УДК 517.95:519.46:550.832.53

Группы эквивалентности в задачах диффузии нейтронов в неоднородной среде

© *И. М. Цифра, 2010*

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина
Университет в Белостоке, Институт математики, Белосток, Польша
Поступила 8 сентября 2008 г.
Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Досліджено застосування груп перетворень еквівалентності для генерування розв'язків рівняння дифузії нейтронів для неоднорідного середовища з розв'язків для однорідного середовища. Розглянуто також питання еквівалентності диференціальних рівнянь з частинними похідними.

An application of group equivalence transformations for generating solutions of neutron diffusion equation in heterogeneous medium from solutions for homogeneous medium is studied. The problem of equivalency of partial differential equations is also discussed.

Введение. Как известно, классические симметрии Ли используются для построения точных и приближенных решений уравнений математической физики. При этом используется метод симметрийной редукции [Овсянников, 1978; Олвер, 1989; Fushchich, Tsifra, 1987; Levi, Winternitz, 1989], который позволяет свести задачу построения решений уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения в случае инвариантности исходного уравнения относительно точечных преобразований, образующих группу Ли, или системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае симметрии Ли—Беклунда [Цифра, 2006; Tsyfra, 2004] (см. подробнее Приложение). Другой метод, основанный на симметрии уравнения — генерирование новых решений из известных. В этой статье мы используем не группу симметрии дифференциального уравнения в классическом смысле С. Ли, а группу преобразований эквивалентности. Главное отличие между ними состоит в том, что преобразования из группы симметрии оставляют исследуемое уравнение неизменным, в то же время преобразования эквивалентности сохраняют только некоторый класс уравнений, к которому, естественно, принадлежит данное уравнение. В рамках предлагаемого подхода удается построить решение дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных (неоднородная среда) из решений с постоянными коэффициентами (однородная среда). В работе [Козачок, Цифра, 2004] этот подход был использован для построения решения уравнения диффузии тепловых нейтронов, когда коэффициент диффузии тепловых нейтронов D является постоянной величиной, а переменной является длина диффузии нейтронов. В настоящей статье рассматриваются уравнения диффузии тепловых нейтронов в среде, для которой D и сечение поглощения тепловых нейтронов Σ являются некоторыми функциями от пространственных переменных.

Линейный источник. В работе [Козачок, Цифра, 2004] приведена краевая задача для стационарного уравнения диффузии тепловых нейтронов [Бекурц, Виртц, 1968]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}-\frac{\Phi}{L^2}=0\,, \qquad (1)$$

где L — длина диффузии тепловых нейтронов. В качестве геометрической модели исследуемой среды принята трехзонная цилиндрическая система с коэффициентами L и D, заданными такими соотношениями:

$$D=D_1=\text{const}\ ,\ \ L=L_1=\text{const}\,,$$

$$0<r=\sqrt{x^2+y^2}\le r_1\,,$$

$$D = D_2 = \text{const}\,,\; L = L_2 \frac{r^2}{r_2^2}\,,\; L_2 = \text{const}\,,$$
$$r_1 < r < r_2\,, \tag{2}$$
$$D = D_3 = \text{const}\,,\; L = L_3 = \text{const}\,,$$
$$r_2 < r < +\infty\,.$$

Такая постановка задачи может быть использована для исследования диффузии тепловых нейтронов в гетерогенной трехзонной системе, которая моделирует в первом приближении реальную систему «скважина—пласт». Искомое решение должно удовлетворять условию на бесконечности:

$$\Phi(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty\,.$$

С помощью теоретико-группового метода построено решение для линейного источника, сосредоточенного на оси симметрии системы

$$\Phi = A_1\,\mathrm{I}_0\left(\frac{r}{L_1}\right) + B_1\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r}{L_1}\right),\; 0 < r < r_1\,, \tag{3а}$$

$$\Phi = A_2\,\mathrm{I}_0\left(\frac{r_2^2}{L_2 r}\right) + B_2\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r_2^2}{L_2 r}\right),\; r_1 < r < r_2\,, \tag{3б}$$

$$\Phi = B_3\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r}{L_3}\right),\; r_2 < r < \infty\,, \tag{3в}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 — некоторые константы.

