

Скалярные импедансы как функции линейной поляризации магнитного поля

© Т. И. Причепий, 2010

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 16 июля 2009 г.

Представлено членом редколлегии В. Н. Шуманом

Розглянуто результати дослідження властивостей скалярних імпедансів для моделі джерела електромагнітного поля у вигляді плоскої хвилі та нижнього півпростору, що представлений горизонтально-шаруватим розрізом. При цьому спостережене магнітне поле \mathbf{H}_τ поляризовано лінійно. Такі параметри моделі «джерело—середовище» дають можливість дослідити фазові та амплітудні залежності скалярних імпедансів від азимуту поляризаційного напрямку магнітного поля в контексті пошуку аналогій та взаємозв'язку з компонентами тензора імпедансу \hat{Z} .

The work is devoted to the research of properties of scalar impedances for model of a source of electromagnetic field as a flat wave and bottom half space, submitted by horizontally-layered cut. Thus the observed magnetic field \mathbf{H}_τ is polarized linearly. Such parameters of model «a source—environment» enable to study phase and peak dependences of scalar impedances on an azimuth of a polarizing direction of magnetic field in a context of search of analogies and interrelations with components of tensor impedance \hat{Z} .

Введение. Магнитотеллурические методы являются одними из ведущих в геофизических исследованиях. Наиболее традиционные из них в качестве основного информационного параметра полагают тензор импеданса (МТЗ) или типпер (МВЗ). Основой этих методов является аппроксимация первичного поля полем плоской вертикально падающей на горизонтально-слоистую Землю электромагнитной волны. Альтернативные методы интерпретации магнитотеллурических данных в первую очередь опираются на экспериментальные данные, утверждающие более сложный механизм формирования электромагнитного отклика.

Одно из таких направлений, в котором геоэлектрическая структура среды принимается произвольной, а информация о структуре первичной электромагнитной волны не является существенной, представлено в работах [Шуман, 1993; 2001; 2007]. В них сосредоточено внимание на развитии идеи [Aboul-Atta, Voerner, 1975] локальной связи непосредственно между тангенциальными компонентами комплексных амплитуд электрического и магнитного поля на отражающей поверхности в целях решения магнитотеллурических задач.

Согласно [Aboul-Atta, Voerner, 1975], локальная связь между компонентами комплексных амплитуд электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} поля на границе раздела может быть представлена равенством

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \zeta (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \xi^* (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^* \times \mathbf{n}), \quad (1)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе раздела. Величины, определенные как

$$\zeta = -\frac{n(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{H}\|^2}, \quad \xi^* = \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})(\mathbf{n} \times \mathbf{H})}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{H}\|^2}, \quad (2)$$

есть скалярные параметры импедансного типа. По сути, они являются коэффициентами разложения тангенциального электрического поля \mathbf{E}_τ по двум единичным ортогональным векторам, сформированным из магнитного поля \mathbf{H}_τ . Согласно [Aboul-Atta, Voerner, 1975], векторное импедансное тождество (1) порождает на границе раздела (импедансной плоскости) два мнимых тангенциальных вектора:

$$\mathbf{K} = \mathbf{E} \times \mathbf{E}^* - (|\zeta|^2 + \xi^2) (\mathbf{H} \times \mathbf{H}^*) + \zeta^* (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*) - \xi (\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (3)$$

$$\mathbf{L} = \xi (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) - \zeta^* (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad \mathbf{L} = \mathbf{n} \times \mathbf{K}, \quad (4)$$

которые в силу ортогональности и равенства норм позволяют написать два точных скалярных уравнения, полностью определяющих импедансную плоскость унитарным векторным пространством второй размерности:

$$\begin{cases} (\mathbf{L}, \mathbf{K}^*) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = 0, \\ \|\mathbf{L}\|^2 = \|\mathbf{K}\|^2. \end{cases}$$

Эта система была названа [Aboul-Atta, Voerner, 1975] уравнениями поверхности обратного рассеивания (inverse scattering surface equations — ISS-equations).

В работах В. Н. Шумана при исследовании скалярных импедансов (2) и мнимых векторов (3), (4), их роли в дальнейшем развитии магнитотеллурических исследований основное внимание сосредоточено на физических аспектах проблемы. Были также проведены некоторые исследования в направлении численного моделирования и визуализации результатов, а также установления некоторых аналитических зависимостей в этой области [Причепий, 2006; 2007; 2008]. Настоящая работа является дальнейшим развитием этого направления.

Постановка задачи. Возможность существования скалярных импедансов ζ , ξ^* в отличие от тензора импеданса \hat{Z} ни в коей мере не ограничена моделью падающего поля в виде плоской волны. При отсутствии нормальных компонент комплексных векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} мнимые векторы (3), (4) тождественно равны нулю. И тем не менее в данной статье будет проводиться рассмотрение свойств скалярных импедансов (2) именно для тех моделей первичного поля, которые позволяют определить тензор импеданса \hat{Z} . Рассмотрение этих параметров в рамках такой простейшей модели электромагнитного поля может быть полезно для понимания некоторых особенностей поведения скалярных импедансов, в особенности для исследователей, работающих в классических традициях магнитотеллурических представлений.

Пусть ось OZ декартовой системы координат направлена вниз. Тогда внешняя нормаль в (1), (2) становится отрицательным единичным вектором. Выражения для скалярных импедансов (2) через комплексные амплитуды (составляющие по осям OX и OY) будут записаны так:

$$\zeta = \frac{E_x H_y^* - E_y H_x^*}{H_{x0}^2 + H_{y0}^2}, \quad \xi^* = \frac{E_x H_x + E_y H_y}{H_{x0}^2 + H_{y0}^2}. \quad (5)$$

Поскольку в данной задаче предполагается одновременное существование тензора \hat{Z} и скалярных параметров импедансного типа, можно записать систему уравнений, объединяющую эти величины:

$$E_x = Z_{xx} H_x + Z_{xy} H_y = \zeta H_y + \xi^* H_x^*, \quad E_y = Z_{yx} H_x + Z_{yy} H_y = -\zeta H_x + \xi^* H_y^*. \quad (6)$$

Путем выражения в формулах (2) комплексных амплитуд электрического поля через компоненты тензора импеданса \hat{Z} и комплексные амплитуды магнитного поля, в статье [Причепий, 2007] были получены выражения, связывающие скалярные импедансы (5) с компонентами тензора \hat{Z} :

$$\zeta = \frac{Z_{xx} H_x H_y^* + Z_{xy} H_y H_y^* - Z_{yx} H_x H_x^* - Z_{yy} H_x^* H_y}{H_x H_x^* + H_y H_y^*},$$

$$\xi^* = \frac{Z_{xx} H_x^2 + (Z_{xy} + Z_{yx}) H_x H_y + Z_{yy} H_y^2}{H_x H_x^* + H_y H_y^*}.$$

Используя поляризационное отношение для тангенциального магнитного поля $P = H_y/H_x$, эти выражения можно представить так:

$$\zeta = \frac{Z_{xx}P_H^* + Z_{xy}|P_H|^2 - Z_{yx} - Z_{yy}P_H}{1 + |P_H|^2}, \quad (7)$$

$$\xi^* = e^{2i\varphi_{Hx}} \frac{Z_{xx} + (Z_{xy} + Z_{yx})P_H + Z_{yy}P_H^2}{1 + |P_H|^2}, \quad (8)$$

или

$$\xi^* = e^{2i\varphi_{Hy}} \frac{Z_{xx}Q_H^2 + (Z_{xy} + Z_{yx})Q_H + Z_{yy}}{1 + |Q_H|^2},$$

где $Q_H = 1/P_H$.

