцирующего поля, которые могут быть получены по результатам анализа процесса с помощью параболического уравнения. В этих условиях кажется вполне уместным и правильным следующий вопрос: нельзя ли предложить более общий и в некотором смысле альтернативный подход к описанию магнитотеллурического процесса на земной поверхности, сохраняющий конструктивный характер классических представлений, но лишенный, по крайней мере частично, присущих им недостатков и ограничений? Как оказалось, в ряде случаев можно дать положительный ответ [Шуман, 2007а; 2007б, 2008, 2009; Семенов и др. 2007].

О локальных условиях импедансного типа для гармонического электромагнитного поля на границе неоднородной области. Предположим теперь, что внутри некоторой области D комплексная электропроводность $\sigma^*(\mathbf{r})=\sigma(\mathbf{r})-i\omega\varepsilon(\mathbf{r})$ есть произвольная непрерывная (вплоть до границы S_0) функция координат, а магнитная проницаемость $\mu=\mathrm{const}$. Пусть на границе S_0 области D заданы векторные функции $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$, непрерывные по Гельдеру на S_0, имеющие там дифференцируемые тангенциальные компоненты, причем нормальные и тангенциальные компоненты этих векторных функций на S_0 связаны соотношениями

$$H_n=-\frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{div}_{S0}[\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\tau]:$$

$$E_n=-\frac{1}{\sigma^*}\operatorname{div}_{S0}[\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\tau] \qquad (8),$$

где H_n, E_n, $\mathbf{H}_\tau$, $\mathbf{E}_\tau$ — нормальные и тангенциальные компоненты векторных функций $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$ на поверхности S_0. Однако условия (8), являются необходимыми, но не достаточными для того, чтобы $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$, были бы краевыми значениями электромагнитного поля, удовлетворяющего всюду в D вплоть до границы S_0 уравнением Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma^*(\mathbf{r})\mathbf{E},\ \nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\,\mathbf{H}. \qquad (9)$$

Для этого они, помимо соотношений (8), должны удовлетворять также некоторым интегральным краевым условиям для электромагнитного поля на границе S_0 неоднородной области D (см. [Жданов, 1984]). В силу принципа единственности [Harrington, 1961] электромагнитное поле в конечной области, свободной от источников, однозначно определяется тангенциальными компонентами поля на ее границе.

Заметим, что тангенциальные комплексные амплитуды $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ описывают вращающиеся поля и, следовательно, не имеют определенного направления. Для описания этой границы (поверхности S_0) удобно ввести в рассмотрение унитарное векторное пространство второй размерности над полем комплексных чисел C, в котором задано скалярное умножение векторов, норма и условие ортогональности [Aboul-Atta, Boerner, 1975; Мальцев, 1975]. Как известно, любые два линейно независимые тангенциальные векторы электромагнитного поля, являющиеся решением уравнений

Максвелла, покрывают в форме базиса рассматриваемое унитарное векторное пространство второй размерности. В качестве таковых, следуя [Aboul-Atta, Boerner, 1975], выберем два тангенциальных вектора на S_0 нетривиального ($\mathbf{n}\times\mathbf{H}\neq 0$) магнитного поля

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}\times\mathbf{H}^*\times\mathbf{n}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе раздела; звездочкой обозначено комплексное сопряжение, и определим на S_0 два скалярных параметра (импеданса) в качестве коэффициентов разложения двойного векторного произведения $\mathbf{n}\times\mathbf{E}\times\mathbf{n}$ по ортогональному базису (10):

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}\times\mathbf{n} = \zeta(\mathbf{n}\times\mathbf{H}) + \xi^*\left(\mathbf{n}\times\mathbf{H}^*\times\mathbf{n}\right), \qquad (11)$$