Полученное решение должно также удовлетворять условиям непрерывности потока и нормальной составляющей тока нейтронов при переходе через поверхность раздела сред:

$\Phi(r)$ и $-D\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}$ непрерывны на каждой из границ $r = r_m\,,\; m = 1{,}2\,.$ (4)

Очевидно также, что должно выполняться условие баланса нейтронов:

$$Q = 2\pi \int_0^\infty r \frac{D}{L^2} \Phi dr\,, \tag{5}$$

где Q — количество нейтронов, испускаемое линейным источником с 1 см длины за 1 с. Условия (4), (5) дают систему алгебраических уравне6ний для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 такого вида:

$$\frac{Q}{2\pi} = A_1 D_1 \frac{r_1}{L_1}\,\mathrm{I}_1\left(\frac{r_1}{L_1}\right) + B_1 D_1\left[1 - \frac{r_1}{L_1}\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_1}{L_1}\right)\right] +$$

$$+ A_2 D_2\left[\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\,\mathrm{I}_1\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right) - \frac{r_2}{L_2}\,\mathrm{I}_1\left(\frac{r_2}{L_2}\right)\right] +$$

$$+ B_2 D_2\left[\frac{r_2}{L_2}\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_2}{L_2}\right) - \frac{r_2^2}{L_2 r_1}\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right)\right] +$$

$$+ B_3 D_3 \frac{r_2}{L_3}\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_2}{L_3}\right).$$

$$A_1\,\mathrm{I}_0\left(\frac{r_1}{L_1}\right) + B_1\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r_1}{L_1}\right) =$$

$$= A_2\,\mathrm{I}_0\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right) + B_2\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right), \tag{6}$$

$$A_1\,\mathrm{I}_1\left(\frac{r_1}{L_1}\right) - B_1\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_1}{L_1}\right) =$$

$$= \frac{D_2 L_1}{D_1 L_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \left\{- A_2\,\mathrm{I}_1\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right) + B_2\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right)\right\},$$

$$A_2\,\mathrm{I}_0\left(\frac{r_2}{L_2}\right) + B_2\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r_2}{L_2}\right) = B_3\,\mathrm{K}_0\left(\frac{r_2}{L_3}\right),$$

$$A_2\,\mathrm{I}_1\left(\frac{r_2}{L_2}\right) - B_2\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_2}{L_2}\right) = \frac{D_3 L_2}{D_2 L_3} B_3\,\mathrm{K}_1\left(\frac{r_2}{L_3}\right).$$

Как видим, в рассматриваемом примере в каждой зоне коэффициент диффузии D является постоянным, а L зависит от r.

В настоящей статье обобщим подход, предложенный в работе [Козачок, Цифра, 2004], и рассмотрим случай, когда и D, и сечение поглощения нейтронов Σ — некоторые гладкие функции от r. Представим уравнение диффузии нейтронов в неоднородной среде:

$$-\operatorname{div}\big(D(x,y)\nabla\Phi(x,y)\big) + \sum(x,y)\Phi = 0\,. \tag{7}$$

Если считать, что Φ, D и Σ являются функциями только от r, то приходим к такому обыкновенному уравнению:

$$\Phi_{rr} + \left(\frac{1}{r} + \frac{D_r}{D}\right)\Phi_r - \frac{\Sigma}{D}\Phi = 0\,. \tag{8}$$

Подставляя

$$\Phi(r) = \frac{W(r)}{\sqrt{rD(r)}}\,, \tag{9}$$

получаем уравнение

$$W'' + \left[\frac{1}{4r^2} - \frac{\Sigma}{D} - \frac{D_{rr}}{2D} + \frac{D_r^2}{4D^2} - \frac{D_r}{2rD}\right]W = 0\,. \quad (10)$$