Очевидно, что если основной скалярный импеданс ζ определяется кроме компонент тензора импеданса только относительной величиной — поляризационным отношением магнитного поля, то для дополнительного скалярного импеданса ξ^* характерна зависимость также от конкретной величины фаз магнитного поля.

Сделаем еще шаг в направлении упрощения условий задачи. Используем для исследования скалярных импедансов прием, описанный в работе [Yee, Paulson, 1987] и основанный на том, что магнитное поле полагается поляризованным линейно. Такое поле характеризуется следующим образом:

$$\begin{aligned} H_x &= H_{x0}e^{i\varphi}, \quad H_y = H_{y0}e^{i(\varphi+n\pi)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ P &= \frac{H_y}{H_x} = \frac{H_{y0}}{H_{x0}}e^{n\pi} = \frac{H_{y0}}{H_{x0}}(\cos n\pi + i \sin n\pi), \quad \sin n\pi = 0, \\ P &= P^* = \frac{H_{y0}}{H_{x0}} \cos n\pi = \operatorname{tg} \gamma, \quad |P|^2 = P^2 = \operatorname{tg}^2 \gamma. \end{aligned}$$

Эллипс поляризации такого поля вырождается в линию, квадрат половины длины которой $a_H^2 = H_{x0}^2 + H_{y0}^2$, малая полуось отсутствует: $b=0$. В первом и третьем квадрантах координатной плоскости $n=0$, во втором и четвертом $n=1$.

Итак, поляризационное отношение действительно и является тангенсом угла наклона линии поляризации магнитного поля к оси Ox . Положим для магнитного поля $H_{x0}^2 + H_{y0}^2 = a_H^2 = 1$. В формулах (7), (8) произведем замены

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+P^2} &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \gamma} = \cos^2 \gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}, \quad \frac{P}{1+P^2} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1+\operatorname{tg}^2 \gamma} = \sin \gamma \cos \gamma = \frac{1}{2} \sin 2\gamma, \\ \frac{P^2}{1+P^2} &= \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{1+\operatorname{tg}^2 \gamma} = \sin^2 \gamma = \frac{1-\cos 2\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, если некоторая величина является функцией параметра P_H , при линейной поляризации магнитного поля можно исследовать поведение этих величин в зависимости от изменения угла γ , т. е. угла наклона поляризационного направления.

Скалярные импедансы как функции азимута поляризации линейного магнитного поля. Теперь с учетом (9) для линейно поляризованного магнитного поля скалярные импедансы (7), (8) могут быть представлены как функции угла наклона оси магнитного поля γ_H :

$$\zeta(\gamma_H) = Z_{xy} \sin^2 \gamma_H + (Z_{xx} - Z_{yy}) \sin \gamma_H \cos \gamma_H - Z_{yx} \cos^2 \gamma_H, \quad (10)$$

$$\xi^*(\gamma_H) = e^{2i\varphi} \left[Z_{yy} \sin^2 \gamma_H + (Z_{xy} + Z_{yx}) \sin \gamma_H \cos \gamma_H + Z_{xx} \cos^2 \gamma_H \right], \quad (11)$$

или

$$\zeta(\gamma_H) = Z_1 - Z_3 \cos 2\gamma_H + Z_4 \sin 2\gamma_H, \quad \xi^*(\gamma_H) = e^{2i\varphi} (Z_2 + Z_3 \sin 2\gamma_H + Z_4 \cos 2\gamma_H).$$

Для аргумента $\gamma_H + \pi/2$ выражения для скалярных импедансов определяются такими зависимостями:

$$\begin{aligned} \zeta(\gamma_H + \pi/2) &= Z_1 + (Z_3 \cos 2\gamma_H - Z_4 \sin 2\gamma_H), \\ \xi^*(\gamma_H + \pi/2) &= e^{2i\varphi} [Z_2 - (Z_3 \sin 2\gamma_H + Z_4 \cos 2\gamma_H)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_1 &= (Z_{xy} - Z_{yx})/2, & Z_2 &= (Z_{xx} + Z_{yy})/2, \\ Z_3 &= (Z_{xy} + Z_{yx})/2, & Z_4 &= (Z_{xx} - Z_{yy})/2. \end{aligned}$$

Если вспомнить форму зависимости компонент тензора импеданса от угла поворота координатных осей [Бердичевский, Логунович, 2005]:

$$\begin{aligned} Z'_{xx}(\alpha) &= Z_2 + (Z_3 \sin 2\alpha + Z_4 \cos 2\alpha), & Z'_{xy}(\alpha) &= Z_1 + (Z_3 \cos 2\alpha - Z_4 \sin 2\alpha), \\ Z'_{yx}(\alpha) &= -Z_1 + (Z_3 \cos 2\alpha - Z_4 \sin 2\alpha), & Z'_{yy}(\alpha) &= Z_2 - (Z_3 \sin 2\alpha + Z_4 \cos 2\alpha), \end{aligned}$$

становится очевидным, что форма зависимости от угла γ_H для основного скалярного импеданса тождественна зависимости " $-Z_{yx}(\alpha)$ ". Для дополнительного скалярного импеданса эта форма сложнее — она определяется скобкой, которая тождественна форме зависимости $Z_{xx}(\alpha)$, а также удвоенной фазой магнитного поля. А выражения (12) для ортогональных направлений соответствуют $Z_{xy}(\alpha)$ и $Z_{yy}(\alpha)$. Учитывая соотношения компонент тензора импеданса для ортогональных координатных систем

$$\begin{aligned} Z'_{xx}(\alpha) &= Z'_{yy}(\alpha + \pi/2), & Z'_{xy}(\alpha) &= -Z'_{yx}(\alpha + \pi/2), \\ Z'_{yx}(\alpha) &= -Z'_{xy}(\alpha + \pi/2), & Z'_{yy}(\alpha) &= Z'_{xx}(\alpha + \pi/2), \end{aligned}$$

для скалярных импедансов можно написать

$$\begin{aligned} \xi^*(\gamma_H) &= e^{2i\varphi} Z'_{xx}(\alpha) = e^{2i\varphi} Z'_{yy}(\alpha + \pi/2), \\ \zeta(\gamma_H + \pi/2) &= Z'_{xy}(\alpha) = -Z'_{yx}(\alpha + \pi/2), \\ \zeta(\gamma_H) &= -Z'_{yx}(\alpha) = Z'_{xy}(\alpha + \pi/2), \\ \xi^*(\gamma_H + \pi/2) &= e^{2i\varphi} Z'_{yy}(\alpha) = e^{2i\varphi} Z'_{xx}(\alpha + \pi/2). \end{aligned} \quad (14)$$

При $\gamma_H = 0$

$$\begin{cases} \zeta(0) = -Z_{yx}, \\ \xi(0) = e^{2i\varphi} Z_{xx}, \end{cases}$$

а при $\gamma_H = \pi/2$

$$\begin{cases} \zeta(\pi/2) = Z_{xy}, \\ \xi(\pi/2) = e^{2i\varphi} Z_{yy}. \end{cases}$$

Для основных фундаментальных моделей выражения упрощаются.