где

$$\zeta = -\frac{\mathbf{n}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)}{\left\|\mathbf{n}\times\mathbf{H}\right\|^2},$$

$$\zeta^* = \frac{(\mathbf{n}\times\mathbf{E})(\mathbf{n}\times\mathbf{H})}{\left\|\mathbf{n}\times\mathbf{H}\right\|^2},$$

$$\left\|\mathbf{n}\times\mathbf{H}\right\|^2 = (\mathbf{n}\times\mathbf{H})\left(\mathbf{n}\times\mathbf{H}^*\right) = \left\|\mathbf{n}\times\mathbf{H}^*\times\mathbf{n}\right\|^2.$$

Единственность разложения (11) следует из линейной независимости и ортогональности векторов $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$ и $\mathbf{n}\times\mathbf{H}\times\mathbf{n}$. Напомним, что ортогональность комплексных векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ определяется в соответствии со стандартным определением для комплексных евклидовых пространств

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \mathbf{c}\mathbf{d}^* = 0.$$

Возвращаясь к векторному тождеству для гармонических полей (11), замечаем, что оно содержит два скалярных параметра (импеданса) — ζ и ξ^*. Физический смысл скалярного импеданса ζ довольно прозрачен: это величина нормальной на S_0 компоненты комплексного вектора Пойнтинга, нормированная на действительное число $2\left\|\mathbf{n}\times\mathbf{H}\right\|^2$. В частности, вещественная часть ζ, т.е. $\mathrm{Re}\zeta$ — нормированная величина поверхностных потерь от вихревых токов, возбуждаемых в среде (области D), т.е. нормированная «поверхностная плотность» выделяющегося тепла. Что касается скалярного коэффициента (импеданса) ξ^*, то согласно определению, он может интерпретироваться в качестве «меры» ортогональности (сопряженной ортогональности с точки зрения введенного ранее унитарного векторного пространства второй размерности) комплексных векторов $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}\times\mathbf{H}$:

$$\left((\mathbf{n}\times\mathbf{E}), (\mathbf{n}\times\mathbf{H})^*\right) = (\mathbf{n}\times\mathbf{E})(\mathbf{n}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}_\tau\mathbf{H}_\tau. \qquad (12)$$

Напомним также, что эллипсы поляризации (годографы гармонически изменяющихся векторов $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ ортогональных полей $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$) ортогональны, а их большие оси взаимно перпендикулярны. Неортогональность комплексных векторов $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$ может быть обусловлена свойствами источника поля, анизотропией или тангенциальной неоднородностью среды в точке регистрации поля на S_0. При этом высокая проводимость среды распространения поля является фактором, нивелирующим такие особенности поля, как его пространственные градиенты, а также неперпендикулярность больших осей эллипсов поляризации полей $\mathbf{E}_\tau$ и $\mathbf{H}_\tau$.

Далее, следуя [Шуман, 2007а, 2007б] и комбинируя формулу

$$i\omega\mu H_n = \nabla_\tau(\mathbf{E}_\tau\times\mathbf{n}), \qquad (13)$$

где $\nabla\tau$ — поверхностная дивергенция, определяющую связь нормальной компоненты комплексной амплитуды магнитного поля с тангенциальной составляющей электрического поля $\mathbf{E}_\tau$ с векторным тождеством (11), можем записать граничное условие

$$i\omega\mu H_n = \nabla_\tau(\zeta\mathbf{H}_\tau) + \nabla\tau\left(\xi^*\left[\mathbf{H}^*\times\mathbf{n}\right]\right), \qquad (14)$$

связывающее между собой все компоненты гармонического магнитного поля на S_0.

Равенство (14) может быть названо обобщенным уравнением импедансов, если считать неизвестными скалярные параметры ζ и o^* и их горизонтальные градиенты в точке регистрации поля на S_0, а другие величины H_n, $\mathbf{H}_\tau$, $\nabla_\tau\mathbf{H}_\tau$, $\mathbf{H}^*\times\mathbf{n}$ и $\nabla_\tau(\mathbf{H}_\tau\times\mathbf{n})$ — известными из наблюдений. Оно обобщает приближенное граничное условие Гульельми [Гульельми, 1989]:

$$i\omega\mu H_n = \nabla_\tau(\zeta\,\mathbf{H}_\tau), \qquad (15)$$

в котором ζ — скалярный импеданс. Сравнивая соотношения (14), (15), легко видеть, что точное граничное условие (обобщенное уравнение импедансов) (14) имеет качественно иной вид: в нем присутствует второе слагаемое, содержащее второй скалярный импеданс o^*, наличие которого обусловлено снятием ограничений как на вид функции $\sigma(\mathbf{r})$ в D, так и на характер и тип внешних по отношению к области D источников поля.