Запишем уравнение (10) в виде

$$W'' + V(r)W = 0\,, \quad (11)$$

где

$$V(r) = \frac{1}{4r^2} - \frac{\Sigma}{D} - \frac{D_{rr}}{2D} + \frac{D_r^2}{4D^2} - \frac{D_r}{2rD}\,. \quad (12)$$

Генератор группы преобразований эквивалентности уравнения (11) имеет вид

$$Y = \alpha(r)\partial_r + \frac{1}{2}\alpha'(r)W\partial_W - \left(\frac{1}{2}\alpha'''(r) - 2\alpha'(r)V\right)\partial_V$$

где $\alpha(r)$ — произвольная гладкая функция. Конечные преобразования группы эквивалентности строятся путем решения задачи Коши для системы Ли:

$$\begin{aligned} &\frac{dr'}{da} = \alpha(r'), && r'\big|_{a=0} = r,\\ &\frac{dW'}{da} = \frac{1}{2}\alpha'(r')W', && W'\big|_{a=0} = W,\\ &\frac{dV'}{da} = \frac{1}{2}\alpha'''(r') + 2\alpha'(r')V', && V'\big|_{a=0} = V. \end{aligned} \quad (13)$$

Из этих формул легко получить формулы для генерирования решения уравнения (11). Пусть $W = \varphi(r)$ является решением (11) при $V = V_1(r)$. Тогда

$$W_n = \sqrt{\frac{\alpha(r)}{\alpha(r')}}\,\varphi\left(\beta^{-1}(\beta(r) + a)\right) \quad (14)$$

будет решением уравнения (11) при $V = V_n$, где V_n является решением уравнения

$$R(r, V_n, a) = V_1\left(\beta^{-1}(\beta(r) + a)\right), \quad (15)$$

а $R(r, V_n, a)$ — решение третьего уравнения системы (13),

$$\beta(r) = \int_0^r \frac{ds}{\alpha(s)}\,, \quad r' = \beta^{-1}(\beta(r) + a).$$

Таким образом, получены новые решения W_n уравнения (11) для новой функции V_n с помощью формул (14), (15). Эти формулы позволяют строить решения уравнения (8) для неоднородной среды, когда $D(r)$ и $\Sigma(r)$ — некоторые функции от r из решений для однородной среды.

Пусть имеем однородную среду с $D=D_2=$ $=\mathrm{const}$, $\Sigma=\Sigma_2=\mathrm{const}$. Тогда общее решение уравнения (8) примет вид

$$\Phi = A_2 I_0\left(\frac{r}{L_2}\right) + B_2 K_0\left(\frac{r}{L_2}\right),$$

где

$$L_2 = \sqrt{D_2/\Sigma_2}\,.$$

Для этого решения $W = \sqrt{D_2 r}\,\Phi(r)$, а функция V в уравнении (11) имеет вид

$$V = V_1 = \frac{1}{4r^2} - \frac{\Sigma_2}{D_2}\,.$$

Тогда новое решение W_n примет такую форму:

$$W_n = \sqrt{\frac{\alpha(r)}{\alpha(r')}}\sqrt{D_2 r'}\,\Phi(r'). \quad (16)$$

Соответственно, V_n находится из уравнения

$$R(r, V_n, a) = \frac{1}{4\left[\beta^{-1}(\beta(r) + a)\right]^2} - \frac{\Sigma_2}{D_2}\,.$$

Имея решение W_n, можно построить решение уравнения (8) с помощью замены (9)

$$\Phi_n(r) = \frac{W_n(r)}{\sqrt{rD(r)}}\,, \quad (17)$$

причем $D(r)$ и $\Sigma(r)$ должны удовлетворять дифференциальное соотношение

$$-\frac{\Sigma(r)}{D(r)} + \frac{1}{4r^2} - \frac{D_{rr}}{2D} + \frac{D_r^2}{4D^2} - \frac{D_r}{2rD} = V_n(r)\,. \quad (18)$$