Модель 1D

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} 0 & Z_n \\ -Z_n & 0 \end{vmatrix}, \quad \zeta = Z_n, \quad \xi = 0.$$

Модель 2D

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\zeta(\gamma_H) = Z_1 - Z_3 \cos 2\gamma_H, \quad \xi^*(\gamma_H) = e^{2i\varphi}(Z_1 \sin 2\gamma_H).$$

Действительные и мнимые части скалярных импедансов вычисляются так:

$$\zeta_{\text{Re}} = Z_{1\text{Re}} - Z_{3\text{Re}} \cos 2\gamma_H + Z_{4\text{Re}} \sin 2\gamma_H,$$

$$\zeta_{\text{Im}} = Z_{1\text{Im}} - Z_{3\text{Im}} \cos 2\gamma_H + Z_{4\text{Im}} \sin 2\gamma_H;$$

$$\xi_{\text{Re}} = Z_{2\text{Re}} \cos 2\varphi - Z_{2\text{Im}} \sin 2\varphi + (Z_{4\text{Re}} \cos 2\varphi - Z_{4\text{Im}} \sin 2\varphi) \cos 2\gamma_H + (Z_{3\text{Re}} \cos 2\varphi - Z_{3\text{Im}} \sin 2\varphi) \sin 2\gamma_H,$$

$$\xi_{\text{Im}} = -[Z_{2\text{Im}} \cos 2\varphi + Z_{2\text{Re}} \sin 2\varphi + (Z_{4\text{Im}} \cos 2\varphi + Z_{4\text{Re}} \sin 2\varphi) \cos 2\gamma_H + (Z_{3\text{Im}} \cos 2\varphi + Z_{3\text{Re}} \sin 2\varphi) \sin 2\gamma_H],$$

или

$$\xi_{\text{Re}} = Z_R(2\gamma) \cos 2\varphi - Z_I(2\gamma) \sin 2\varphi, \quad \xi_{\text{Im}} = -[Z_I(2\gamma) \cos 2\varphi + Z_R(2\gamma) \sin 2\varphi],$$

$$Z_I(2\gamma) = Z_{2\text{Im}} + Z_{3\text{Im}} \sin 2\gamma_H + Z_{4\text{Im}} \cos 2\gamma_H, \quad Z_R(2\gamma) = Z_{2\text{Re}} + Z_{3\text{Re}} \sin 2\gamma_H + Z_{4\text{Re}} \cos 2\gamma_H,$$

$$\xi = \xi_{\text{Re}} + i\xi_{\text{Im}}, \quad \xi^* = \xi_{\text{Re}} - i\xi_{\text{Im}}.$$

Фазовые диаграммы скалярных импедансов. Для импедансных исследований общепринятым является построение фазовых и амплитудных диаграмм. В качестве аналогов фазовых диаграмм тензора импеданса рассмотрим изменения величин $\arg \zeta(\gamma_H) = |\arctg(\zeta_{\text{Im}}/\zeta_{\text{Re}})|$ и $\arg \xi^*(\gamma_H) = |\arctg(-\xi_{\text{Im}}/\xi_{\text{Re}})|$ с изменением γ_H — азимута поляризации магнитного поля и назовем их также фазовыми диаграммами. Знак минус имеет место в диаграмме дополнительного импеданса ξ^* в силу того, что зависимость строится именно сопряженной величины:

$$\arg \zeta(\gamma_H) = \left| \arctg \frac{\zeta_{\text{Im}}}{\zeta_{\text{Re}}} \right| = \left| \arctg \frac{Z_{1\text{Im}} - Z_{3\text{Im}} \cos 2\gamma_H + Z_{4\text{Im}} \sin 2\gamma_H}{Z_{1\text{Re}} - Z_{3\text{Re}} \cos 2\gamma_H + Z_{4\text{Re}} \sin 2\gamma_H} \right|,$$

$$\arg \xi^*(\gamma_H) = \left| \arctg \frac{-\xi_{\text{Im}}}{\xi_{\text{Re}}} \right| = \left| \arctg \frac{Z_I(2\gamma_H) \cos 2\varphi + Z_R(2\gamma_H) \sin 2\varphi}{Z_R(2\gamma_H) \cos 2\varphi - Z_I(2\gamma_H) \sin 2\varphi} \right|.$$

Очевидно, диаграмма $\arg \zeta(\gamma_H)$ при изменении угла γ_H будет повторять форму фазовой диаграммы $Z_{yx}(\alpha)$. Для дополнительного импеданса поведение величины $\arg \xi^*(\gamma_H)$ будет интереснее.

Разделим числитель и знаменатель на величину $Z_R(2\gamma) \cos 2\varphi$:

$$\left| \arctg \frac{-\xi_{\text{Im}}}{\xi_{\text{Re}}} \right| = \left| \arctg \frac{\text{tg } \varphi_Z(\gamma) + \text{tg } 2\varphi}{1 - \text{tg } \varphi_Z(\gamma) \text{tg } 2\varphi} \right| = \varphi_Z(\gamma_H) + 2\varphi + n\pi,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad 0 < \varphi_Z(\gamma_H) + 2\varphi < \pi/2,$$

где $\varphi_Z(\gamma_H) = \arctg Z_I/Z_R \equiv \arg Z_{xx}(\alpha)$. Как видим, разность между графиками $\arg \xi^*(\gamma_H)$ и $\arg(Z_{xx})$ представляет собой удвоенную фазу магнитного поля.

Восстановление фазовой диаграммы $\arg(Z_{xx})$ по известной величине скалярного импеданса

ξ^* . Обозначим $\operatorname{tg}(\varphi_{\xi^*}) = -\xi_{\text{Im}}/\xi_{\text{Re}}$. Из условия

$$\operatorname{tg}(\varphi_{\xi^*}) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_Z + \operatorname{tg} 2\varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi_Z \operatorname{tg} 2\varphi}$$

определим величину

$$t_z = \operatorname{tg} \varphi_Z = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_{\xi^*}) - \operatorname{tg} 2\varphi}{1 + \operatorname{tg}(\varphi_{\xi^*}) \operatorname{tg} 2\varphi}.$$

Можно построить диаграмму $\arg(Z_{xx}) = \operatorname{arctg}(t_z)$, где угол поляризации магнитного поля будет играть роль угла поворота координатных осей. Численные модели показали абсолютно точное восстановление фазовой диаграммы $\arg(Z_{xx})$ по этому алгоритму.