Обобщенное уравнение импедансов (14) представляет интерес с точки зрения геоэлектромагнитных приложений, по крайней мере, в трех аспектах [Шуман, 2007а]. Во-первых, оно подводит черту под многочисленными попытками установления связи между компонентами гармонического поля в точке его регистрации на земной поверхности (см., например, работу [Кикес, 1985 и др.]) и дает ясную трактовку коэффициентам этой связи. Во-вторых, позволяет естественным образом обобщить и объединить такие классические методы локальных магнитовариационных исследований, как метод магнитовариационного зондирования с использованием пространственных производных магнитного поля и глубинного геомагнитного зондирования. В-третьих, способствует пониманию возможностей и ограничений их использования на практике. Видны и трудности их практической реализации. Однако существенно то, что эксперимент полностью и единообразно реализуется в терминах двух скалярных параметров (импедансов) и их горизонтальных градиентов. В итоге в существенной степени снимается проблема адекватности математических моделей локального описания электромагнитного отклика реальному магнитотеллурическому эксперименту на реальной Земле.

Мнимые поверхностные векторы и обратные задачи геоэлектрики. Как известно [Aboul-Atta, Boerner, 1975], на основе векторного тождества (11) могут быть синтезированы (определены) два независимых мнимых поверхностных (тангенциальных) вектора $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{K} = \zeta\left(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}\right) - \zeta^*\left(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*\right);$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{E} \times \mathbf{E}^* - \left(|\zeta|^2 + |\xi|^2\right)\left(\mathbf{H} \times \mathbf{H}^*\right) + \\ + \xi^*\left(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*\right) - \zeta\left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right),$$

$$\mathbf{nL} = \mathbf{nK} = 0, \quad \mathbf{L} = -\mathbf{L}^*, \quad \mathbf{K} = -\mathbf{K}^*. \qquad (16)$$

Их ортогональность $(\mathbf{L}, \mathbf{K}) = \mathbf{LK}^* = 0$ и равенство норм $\|\mathbf{K}\| = \|\mathbf{L}\|$ позволяет выписать два точных скалярных уравнения (inverse scattering surface equations), полностью определяющих рассматриваемую границу S_0 [Aboul-Atta, Boerner, 1975]:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{L}, \mathbf{K}^*\right) = \mathbf{LK} = 0, \\ \| \mathbf{L} \| = \| \mathbf{K} \|. \end{cases} \qquad (17)$$

Примечательно, что все комбинации напряженностей электромагнитного поля, регистрируемого на S_0 (все его шесть компонент), вносят вклад в эту точную модель. На этой основе можно попытаться улучшить классическую схему решения обратной магнитотеллурической задачи, если использовать в качестве исходной информации распределение на S_0 мнимых поверхностных векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$, порождаемых точным векторным импедансным тождеством (11), и сформулировать ее, к примеру, следующим образом (для некоторой оптимальной поляризации поля) [Шуман, 2007]:

$$\left\|\mathbf{K}^p(x, y, \omega) - \mathbf{K}^q(x, y, \omega)\right\| \le \delta, \quad \min \Omega\left(\sigma^*\right), \qquad (18)$$

где $\mathbf{K}^p$ — мнимый поверхностный вектор, определяемый на S_0 по экспериментальным наблюдениям, $\mathbf{K}^q$ — вычисленный теоретически для заданного в D распределения $\sigma^*(\mathbf{r})$, а $\Omega(\sigma^*)$ — функционал, выделяющий класс моделей среды, на котором решается обратная задача. Такой подход к решению обратной магнитотеллурической задачи может быть назван методом мнимого поверхностного вектора. Очевидно, в этом случае можно избежать ряда проблемных вопросов, связанных с обработкой данных полевых наблюдений: все эти процедуры, в отличие от обычного импедансного приближения, являются корректными.