Это единственное уравнение для определения функций $D(r)$ и $\Sigma(r)$. Очевидно, можно взять какую-то функцию $D(r)$ и получить $\Sigma(r)$, или взять конкретную функцию $\Sigma(r)$ и, решая дифференциальное уравнение (18), получить функциональную зависимость коэффициента диффузии D от r.

Таким образом, с помощью изложенного метода можно построить решение уравнения диффузии нейтронов для трехзонной цилиндрической среды, где в первой и третьей зонах D и Σ (а значит, и L) являются постоянными величинами, а в средней зоне $D(r)$ и $\Sigma(r)$ могут быть произвольными гладкими функциями, удовлетворяющими соотношению (18).

Очевидно, такая модель расширяет возможности более адекватного описания свойств реальной неоднородной среды по сравнению с моделью (2). При этом решения в первой и третьей зонах задаются формулами (3а) и (3в) соответственно, а во второй зоне — формулами (16), (17). Решения задачи очевидно должны удовлетворять условию (4) и уравнению типа (5). Они аналогичны условиям (6).

Точечный источник. Аналогично предыдущему примеру в работе [Козачок, Цифра, 2004] построено решение диффузионного уравнения для точечного источника в градиентно-неоднородной среде:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}-\frac{\Phi}{L^2}=0, \tag{19}$$

где

$$D=D_1=\mathrm{const}\,,\ L=L_1=\mathrm{const}\,,\ 0<r\le r_1\,;$$

$$D=D_2=\mathrm{const}\,,\ L=L_2\frac{r^2}{r_2^2}\,, \tag{20}$$

$$L_2=\mathrm{const}\,, r_1<r\le r_2\,;$$

$$D=D_3=\mathrm{const}\,,\ L=L_3=\mathrm{const}\,,\ r_2<r<\infty\,;$$

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,.$$

Решение задачи (19), (20) для точечного источника мощностью Q имеет следующий вид:

$$\Phi=\frac{A_1}{r}\exp\left(-\frac{r}{L_1}\right)+\frac{B_1}{r}\exp\left(\frac{r}{L_1}\right),\ 0<r\le r_1\,, \tag{21а}$$

$$\Phi=A_2\exp\left(-\frac{r_2^2}{L_2 r}\right)+B_2\exp\left(\frac{r_2^2}{L_2 r}\right),\ r_1<r\le r_2\,, \tag{21б}$$

$$\Phi=\frac{A_3}{r}\exp\left(-\frac{r}{L_3}\right),\ r_2<\mathrm{r}<\infty\,. \tag{21в}$$

Условия (4), (5) приводят к таким соотношениям для коэффициентов A_1, A_2, A_3, B_1, B_2:

$$\frac{Q}{4\pi}=D_1\left[B_1\left(\frac{r_1}{L_1}-1\right)\exp\left(\frac{r_1}{L_1}\right)+B_1-\right.$$
$$\left.-A_1\left(\frac{r_1}{L_1}+1\right)\exp\left(-\frac{r_1}{L_1}\right)+A_1\right]+$$
$$+\frac{D_2 r_2^2}{L_2}\left[A_2\left(\exp\left(-\frac{r_2}{L_2}\right)-\exp\left(-\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-B_2\left(\exp\left(\frac{r_2}{L_2}\right)-\exp\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right)\right)\right]+$$
$$+A_3 D_3\left(\frac{r_2}{L_3}+1\right)\exp\left(-\frac{r_2}{L_3}\right), \tag{21г}$$