Для среды, описываемой импедансом Тихонова — Каньяра,

$$\arg \zeta(\gamma_H) = |\operatorname{arctg} Z_{n\text{Im}}/Z_{n\text{Re}}|,$$

а $\arg \xi^*$ не существует. Для модели вида 2D ($Z_2 = Z_4 = 0$)

$$\arg \zeta(\gamma_H) = \left| \operatorname{arctg} \frac{\zeta_{\text{Im}}}{\zeta_{\text{Re}}} \right| = \left| \operatorname{arctg} \frac{Z_{1\text{Im}} - Z_{3\text{Im}} \cos 2\gamma_H}{Z_{1\text{Re}} - Z_{3\text{Re}} \cos 2\gamma_H} \right|,$$

$$\arg(\xi^*) = \left| \operatorname{arctg} \frac{-\xi_{\text{Im}}}{\xi_{\text{Re}}} \right| = \left| \operatorname{arctg} \frac{(Z_{3\text{Im}} \cos 2\varphi + Z_{3\text{Re}} \sin 2\varphi) \sin 2\gamma_H}{(Z_{3\text{Re}} \cos 2\varphi - Z_{3\text{Im}} \sin 2\varphi) \sin 2\gamma_H} \right| = \left| \operatorname{arctg} \frac{Z_{3\text{Im}} \cos 2\varphi + Z_{3\text{Re}} \sin 2\varphi}{Z_{3\text{Re}} \cos 2\varphi - Z_{3\text{Im}} \sin 2\varphi} \right|.$$

Очевидно, что диаграмма дополнительного импеданса для этой модели не содержит зависимости от угла γ_H . Она полностью определяется фазой магнитного поля.

Численные модели. В качестве численных моделей были использованы несколько примеров тензора импеданса. Некоторые из них были взяты из работы [Бердичевский, Логунович, 2005].

$$1. \hat{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 4 - 2i \\ -1 + 2i & 0 \end{bmatrix},$$

$$2. \hat{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 4 - 2i \\ -1 + 5i & 0 \end{bmatrix},$$

$$3. \hat{Z} = \begin{bmatrix} -0,5 - 3i & 4 - 2i \\ -1 + 2i & 0,5 + 3i \end{bmatrix},$$

$$4. \hat{Z} = \begin{bmatrix} -0,5 - 3i & 4 - 2i \\ -1 + 5i & 0,1 - i \end{bmatrix},$$

$$5. \hat{Z} = \begin{bmatrix} -0,2 + 0,2i & -1 + 3i \\ 0,7 - 0,5i & 0,5 - 1,4i \end{bmatrix}.$$

Для каждой модели были вычислены величины

$$\arg \zeta(\gamma_H) = \left| \operatorname{arctg} \frac{\zeta_{\text{Im}}}{\zeta_{\text{Re}}} \right|, \quad \arg \xi^*(\gamma_H) = \left| \operatorname{arctg} \frac{-\xi_{\text{Im}}}{\xi_{\text{Re}}} \right|,$$

а также $\arg Z_{xx}$, $\arg Z_{yx}$. На рисунках группы 1 приведены результаты вычислений. Во всех моделях принято $\varphi = \pi/16$. Очевидно, $2\varphi = \pi/8 \approx 0,4$ хорошо просматривается на всех графиках $\arg \xi^*(\gamma_H)$ и $\arg Z_{xx}$ в качестве их разности (рис. 1).

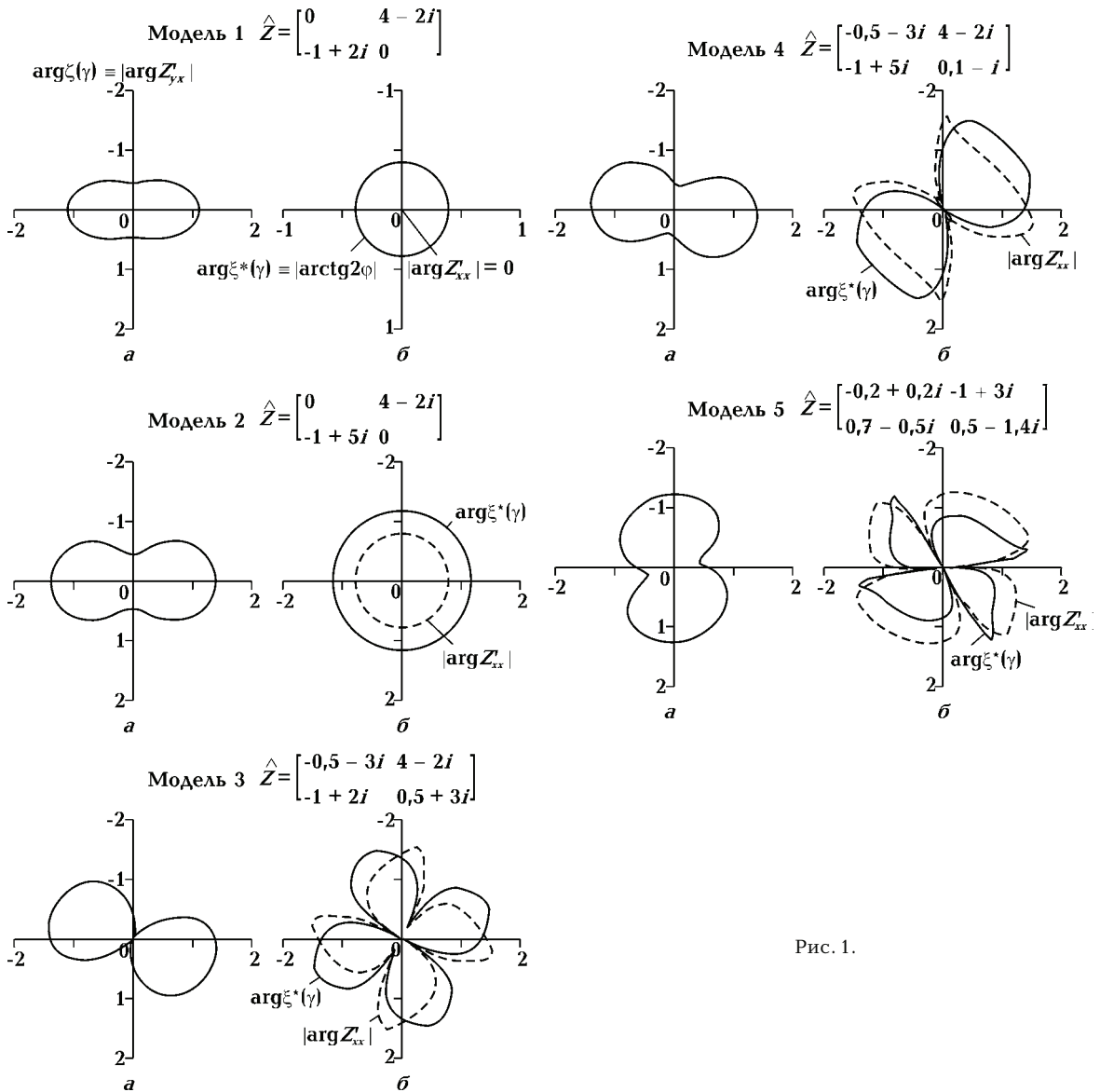


Рис. 1.