Нелокальные векторные тождества импедансного типа на поверхности неоднородной сферической Земли и система скалярных уравнений, определяющих ее поверхность. Конкретизируем некоторые положения общей теории импедансных измерений применительно к неоднородной сферической Земле [Шуман, 2007].

С целью упрощения дальнейшего изложения кратко напомним некоторые известные соотношения электродинамики в сферическом слое или области [Baskus, 1986].

Как известно, условие бездивергентности позволяет представить поле в сферическом слое через два скалярных потенциала. Такое представление широко используется в теории гидромагнитного динамо и в сферическом слое $S(a,c)$ имеет вид [Baskus, 1986]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{Pol}} + \mathbf{B}_{\mathrm{Tor}} = \nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P + \Lambda_1 Q =$$

$$= e_r\left(r^{-1}\nabla_1^2 P\right) - \nabla_1\left[r^{-1}\nabla r(rP)\right] + \mathbf{\Lambda}_1 Q, \qquad (19)$$

где P и Q — произвольные скалярные функции сферических координат (r, θ, φ); $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$; ∇_1 — безразмерный поверхностный градиент:

$$\nabla_1 = \mathbf{e}_\theta \partial/\partial\theta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\nabla_s = \nabla - \mathbf{e}_r\nabla_r; \ \nabla_r = \mathbf{r}\cdot\nabla = \partial/\partial r,$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = r\mathbf{\Lambda}_s = \mathbf{r}\times\nabla = -\mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}_s = \mathbf{e}_r \times \nabla_s$ — поверхностный ротор, ∇ — оператор Гамильтона:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_r \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right].$$

Полоидальный P и тороидальный Q скаляры (потенциалы) удовлетворяют равенствам [Baskus, 1986]

$$\nabla_1{}^2 P = \mathbf{r}\cdot\mathbf{B} = rB_r, \ \nabla_1{}^2\left[r^{-1}\nabla_r(r\ P)\right] = -\nabla_1\mathbf{B}_s,$$

$$\nabla_1{}^2 Q = \mathbf{\Lambda}_i\mathbf{B}_s, \ \mathbf{B}_s = \mathbf{B} - \mathbf{e}_r B_r. \qquad (20)$$

В соответствии с (20) можно записать [Backus, 1986]

$$P = \nabla_1{}^{-2}(\mathbf{rB}) = \nabla_1{}^{-2}(rB_r),$$

$$\nabla_r(rP) = -\nabla_1{}^{-2}(r\nabla_1\mathbf{B}_s),$$

$$Q = \nabla_1{}^{-2}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{B}_s) = \nabla_1{}^{-2}(\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{B}). \qquad (21)$$

Как следует из (21), потенциалы P и Q, а также $\nabla_r(r\,P)$ определяются неоднозначно и для их однозначного определения необходимо положить

$$\langle P\rangle_r = \left\langle r^{-1}\nabla_r(r\ P)\right\rangle = \langle Q\rangle_r = 0, \qquad (22)$$

где знак $\langle\cdot\rangle$ означает среднее от соответствующей функции на сфере радиуса r=const.