$$\frac{A_1}{r_1}\exp\left(-\frac{r_1}{L_1}\right)+\frac{B_1}{r_1}\exp\left(\frac{r_1}{L_1}\right)=$$
$$=A_2\exp\left(-\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right)+B_2\exp\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right), \tag{21д}$$

$$-\frac{A_1}{r_1}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{r_1}\right)\exp\left(-\frac{r_1}{L_1}\right)+\frac{B_1}{r_1}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{r_1}\right)\exp\left(\frac{r_1}{L_1}\right)=$$
$$=\frac{D_2}{D_1}\frac{A_2}{L_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\exp\left(-\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right)-$$
$$-\frac{D_2}{D_1}\frac{B_2}{L_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\exp\left(\frac{r_2^2}{L_2 r_1}\right), \tag{21е}$$

$$A_2\exp\left(-\frac{r_2}{L_2}\right)+B_2\exp\left(\frac{r_2}{L_2}\right)=$$
$$=\frac{A_3}{r_2}\exp\left(-\frac{r_2}{L_3}\right), \tag{21ж}$$

$$\frac{A_2}{L_2}\exp\left(-\frac{r_2}{L_2}\right)-\frac{B_2}{L_2}\exp\left(\frac{r_2}{L_2}\right)=$$
$$=-\frac{D_3}{D_2}\frac{A_3}{r_2}\left(\frac{1}{L_3}+\frac{1}{r_2}\right)\exp\left(-\frac{r_2}{L_3}\right). \tag{21з}$$

Для среды, в которой $D(r)\ne\mathrm{const}$, уравнение диффузии имеет вид

$$-\operatorname{div}\big(D(x_1,x_2,x_3)\nabla\Phi(x_1,x_2,x_3)\big)-$$
$$-\sum(x_1,x_2,x_3)\Phi=0. \tag{22}$$

Если считать, что функции Φ, D и Σ являются функциями только от r, то уравнение (22) сводится к такому уравнению:

$$\Phi_{rr} + \left(\frac{2}{r} + \frac{D_r}{D}\right)\Phi_r - \frac{\Sigma}{D}\Phi = 0. \qquad (23)$$

С помощью замены

$$\Phi(r) = \frac{W(r)}{r\sqrt{D(r)}} \qquad (24)$$

уравнение (23) приводится к виду (11), причем

$$V(r) = -\frac{\Sigma}{D} - \frac{D_r r}{2D} + \frac{D_r^2}{4D} - \frac{D_r}{rD}.$$

Решение уравнения (23) задается формулой

$$\Phi = \frac{A_2}{r}\exp\left(-\frac{r}{L_2}\right) + \frac{B_2}{r}\exp\left(\frac{r}{L_2}\right).$$

Тогда

$$W = r\sqrt{D_2}\,\Phi(r),$$

а функция V в уравнении (11) имеет вид

$$V = V_1 = -\frac{\Sigma_2}{D_2}.$$

Тогда новое решение W_2 будет представлено так:

$$W_n = \sqrt{\frac{\alpha(r)}{\alpha(r')}}\,r'\sqrt{D_2}\,\Phi(r') \qquad (25)$$

и, соответственно, V_n получим из уравнения

$$R(r, V_n, a) = -\frac{\Sigma_2}{D_2}.$$

По этим решениям строится решение уравнения (23) с помощью замены (24):

$$\Phi_n(r) = \frac{W_n(r)}{r\sqrt{D(r)}}, \qquad (26)$$

где $D(r)$ и $\Sigma(r)$ связаны одним дифференциальным соотношением

$$-\frac{\Sigma(r)}{D(r)} - \frac{D_{rr}}{2D} + \frac{D_r^2}{4D^2} - \frac{D_r}{rD} = V_n(r). \qquad (27)$$

Таким образом, как и в случае линейного источника, формулы (26), (27) позволяют построить решение в трехзонной среде. В первой и третьей зонах коэффициенты $D(r)$ и $\Sigma(r)$ являются постоянными, а в средней зоне они могут быть произвольными функциями, удовлетворяющими соотношению (27). При этом решения в первой и третьей зонах задаются формулами (21а) и (21в), а во второй зоне — формулами (25), (26). Условия (4), (5), налагаемые на решения, приводят к системе уравнений, подобной системе (21г) — (21з). Мы здесь их не приводим, поскольку коэффициенты в этих уравнениях зависят от конкретного вида $D(r)$, $\Sigma(r)$ и $\alpha(r)$.