Квадраты модулей скалярных импедансов. Амплитудные диаграммы тензора импеданса представляют собой зависимости модулей компонент тензора от угла поворота координатных осей. Будем рассматривать квадраты модулей скалярных импедансов. Прежде всего отметим, что для данной задачи

$$|\xi(\gamma_H)|^2 = |Z'_{xx}(\alpha)|^2, \quad |\zeta(\gamma_H)|^2 = |Z'_{yx}(\alpha)|^2.$$

В виде зависимости от параметра γ_H эти величины могут быть получены напрямую из выражений (10), (11):

$$|\xi(\gamma_H)|^2 = (A_1 \sin^4 \gamma_H + A_2 \sin^3 \gamma_H \cos \alpha_H + A_3 \sin^2 \gamma_H \cos^2 \gamma_H + A_4 \sin \gamma_H \cos^3 \gamma_H + A_5),$$

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = (B_1 \sin^4 \gamma_H + B_2 \sin^3 \gamma_H \cos \gamma_H + B_3 \sin^2 \gamma_H \cos^2 \gamma_H + B_4 \sin \gamma_H \cos^3 \gamma_H + B_5 \cos^4 \gamma_H),$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= |Z_{xy}|^2, \quad A_2 = 2 \operatorname{Re}(Z_{xx}Z_{xy}^* - Z_{yy}Z_{xy}^*), \\ A_3 &= |Z_{xx}|^2 - 2 \operatorname{Re}(Z_{xx}Z_{yy}^* + Z_{xy}Z_{yx}^*) + |Z_{yy}|^2, \\ A_4 &= 2 \operatorname{Re}(Z_{yy}Z_{yx}^* - Z_{xx}Z_{yx}^*), \quad A_5 = |Z_{yx}|^2, \\ B_1 &= |Z_{yy}|^2, \quad B_2 = 2 \operatorname{Re}(Z_{yy}Z_{yx}^* + Z_{yy}Z_{xy}^*), \\ B_3 &= |Z_{xy}|^2 + 2 \operatorname{Re}(Z_{xx}Z_{yy}^* + Z_{xy}Z_{yx}^*) + |Z_{yx}|^2, \\ B_4 &= 2 \operatorname{Re}(Z_{xx}Z_{xy}^* + Z_{xx}Z_{yx}^*), \quad B_5 = |Z_{xx}|^2. \end{aligned}$$

Просуммировав и упростив полученное выражение, получим

$$\begin{aligned} |\xi(\gamma_H)|^2 + |\zeta(\gamma_H)|^2 &= \frac{\|\mathbf{E}_\tau\|^2}{\|\mathbf{H}_\tau\|^2} = (C_1 \operatorname{tg}^2 \gamma_H + C_2 \operatorname{tg} \gamma_H + C_3) / (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_H) = C_1 \sin^2 \alpha_H + C_2 \sin \gamma_H \cos \gamma_H + C_3 \cos^2 \gamma_H, \\ &= [(C_1 + C_3) - (C_1 - C_3) \cos 2\gamma_H + C_2 \sin 2\gamma_H] / 2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$C_1 = |Z_{xy}|^2 + |Z_{yy}|^2, \quad C_2 = 2 \operatorname{Re}(Z_{xx}Z_{xy}^* - Z_{yy}Z_{yx}^*), \quad C_3 = |Z_{xx}|^2 + |Z_{yx}|^2.$$

Очевидно, можно записать

$$C = C_1 + C_3 = |Z_{xx}|^2 + |Z_{xy}|^2 + |Z_{yx}|^2 + |Z_{yy}|^2 = |\hat{Z}|^2.$$

В работах [Yee, Paulson, 1987; Бердичевский, Логунович, 2005] рассматривалась величина $\sqrt{\|\mathbf{E}_\tau\|^2 / \|\mathbf{H}_\tau\|^2}$ для линейной поляризации магнитного и электрического полей. В работе [Бердичевский, Логунович, 2005] они были названы соответственно H - и E -поляризованными импедансами. Полученные выражения (15) совпадают с теми, которые в [Yee, Paulson, 1987; Бердичевский, Логунович, 2005] определяют величину $\sqrt{\|\mathbf{E}_\tau\|^2 / \|\mathbf{H}_\tau\|^2}$ для линейной поляризации магнитного поля.

Для модели 1D

$$|\zeta|^2 = |Z_n|^2, \quad |\xi|^2 = 0.$$

Для модели 2D

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = |Z_1|^2 - 2 \operatorname{Re}(Z_1 Z_3^*) \cos 2\gamma_H + |Z_3|^2 \cos^2 2\gamma_H, \quad |\xi(\gamma_H)|^2 = |Z_1|^2 \sin^2 2\gamma_H.$$

Однако квадраты норм скалярных импедансов как функций угла γ_H можно получить и другим способом.

Выражение модулей скалярных импедансов через параметры Стокса. В работе [Причепий, 2008] предлагалось использовать так называемые параметры Стокса для упрощения работы с выражениями для мнимых векторов \mathbf{K} , \mathbf{L} и модулей скалярных импедансов. Эти параметры определены [Борн, Вольф, 1973] таким образом:

$$\begin{aligned} S0_{V_{yx}} &= V_{x0}^2 + V_{y0}^2, \quad S1_{V_{yx}} = V_{x0}^2 - V_{y0}^2, \\ S2_{V_{yx}} &= 2 \operatorname{Re}(V_x^* V_y) = 2V_{x0}V_{y0} \cos \delta, \quad S3_{V_{yx}} = 2 \operatorname{Im}(V_x^* V_y) = 2V_{x0}V_{y0} \sin \delta. \end{aligned}$$

где $\delta = \varphi_y - \varphi_x$; эти параметры связаны соотношением $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Было показано [Причепий, 2008], что с помощью этих параметров, определенных для магнитного и электрического полей, скалярные импедансы можно представить в виде