Пусть $f(r,\theta,\varphi)$ — гладкая функция, среднее от которой на сфере радиуса r, т.е. $\langle f\rangle\big|_r$, обращается в нуль. Тогда она может быть разложена по поверхностным гармоникам [Baskus, 1986; Моффат, 1980]:

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r)\,S_n(\theta,\varphi), \qquad (23)$$

где в силу условия $\langle f\rangle\big|_r = 0$ исключен член с $n=0$, а коэффициенты $f_n(r)$ равны

$$f_n(r) = \langle f\ S_n\rangle_r \Big/ \left\langle S_n{}^2\right\rangle_r \qquad (24)$$

с учетом соотношений ортогональности $\langle S_n S'_n\rangle\big|_r = 0$ при $n=n'$. Если теперь положить $\nabla_1^2\psi = f(r,\theta,\varphi)$, то, согласно [Backus, 1986; Моффат, 1980], оператор $\nabla_1{}^2$ можно обратить:

$$\psi = \nabla_1{}^{-2} f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r)\,\frac{S_n(\theta,\varphi)}{n(n+1)}. \qquad (25)$$

Таким образом, если в рассматриваемой области $S(a,c)$ известно распределение соленоидального поля **B** на некоторой сферической поверхности $S(b)$, $a\le b\le c$, то в соответствии с (21) могут быть определены полоидальный и тороидальный скаляры (потенциалы) P и Q, радиальная производная потенциала P $\nabla_r P$, удовлетворяющие условию (22) и, соответственно, выполнено разделение поля на полоидальную $\mathbf{B}_{\mathrm{Pol}}$ и тороидальную $\mathbf{B}_{\mathrm{Tor}}$ составляющие. Очевидно также, что в соответствии с условием (22) потенциалы P и Q нелокально связаны с полем **B**.

В конечном итоге с учетом соотношений (19) — (22) можем записать

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{Pol}} + \mathbf{A}_{\mathrm{Tor}} = -Q\mathbf{r} - \nabla\times(P\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}_{\mathrm{Pol}} + \mathbf{B}_{\mathrm{Tor}} = \nabla\times\mathbf{\Lambda}_1 P + \mathbf{\Lambda}_1 Q. \quad (26)$$

Воспользуемся далее идеями и представлениями, использованными нами ранее при установлении локальных соотношений импедансного типа. При этом в качестве базовых исходных соотношений выберем систему (26), где вектор-потенциалы **A** и **B** выражены через полоидальный и тороидальный потенциалы P и Q. Эти соотношения остаются действительными и на поверхности неоднородного шара.

Как уже отмечалось, любые два линейно независимые тангенциальные векторы (в данном случае являющиеся решением уравнений Максвелла) покрывают в форме базиса рассматриваемое унитарное векторное пространство второй размерности. С учетом структуры электромагнитного отклика на земной поверхности и особенности его генерации (как известно, наблюдать и сравнивать с результатами математического моделирования «реалистического» источника и проводимости разреза можно только полоидальную часть поля геомагнитных вариаций) в качестве базиса целесообразно выбрать два линейно независимых тангенциальных комплексных вектора нетривиального поля индукции $\mathbf{B}_{\text{Pol}}: \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}$ и $\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}^*{}_{\text{Pol}} \times \mathbf{e}_r$, где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор внешней нормали к границе $S(a)$, звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Замечая, что при выбранной каблировке и гармоническом режиме электрическое поле $\mathbf{E}$ отличается от вектор-потенциала $\mathbf{A}$ лишь множителем $i\omega$, определим на $S(a)$ два скалярных импеданса в качестве коэффициентов разложения двойного векторного произведения $\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{Top}} \times \mathbf{e}_r$ по выбранному ортогональному базису $\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}$ и $\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}^*_{\text{Pol}} \times \mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_{\text{Tor}} \times \mathbf{e}_r = \zeta_P \left(\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}\right) + \xi^*{}_P \left(\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}^*{}_{\text{Pol}} \times \mathbf{e}_r\right) =$$
$$= \mathbf{e}_r \times i\omega[\nabla \times (P\mathbf{r})] \times \mathbf{e}_r = \zeta_P \left[\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P)\right] +$$
$$+ \xi^*{}_P \left[\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P)^* \times \mathbf{e}_r\right], \qquad (27)$$