Согласно изложенному, естественный вопрос, возникающий в данном подходе, это когда два дифференциальных уравнения могут быть преобразованы одно в другое с помощью преобразований, принадлежащих группе эквивалентности. Сформулируем без доказательства утверждения о необходимых и достаточных условиях эквивалентности двух, вообще говоря, произвольных уравнений в частных производных. Пусть имеем класс дифференциальных уравнений

$$U\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(m)}, a^1, a^2, \ldots, a^p\right) = 0, \qquad (28)$$

где $x \in R^n$, $u = u(x)$, $u_{(t)}$ — совокупность частных производных функции $u(x)$ порядка t, которые зависят от p коэффициентов; m, t, p — натуральные числа. Не умаляя общности, будем считать, что $a^j = a^j(x, u)$, $j = \overline{1, p}$, хотя все результаты, естественно, обобщаются на случай, когда a^j зависит и от производных.

Пусть G_e — группа Ли преобразований эквивалентности уравнения (28). Обозначим дифференциальные инварианты группы эквивалентности G_e через

$$\omega_i\left(x, u, a^1_{(1)}, a^2_{(1)}, \ldots, a^p_{(1)}, a^1_{(2)}, a^2_{(2)}, \ldots\right), \quad i = 1, 2, 3\ldots$$

Далее рассмотрим два уравнения, принадлежащих классу (28), а именно:

$$U\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(m)}, f_1, f_2, \ldots f_p\right) = 0, \qquad (29)$$

т.е. $a = f(x, u)$, и

$$U\left(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(m)}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p\right) = 0, \qquad (30)$$

т.е. $a = \varphi(x, u)$, где f и φ — некоторые функции своих аргументов.

Теперь, используя дифференциальные инварианты, можно сформулировать утверждение о необходимых условиях эквивалентности уравнений (29) и (30).

Утверждение 1. Пусть уравнение (29) преобразуется в уравнение (30) с помощью преобразований из группы G_e и пусть функция F такова, что

$$F(\omega_1, \omega_2, ...\omega_N)\big|_{a=f} = 0\,. \tag{31}$$

Тогда

$$F(\omega_1, \omega_2, ...\omega_N)\big|_{a=\varphi} = 0\,. \tag{32}$$

Очевидно, таких функций F, для которых справедливо (31), вообще говоря, бесконечное множество, и для каждой из них выполняется условие (32). Если для какой-то F условие (31) не влечет за собой выполнение условия (32), то тогда уравнения не являются эквивалентными. Практически, оказывается, нет необходимости проверять условие (31), (32) для каждой функции F, поскольку справедливо утверждение о достаточных условиях эквивалентности уравнений. Чтобы его сформулировать, построим автоморфную систему AG_e группы G_e, для которой $a=f$ является решением. Как известно [Овсянников, 1978], такая система строится с помощью дифференциальных инвариантов. Пусть автоморфная система является системой дифференциальных уравнений k-го порядка [Овсянников, 1978]:

$$\Phi^{\sigma}\left(\omega_{(k)}\right) = 0 \quad (\sigma = 1,2,...,s), \tag{33}$$

где $\omega_{(k)}$ — универсальный инвариант продолженной группы $G_{e(k)}$, $k=0,1,...$ Назовем эту систему автоморфной системой уравнения (29). Пусть для многообразия $M\{a = \Psi(x,u)\}$ коэффициент k есть наименьшее число, для которого продолженная орбита $h_k(M, O)$ является собственным многообразием в продолженном пространстве Z_k (подробнее смотри [Овсянников, 1978]). Если $a=\Psi(x, u)$ — решение уравнения (33), то будем называть его нетривиальным решением автоморфной системы. Тогда достаточное условие формулируется в следующем виде.