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = \frac{S_0 E_{yx} S_0 H_{yx} - S_1 E_{yx} S_1 H_{yx} - S_2 E_{yx} S_2 H_{yx} + S_3 E_{yx} S_3 H_{yx}}{2S_0^2 H_{yx}},$$

$$|\xi(\gamma_H)|^2 = \frac{S_0 E_{yx} S_0 H_{yx} + S_1 E_{yx} S_1 H_{yx} + S_2 E_{yx} S_2 H_{yx} - S_3 E_{yx} S_3 H_{yx}}{2S_0^2 H_{yx}},$$

или

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{S_0 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} - \frac{S_1 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} \cdot \frac{S_1 H_{yx}}{S_0 H_{yx}} - \frac{S_2 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} \cdot \frac{S_2 H_{yx}}{S_0 H_{yx}} + \frac{S_3 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} \cdot \frac{S_3 H_{yx}}{S_0 H_{yx}} \right),$$

$$|\xi(\gamma_H)|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{S_0 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} + \frac{S_1 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} \cdot \frac{S_1 H_{yx}}{S_0 H_{yx}} + \frac{S_2 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} \cdot \frac{S_2 H_{yx}}{S_0 H_{yx}} - \frac{S_3 E_{yx}}{S_0 H_{yx}} \cdot \frac{S_3 H_{yx}}{S_0 H_{yx}} \right).$$

Для условий задачи, рассматриваемой в этой работе, S -параметры магнитного и электрического полей имеют некоторые особенности.

S -параметры магнитного поля для варианта его линейной поляризации:

$$S_0 H_{yx} = H_{x0}^2 + H_{y0}^2 = 1 \text{ согласно условию.}$$

$$S_1 H_{yx} = H_{x0}^2 - H_{y0}^2 = \cos 2\gamma, \quad S_2 H_{yx} = 2 \operatorname{Re}(H_x^* H_y) = \sin 2\gamma, \quad S_3 H_{yx} = 0. \quad (16)$$

Теперь перепишем выражения для квадратов модулей скалярных импедансов с учетом формул (16):

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = S_0 E_{yx} - S_1 E_{yx} \cos 2\gamma - S_2 E_{yx} \sin 2\gamma_H,$$

$$|\xi(\gamma_H)|^2 = S_0 E_{yx} + S_1 E_{yx} \cos 2\gamma + S_2 E_{yx} \sin 2\gamma_H.$$

Для электрического тангенциального поля S -параметры определим через компоненты тензора импеданса (с учетом линейной поляризации поля магнитного).

Параметры S электрического тангенциального поля для варианта линейной поляризации магнитного поля и с учетом нормировки $S_0 H_{yx} = 1$;

$$S_0 E_{yx} = E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = [(k_1 + k_3) + k_2 \sin 2\gamma_H + (k_3 - k_1) \cos 2\gamma_H] / 2, \quad (17)$$

$$k_1 = |Z_{xy}|^2 + |Z_{yy}|^2, \quad k_2 = 2 \operatorname{Re}(Z_{xx} Z_{xy}^* + Z_{yy} Z_{yx}^*), \quad k_3 = |Z_{xx}|^2 + |Z_{yx}|^2;$$

$$S_1 E_{yx} = E_{x0}^2 - E_{y0}^2 = [(l_1 + l_3) + l_2 \sin 2\gamma_H + (l_3 - l_1) \cos 2\gamma_H] / 2, \quad (18)$$

$$l_1 = |Z_{xy}|^2 - |Z_{yy}|^2, \quad l_2 = 2 \operatorname{Re}(Z_{xx} Z_{xy}^* - Z_{yy} Z_{yx}^*), \quad l_3 = |Z_{xx}|^2 - |Z_{yx}|^2;$$

$$S_2 E_{yx} = 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y) = (r_1 + r_3) + r_2 \sin 2\gamma_H + (r_1 - r_3) \cos 2\gamma_H, \quad (19)$$

$$r_1 = \operatorname{Re}(Z_{xx}^* Z_{yx}), \quad r_2 = \operatorname{Re}(Z_{xx}^* Z_{yy} + Z_{xy}^* Z_{yx}), \quad r_3 = \operatorname{Re}(Z_{yy}^* Z_{yx});$$

$$S_3 E_{yx} = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y) = (p_1 + p_3) + p_2 \sin 2\gamma_H + (p_1 - p_3) \cos 2\gamma_H, \quad (20)$$

$$p_1 = \text{Im}(Z_{xx}^* Z_{yx}), \quad p_2 = \text{Im}(Z_{xx}^* Z_{yy} + Z_{xy}^* Z_{yx}), \quad p_3 = \text{Im}(Z_{yy} Z_{xy}^*).$$

Наиболее характерные частные случаи:

Модель 1D

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} 0 & Z_n \\ -Z_n & 0 \end{vmatrix}, \quad S0_{Eyx} = |Z_n|^2, \quad S1_{Eyx} = -|Z_n|^2 \cos 2\gamma_H, \quad S2_{Eyx} = -|Z_n|^2 \sin 2\gamma_H, \quad S3_{Eyx} = 0.$$

Модель 2D

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{vmatrix}, \quad S0_{Eyx} = |Z_{xy}|^2 \sin^2 \gamma_H + |Z_{yx}|^2 \cos^2 \gamma_H, \quad S1_{Eyx} = |Z_{xy}|^2 \sin^2 \gamma_H - |Z_{yx}|^2 \cos^2 \gamma_H, \\ S2_{Eyx} = \text{Re}(Z_{xy}^* Z_{yx}) \sin 2\gamma_H, \quad S3_{Eyx} = \text{Im}(Z_{xy}^* Z_{yx}) \sin 2\gamma_H.$$

Также можно получить другие параметры импедансного типа с использованием сочетаний комплексных амплитуд, аналогичных параметрам Стокса, как одноименных, так и комбинированных из электрических и магнитных компонент. Еще можно предполагать линейной поляризацию электрического поля, а не магнитного [Yee, Paulson, 1987; Бердичевский, Логунови, 2005]. Однако в статье будут использованы только четыре перечисленных сочетания (17) — (20).

Для S -параметров существуют также выражения через параметры эллипсов поляризации [Причепий, 2008]:

$$S0_{Vyx} = a_V^2 + b_V^2, \quad S1_{Vyx} = (a_V^2 - b_V^2) \cos 2\alpha_V, \quad S2_{Vyx} = (a_V^2 - b_V^2) \sin 2\alpha_V, \quad S3_{Vyx} = 2a_V b_V.$$

где α_V — азимут большой полуоси a . Таким образом, в общем случае квадраты модулей скалярных импедансов можно выразить через элементы эллипсов поляризации электрического и магнитного полей:

$$|\zeta|^2 = [\Sigma_E \Sigma_H - \Delta_E \Delta_H \cos 2(\alpha_E - \alpha_H) + 4\Omega_E \Omega_H] / 2\Sigma_H^2, \\ |\xi|^2 = [\Sigma_E \Sigma_H + \Delta_E \Delta_H \cos 2(\alpha_E - \alpha_H) - 4\Omega_E \Omega_H] / 2\Sigma_H^2, \quad (21)$$

где $\Sigma = a^2 + b^2$, $\Delta = a^2 - b^2$, $\Omega = ab$.