где

$$\zeta_P = \frac{\mathbf{e}_r \cdot \left\{ i\omega[\nabla \times (P\mathbf{r})] \times [\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P]^* \right\}}{\| \mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P) \|^2},$$

$$\xi^*{}_P = \frac{\{\mathbf{e}_r \times i\omega[\nabla \times (P\mathbf{r})]\} \cdot \{\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P)\}}{\| \mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P) \|^2},$$

$$\| \mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P) \|^2 =$$
$$= [\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P)] \cdot [\mathbf{e}_r \times (\nabla \times \mathbf{\Lambda}_1 P)]^*. \qquad (28)$$

Единственность разложения (27) следует из линейной независимости и ортогональности векторов $\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}$ и $\mathbf{e}_{\text{r}} \times \mathbf{B}^*_{\text{Pol}} \times \mathbf{e}_{\text{r}}$:

$$\left(\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}, \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}^*{}_{\text{Pol}} \times \mathbf{e}_r\right) = [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}] \cdot [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{Pol} \times \mathbf{e}_r] =$$
$$= [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}] \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}] \mathbf{e}_r = 0.$$

Векторное равенство (27) и есть искомое нелокальное векторное граничное условие импедансного типа (vectorial impedance boundary condition) на $S(a)$.

Ясно, что значения скалярных импедансов ζ_D и ξ^*_P зависят от типа источников поля и их ориентации, и с целью упорядочения их значений в точке определения на $S(a)$ можно воспользоваться поляризационными характеристиками поля $\mathbf{B}_{\text{Pol}}$ [Шуман, 2007]. Примечательно, что скалярные параметры ζ_P и ξ^*_P определяются только через положительный скаляр (потенциал) P, нелокально связанный с полем $\mathbf{B}$ на $S(a)$.

Продолжая далее упомянутые ранее аналогии с работой [Aboul-Atta, Boerner, 1975], легко убедиться, что нелокальное векторное тождество (27) порождает два независимых мнимых поверхностных вектора:

$$\mathbf{K}_1 = \zeta_P \left(i\omega \mathbf{A}^*_{\text{Tor}} \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}\right) - \zeta^*{}_P \left(i\omega \mathbf{A}_{\text{Tor}} \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}\right),$$
$$\mathbf{L}_1 = i\omega \mathbf{A}_{\text{Tor}} \times \mathbf{A}^*_{\text{Tor}} - \left(|\zeta_P|^2 + |\xi|^2\right)\left(\mathbf{B}_{\text{Pol}} \times \mathbf{B}^*_{\text{Pol}}\right) +$$
$$+ \xi^*{}_P \left(i\omega \mathbf{A}_{\text{Tor}} \times \mathbf{B}^*_{\text{Pol}}\right) - \xi_P \left(i\omega \mathbf{A}_{\text{Tor}} \times \mathbf{B}_{\text{Pol}}\right),$$
$$\mathbf{e}_r \mathbf{L}_1 = \mathbf{e}_r \mathbf{K}_1 = 0, \ \mathbf{L}_1 = -\mathbf{L}_1^*, \ \mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_1^*. \qquad (29)$$

Их ортогональность $(\mathbf{L}_1, \mathbf{K}_1) = \mathbf{L}_1 \mathbf{K}_1^* = \mathbf{L}_1 \left(\mathbf{e}_r \times \times \mathbf{L}_1^*\right) = \mathbf{e}_r \left(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1^*\right)$ и равенство норм дают два точных скалярных уравнения:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 \mathbf{K}_1^* = 0, \\ \|\mathbf{L}_1\| = \|\mathbf{K}_1\|, \end{cases} \qquad (30)$$

определяющих границу $S(a)$ в терминах двух скалярных параметров ζ_P и ξ^*_P и напряженностей тороидальной компоненты электрического поля $i\omega \boldsymbol{A}_{\text{Tor}}$ и полоидальной $\mathbf{B}_{\text{Pol}}$ магнитной индукции, принадлежащих магнитной моде.