Утверждение 2. Пусть $a^1 = \varphi_1(x,u)$, $a^2 = \varphi_2(x,u), ...,$ $a^p = \varphi_p(x,u)$ является нетривиальным решением автоморфной системы (33) уравнения (29). Тогда уравнения (29) и (30) эквивалентны, причем эквивалентность устанавливается с помощью преобразований из группы G_e.

Очевидно, все построения и справедливость утверждения 2 остаются в силе, если заменить уравнение (29) на (30).

Поскольку для любой группы Ли существует конечное число различных типов автоморфных систем [Овсянников, 1978], то проверить надо только конечное число равенств (31), (32) или, что то же самое, (33). Однако если выполнены условия утверждения 2, то достаточно проверить справедливость только одной автоморфной системы.

Рассмотрим случай, когда

$$F(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)\big|_{a=f} = \lambda = \text{const} \tag{34}$$

или

$$F(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)\big|_{a=\varphi} = \Lambda = \text{const}\,. \tag{35}$$

Соотношения (34), (35) будем называть инвариантными. В общем случае существует бесконечное множество функций F, удовлетворяющих (34) или (35). Поэтому существуют последовательности инвариантных соотношений $\{\lambda_i\}$ и $\{\Lambda_i\}$ для уравнений (29) и (30). Из утверждений 1 и 2 получаем следствие.

Следствие. Уравнения (29) и (30) эквивалентны относительно группы преобразований эквивалентности G_e, если и только если последовательности инвариантных соотношений для уравнений (29) и (30) совпадают.

Заключение. В статье показано, как с помощью группы преобразований эквивалентности строятся решения дифференциальных уравнений, описывающих диффузию нейтронов в неоднородной среде, из решений для однородной среды. Метод проиллюстрирован на примере линейного и точечного источника нейтронов. Важно отметить, что решения в этом подходе строятся для целого класса сред, поскольку на две, вообще говоря, произвольные функции $D(r)$ и $\Sigma(r)$ налагается только одно условие (18) для линейного источника и (27) для точечного источника. Кроме того, слагаемое $V_n(r)$ тоже зависит от произвольной функции $\alpha(r)$. Появление этой функции является следствием симметрии уравнения диффузии нейтронов. Таким образом, метод позволяет строить решения для широкого класса неоднородных сред. Рассматриваемая в работе модель расширяет возможности более полного описания свойств неоднородной геологической среды и может быть использована для исследования диффузии тепловых нейтронов в гетерогенной трехзонной системе, которая моделирует в первом приближении реальную систему «скважина — пласт».

Очевидно, предложенный метод является достаточно общим и может быть использован не только для уравнения диффузии, но и для других уравнений математической физики.

Приложение. Генераторы группы точечной симметрии имеют вид дифференциальных операторов первого порядка:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta(x,u)\partial_u, \qquad (\text{П}.1)$$

где $x \in R^n$, $u = u(x)$.

Дифференциальное уравнение

$$V(x,u,u_{(1)},...u_{(k)}) = 0 \qquad (\text{П}.2)$$

инвариантно относительно группы преобразований Ли, когда $Q_{(k)}V\big|_{V=0} = 0$, где $Q_{(k)}$ — продолженный оператор.