Например, для сопряжено-ортогональных полей \mathbf{E}_τ и \mathbf{H}_τ , у которых большие полуоси перпендикулярны, а сами оси пропорциональны,

$$\cos 2(\alpha_E - \alpha_H) = -1, \quad \frac{b_E}{a_E} = \frac{b_H}{a_H} = \chi,$$

$$|\zeta|^2 = (a_E a_H + b_E b_H)^2 / (a_H^2 + b_H^2)^2 = \frac{a_E^2 (1 + \chi)^2}{a_H^2 (1 + \chi^2)^2},$$

$$|\xi|^2 = (a_E a_H + b_E b_H)^2 / (a_H^2 + b_H^2)^2 \equiv 0.$$

Если поля линейно поляризованы, $|\zeta|^2 = a_E^2 / a_H^2 \equiv |\hat{Z}|^2$ — квадрат модуля импеданса Тихонова—Каньяра.

Для нашей задачи $\alpha_H = \gamma_H$, $a_H^2 = 1$, $b_H = 0$ и формулы (21) примут вид

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = [a_E^2 + b_E^2 - (a_E^2 - b_E^2)\cos 2(\alpha_E - \gamma_H)]/2,$$

$$|\xi(\gamma_H)|^2 = [a_E^2 + b_E^2 + (a_E^2 - b_E^2)\cos 2(\alpha_E - \gamma_H)]/2.$$

Их также можно представить в виде

$$|\zeta(\gamma_H)|^2 = a_E^2 \sin^2 \delta + b_E^2 \cos^2 \delta, \quad |\xi|^2 = a_E^2 \cos^2 \delta + b_E^2 \sin^2 \delta,$$

$$|\zeta|^2 = a_E^2 - (a_E^2 - b_E^2)\cos^2 \delta, \quad |\xi|^2 = b_E^2 + (a_E^2 - b_E^2)\cos^2 \delta,$$

$$|\zeta|^2 = a_E^2 - \theta, \quad |\xi|^2 = b_E^2 + \theta,$$

где $\theta = (a_E^2 - b_E^2)\cos^2 \delta$.

Для сопряжено-ортогональных полей $|\zeta|^2 = a_E^2$, $|\xi|^2 = 0$.

Следует помнить, что все параметры эллипса поляризации электрического поля являются функциями изменения азимута магнитного поля γ_H . Определив параметры эллипса по формулам [Причепий, 2007]

$$2a^2 = S_0 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad 2b^2 = S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{S_2}{S_1},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-S_1 + \sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{-S_1 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_2},$$

посмотрим на модельных примерах, чем определяются модули скалярных импедансов. Результаты расчетов можно видеть на рис. 2. Из них очевидно, что если квадрат модуля основного импеданса $|\zeta(\gamma_H)|^2$ определяется формой зависимости большой полуоси эллипса поляризации электрического поля, то в формировании квадрата модуля дополнительного импеданса $|\xi(\gamma_H)|^2$ величины $b_E^2(\gamma)$ и $\theta = (a_E^2 - b_E^2)\cos^2 \delta$ могут играть равную роль. Так, для модели 5 величины $|\xi(\gamma_H)|^2$, $b_E^2(\gamma)$ и $\theta = (a_E^2 - b_E^2)\cos^2 \delta$ поданы на отдельных координатных осях с тем, чтобы показать, что квадрат модуля дополнительного скалярного импеданса фактически представлен величиной θ (рис. 2, модель 5).

Заключение. Рассмотрены некоторые свойства скалярных импедансов ζ , ξ^* в контексте существования тензора импеданса \hat{Z} и линейной поляризации тангенциального магнитного поля **Нт**. Такая упрощенная модель позволила обнаружить некоторые параллели в скалярном и тензорном описаниях электромагнитного поля, а также выявить некоторые особенности скалярных импедансов. Скалярные импедансы рассматривались как функции азимута поляризационного направления магнитного поля — угла γ_H .

Общей тенденцией оказалась аналогия между поведением функций $\zeta(\gamma_H)$, $\xi^*(\gamma_H)$ и компонентами тензора $\hat{Z}(\alpha)$ — изменением тензора импеданса при повороте координатных осей. Для основного скалярного импеданса эта аналогия оказалась «чистой» — ее можно выразить равенством $\zeta(\gamma_H) = -Z'_{yx}(\alpha)$. Связь дополнительного скалярного импеданса ξ^* с величиной $Z'_{xx}(\alpha)$ осложнена зависимостью от фазы магнитного поля: $\xi^*(\gamma_H) = e^{2i\varphi} Z'_{xx}(\alpha)$. Этот факт находит отражение при сопоставлении фазовых диаграмм $\arg Z_{xx}$ и $\arg \xi^*$.

Определенный интерес представляет система (14) — она отражает тот факт, что в данных условиях скалярные импедансы для ортогональных направлений поля **Нт** соответствуют всем четырем компонентам тензора импеданса $\hat{Z}(\alpha)$.

Что касается квадратичных амплитудных диаграмм скалярных импедансов, то они повторяют формы квадратов модулей компонент тензора $\hat{Z}(\alpha)$ соответственно с (14):

$$|\xi^*(\gamma_H)|^2 = |Z'_{xx}(\alpha)|^2, |\zeta(\gamma_H + \pi/2)|^2 = |Z'_{xy}(\alpha)|^2, |\zeta(\gamma_H)|^2 = |Z'_{yx}(\alpha)|^2, |\xi^*(\gamma_H + \pi/2)|^2 = |Z'_{yy}(\alpha)|^2.$$

Следует еще раз подчеркнуть, что знаки равенства в этой системе говорят лишь о соответствии форм зависимости приравненных величин от равных аргументов. Однако физическая природа этих аргументов различна — в одном случае это угол наклона поляризованного направления магнитного поля (γ_H), в другом — угол поворота координатной системы (α). С изменением угла γ_H изменяется соответственно величина и направление электрического поля при неизменности тензора импеданса, который определяется электропроводностью среды (при $\omega = \text{const}$). Очевидно, для скалярных импедансов существует зависимость от изменения параметров эллипсов поляризации электрического и магнитного полей. Условия, наложенные в данной статье на магнитное поле ($|\mathbf{H}|_\tau = 1$, линейная поляризация), позволили соотнести квадратичные амплитудные диаграммы скалярных импедансов с параметрами эллипса поляризации электрического поля \mathbf{E}_τ как функциями угла γ_H : $|\zeta(\gamma_H)|^2 = a^2 - \theta$, $|\xi(\gamma_H)|^2 = b^2 + \theta$, $\theta = (a^2 - b^2)\cos^2 \delta$, $\delta = \alpha_E - \gamma_H$. Как показали модельные расчеты, величина $|\zeta(\gamma_H)|^2$ определяе-