Заметим, что мнимые поверхностные векторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — квадратичные по полю величины, быстро убывающие с удалением от неоднородностей среды и локального источника поля. Очевидно, специалист по геоэлектрике обратит внимание на их определенную аналогию с векторами Визе — Паркинсона при одной существенной оговорке: если вектор Визе — Паркинсона опирается скорее на эмпирические или эвристические соображения, то мнимые поверхностные векторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ подлежат корректному определению в рамках классической электродинамической теории.

Обратим внимание на важное обстоятельство: по заданным на $S(a)$ значениям поля $\mathbf{B}$ однозначно могут быть определены полоидальный P и тороидальный Q скаляры (потенциалы) и, соответственно, выполнено разделение $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на полоидальную и тороидальную составляющие. В то же время информации о распределении поля $\mathbf{B}$ только на $S(a)$ оказывается недостаточно для восстановления тангенциальной (консоидальной) части полоидального поля на $S(a)$, которая принадлежит электрической моде, так как в этом случае не удается вычислить радиальную производную $\nabla_r(rQ)$.

Заметим также, что обычно используемая трактовка механизма возбуждения реальной Земли как «индукционного» или «гальванического» является весьма ограниченной, условной и не вполне корректна.

Заключение. Статья посвящена проблеме импедансного описания электромагнитного поля, регистрируемого на поверхности неоднородной Земли. Ясно, что в соответствии с положениями классической электродинамики, взаимодействие поля с материальной средой задается параметрами материальных уравнений и проявляется через соотношения между производными компонент электромагнитного поля. Используемые же связи импедансного типа непосредственно между компонентами электромагнитного поля на границе раздела «земля—воздух» (модели тензора импеданса. Визе — Паркинсона, обобщенного тензора импеданса, импедансного приближения Леонтовича) носят частный, приближенный характер и действительны только при специальных формах задания первичного поля или структуры среды и зачастую не соответствуют условиям проведения полевого мт-эксперимента.

Предложена система векторных импедансных тождеств локального и нелокального типов для гармонического электромагнитного поля на замкнутых гладких границах раздела сред и генерируемые на их основе обобщенное дифференциальное уравнение импедансов и система скалярных уравнений, определяющих эту границу. Эти уравнения являются точными и зависят от всех шести компонент поля, регистрируемого на рассматриваемой границе, и подлежат корректному экспериментальному определению. При этом, если по тем или иным причинам на практике используются их неполные, усеченные формы, они содержат, в отличие от классического описания, внутренние критерии применимости и не требуют для своего обоснования дополнительных эвристических или эмпирических соображений.

Список литературы

Альшиц В. И., Любимов В. Н. К юбилею плодотворной идеи (ответ на письмо Гульельми А.В. в редакцию УФН) // Успехи физ. наук. — 2010. — **190**, № 1. — С. 106.

Альшиц В. И., Любимов В. Н. Обобщение приближения Леонтовича для электромагнитных полей на границе диэлектрик—металл // Успехи физ. наук. — 2009. — **179**, № 8. — С. 865—871.

Анисимов С. В., Мареев Е. А. Геофизические исследования глобальной электрической цепи // Физика Земли. — 2008. — № 10. — С. 8—18.

Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И. Обратные задачи магнитотеллурики в современной постановке // Физика Земли. — 2004. — № 4. — С. 12—29.

Варенцов И. М., Соколова Е. Ю. и Рабочая группа проекта BEAR. Диагностика и подавление авроральных искажений передаточных операторов электромагнитного поля в эксперименте BEAR // Физика Земли. — 2003. — № 4. — С. 21—48.

Гульельми А. В. Гидромагнитная диагностика и геоэлектрическая разведка // Успехи физ. наук. — 1989. — **158**, вып. 4. — С. 605—638.

Гульельми А. В. К 70-летию формулировки граничного условия Леонтовича (отклик на статью Альшица В. И. и Любимова В. Н. «Обобщение приближения Леонтовича для электромагнитных полей на гарнице диэлектрик—металл») // Успехи физ. наук. — 2010. — **190**, № 1. —С. 105—106.