Понятие классической инвариантности обощается и рассматривается симметрия Ли-Бэклунда [Олвер, 1989]. В работах [Цифра, 2006; Tsyfra, 2004]. Показывается, что если «произвольное» обыкновенное дифференциальное уравнение

$$H\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\right) = 0 \qquad (\text{П}.3)$$

допускает оператор симметрии Ли-Бэклунда вида $V\partial_u$, то соответствующий анзатц, который является общим решением уравнения (П3), редуцирует уравнение (П.2) к системе дифференциальных уравнений, число которых не превосходит m с n-1независимыми переменными. Оказывается, что вместо уравнения (П.3) можно рассматривать уравнение в частных производных:

$$N(x,u,u_{(1)},...u_{(p)},) = 0. \qquad (\text{П}.4)$$

При этом $X=V\partial_u$ является оператором симметрии уравнения (П.4), т.е. $X_{(k)}N=0$ на многообразии $N=0$ $[DN]=0$, где символом $[DN]$ обозначено множество всех дифференциальных следствий уравнения (П.4). В этом случае получаем обобщенную редукцию, в том числе и разделение переменных, по сравнению с редукцией, порожденной точечной симметрией или симметрией Ли-Бэклунда обыкновенного дифференциального уравнения (П.3). Этот факт устанавливается аналогично тому, как это делалось для обыкновенного дифференциального уравнения в работе [Tsyfra, 2004].

Рассмотрим простой пример. Известно, что уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = 2e^u \qquad (\text{П}.5)$$

инвариантно относительно бесконечной группы Ли с генератором

$$Q_1 = f(x)\partial x + g(y)\partial y - (f' + g')\partial u,$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — произвольные функции своих аргументов. Поэтому, согласно предлагаемому подходу, анзатц

$$u = \ln\frac{X'(x)Y'(y)}{(X(x)+Y(y))^2}, \qquad (\text{П}.6)$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ — произвольные функции своих аргументов, $X'(x)$, $Y'(y)$, — производные первого порядка, который является общим решением уравнения (П.5), и редуцирует уравнение

$$f(x)\frac{\partial u}{\partial x} + g(y)\frac{\partial u}{\partial y} = -(f' + g'), \qquad (\text{П}.7)$$

Действительно, подставляя (П.6) в (П.7), получаем уравнение

$$\frac{\frac{d}{dx}(f(x)X')}{X'} + \frac{\frac{d}{dy}(g(y)Y')}{Y'} - 2\frac{f(x)X' + g(y)Y'}{X+Y} = 0.$$

Очевидно, что редуцированная система имеет вид

$$f(x)X' = \lambda, \; g(y)Y' = -\lambda, \qquad (\text{П}.8)$$

где $\lambda = \text{const}$ — произвольная действительная постоянная. В этом случае получаем не известную до сих пор «алгебраическую» редукцию, а ее обобщение, которое можно назвать дифференциальной редукцией, поскольку уравнения

$$\frac{d}{dx}(f(x)X') = 0, \; \frac{d}{dy}(g(y)Y') = 0$$

являются дифференциальным следствием системы (П.8).

Отметим, что этот подход обобщается и на случай, когда $X = V\partial_u$ является оператором условной симметрии уравнения (П.4), а также, если вместо уравнения (П.4) рассматривать переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Список литературы

Бенурц К., Виртц К. Нейтронная физика. — Москва: Атомиздат, 1968. — 456 с.

Козачок И. А., Цифра И. М. Теоретико-групповой анализ физических полей в градиентно-неоднородных средах и его применение в проблеме диффузии тепловых нейтронов // Геофиз. журн. — 2004. — **26**, № 2. — С. 122—127.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — Москва: Наука, 1978. — 399 с.

Олвер П. Приложения группы Ли к дифференциальным уравнениям. — Москва: Мир, 1989. — 639 с.

Цифра І. М. Симетрійна редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 309—315.

Fushchich W. I., Tsifra I. M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**. — L45—L48.

Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: example of the Bussinesg equation symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. — 1989. — **22**, № 15. — P. 2915—2924.

Tsyfra I. M. Symmetry reduction of nonlinear differential equations // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. — Kiev. — 2004. — **50**. — P. 266—270.