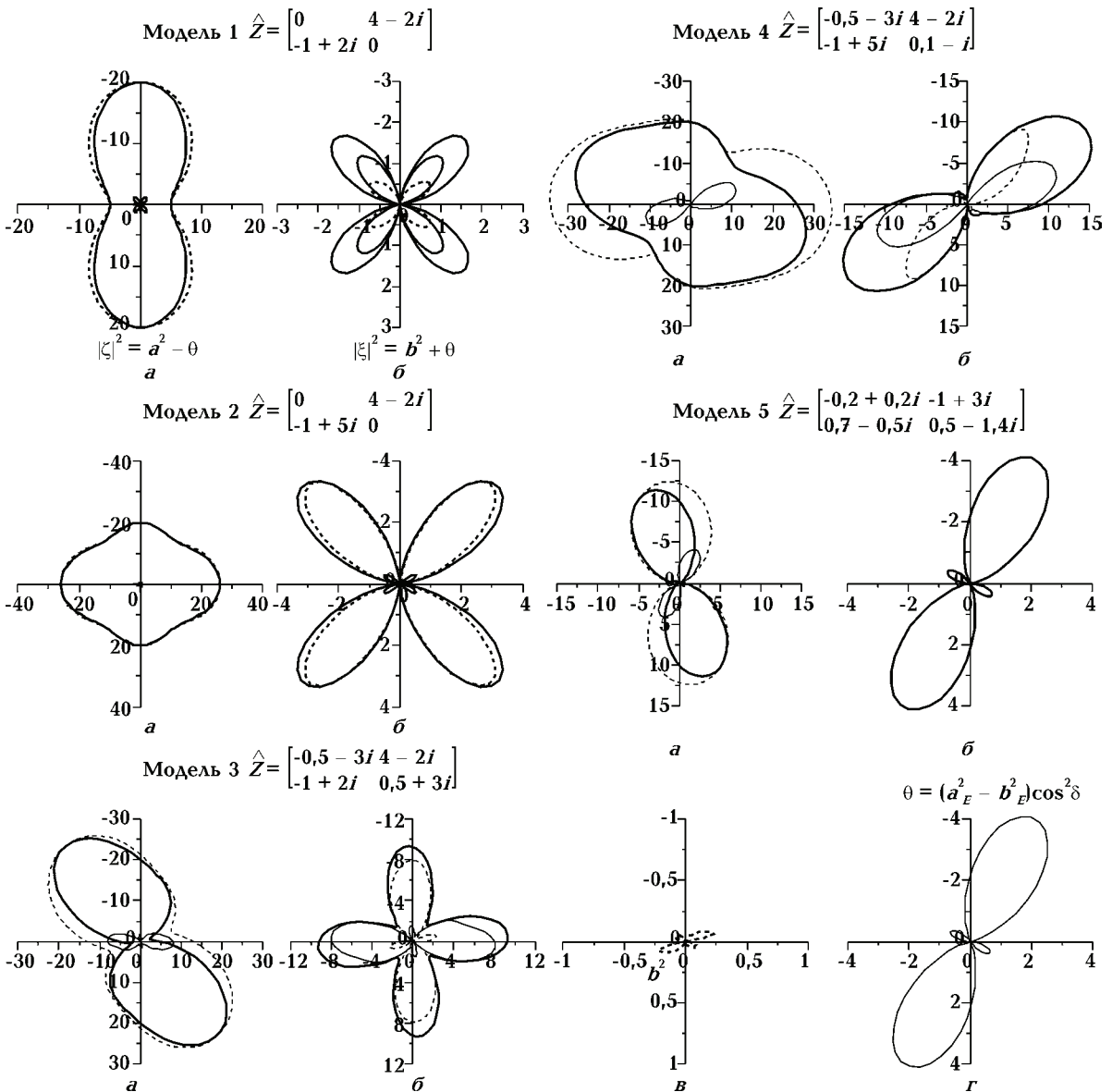


Рис. 2.

тся фактически полностью квадратом большой полуоси эллипса поляризации поля \mathbf{E}_t , она существует всегда, если существует поле, так как $a_E^2 > \theta$. Следовательно, график этой величины не имеет нулевых значений. Перемычка «восьмерки», характеризующей обычно график величины $|\zeta(\gamma_H)|^2$, может быть довольно узкой, но не нулевой. А вот график $|\xi(\gamma_H)|^2$, представленный, как правило, четырехлепестковой структурой, может иметь нули при ортогональности полей \mathbf{E}_t и \mathbf{H}_t . Значение $|\xi(\gamma_H)|^2$ определяется в равной степени как величиной малой полуоси b , так и величиной θ . Например, если для модели 2 (рис. 2, модель 2) квадрат модуля дополнительного скалярного импеданса $|\xi(\gamma_H)|^2$ фактически равен b^2 , то для модели 5 (рис. 2, модель 5) он равен величине θ .

Надеемся, дальнейшие исследования в направлении изучения свойств скалярных импедансов как для элементарных моделей, так и на материалах полевых измерений, позволят использовать эти величины для решения практических задач магнитотеллурики.

Список литературы

- Бергичевский М. Н., Логунович З. Ф. Магнитотеллурические полярные диаграммы. — 2005. — // www.hw-geophysics.ru.
- Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — Москва: Наука, 1973. — 719 с.
- Причепий Т. И. Векторное тождество импедансного типа и эллипсы поляризации гармонического электромагнитного поля // Геофиз. журн. — 2007. — **29**, № 5. — С. 124—142.
- Причепий Т. И. О возможности использования параметров Стокса при формализации некоторых задач магнитотеллурики // Геофиз. журн. — 2008. — **30**, № 6. — С. 93—112.
- Причепий Т. И. Определение параметров импедансного типа по значениям электромагнитного поля // Геофиз. журн. — 2006. — **28**, № 1. — С. 121—129.
- Шуман В. Н. Импедансные характеристики поля в геоэлектромагнитных исследованиях // Геофиз. журн. — 1993. — **15**, № 6. — С. 17—27.
- Шуман В. Н. Мнимые поверхностные векторы в многомерных обратных задачах геоэлектрики // Физика Земли. — 2007. — № 3. — С. 19—24.
- Шуман В. Н. Фундаментальные соотношения импедансного типа в магнитотеллурических и магнитовариационных методах геоэлектрики // Геофиз. журн. — 2001. — **23**, № 3. — С. 3—24.
- Aboul-Atta O. A., Boerner W. M. Vectorial Impedance Identity for the Natural Dependence of Harmonic Fields on Closed Boundaries // Canadian. Phys. — 1975. — **53**, № 15. — P. 1404—1407.
- Yee E., Paulson K. V. The canonical decomposition and its relationship to other forms of magnetotelluric impedance tensor analysis // J. Geophys. — 1987. — **61**, № 3. — P. 173—189.