Гульельми А. В. О граничном условии Леонтовича в геоэлектромагнетизме // Физика Земли. — 2009. — № 9. — С. 12—15.

Гульельми А. В. О фиктивной нелинейности поверхностного импеданса земной коры // Письма в ЖЭТФ. — 2009. — **89**, вып. 7. — С. 439—442.

Дмитриев В. И., Бердичевский М. Н. Обобщенная модель импеданса // Физика Земли. — 2002, № 10. — С. 106—112.

Жданов М. С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. — Москва: Наука, 1984. — 326 с.

Красный Л. И., Блюман Б. А. Геоблоковая делимость и неоднородности литосферы Земли // Отечественная геология. — 1998, № 1. — С. 17—25.

Леонтович М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн — Москва; Ленинград: Изд.-во АН СССР, 1948. — С. 5—12.

Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — Москва: Наука, 1975. — 400 с.

Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — Москва: Мир, 1980. — 340 с.

Раутиан С. Г. Об отражении и преломлении на границе среды с отрицательной групповой скоростью // Успехи физ. наук. — 2008. — **178**, № 10. — С. 1017—1024.

Рытов С. М. Расчет скин-эффекта методом возмущений // Журнал эксперимент. и теор. физики. — 1940. — **10**, вып. 2. — С. 180—189.

Садовский М. А. Избранные труды. Геофизика и физика взрыва. — Москва: Наука, 2004. — 440 с.

Семенов В. Ю., Возар Я., Шуман В. Н. О новом подходе к градиентному магнитовариационному зондированию // Физика Земли. — 2007. — № 7. — С. 67—71.

Шуман В. Н. Глобальный магнитовариационный эксперимент: физические концепции и математические модели // Геофиз. журн. — 2009. — **31**, № 1. — С. 3—15.

Шуман В. Н. Мнимые поверхностные векторы в многомерных обратных задачах геоэлектрики // Физика Земли. — 2007б. — № 3. — С. 19—24.

Шуман В. Н. Прикладная геоэлектродинамика и магнитотеллурический эксперимент // Геофиз. журн. — 2007а. — **29**, № 1. — С. 22—44.

Шуман В. Н. Система локальных векторных тождеств импедансного типа для гармонического электромагнитного поля на замкнутой регулярной границе раздела и задачи геоэлектрики // Геофиз. журн. — 2008. — **30**, № 3. — С. 3—13.

Aboul-Atta O. A., Boerner W. M. Vectorial Impedance Identity for the Natural Dependence of Harmonic Fields on Closed Boundaries // Canadian J. Phys. — 1975. — **53**, № 15. — P. 1404—1407.

Backus G. Poloidal and Toroidal Fields in Geomagnetic Field Modelling // Rev. Geophysics. — 1986. — **24**, № 1. — P. 75—109.

Eisel M., Egbert G. On the stability of magnetotelluric transfer function estimates and the reliability of their variances // Geophys. J. Int. — 2001. — **144**. — P. 65—82.

Fukushima N. Generalized theorem for nonground magnetic effect of verb cal currents connected with Pedersen currents in the uniform-conductivity ionosphere // Rept. Jonosph. Space Res. Japan. — 1976. — **30**. — P. 35—40.

Harrington R. F. Time harmonic electromagnetic fields. — N.Y.: Mc Graw-Hill, 1961. — 480 p.

Kisabet J. L., Rostoker G. Modelling of the three-dimensional current systems associated with magnetospheric substorms // Geophys. J. R. Astronom. Soc. — 1977. — **49**. — P. 655—684.

Kuckes A. F., Nekut A. G., Thompson B. G. A geomagnetic scattering theory for evaluation of earth structure // Geophys. J. R. Astronom. Soc. — 1985. — **83**. — P. 319—330.

Senior T. B. A., Volakis J. L. Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics (IEEE Electromagnetic Waves Ser., 41). — London: IEEE, 1995. — 353 p.