ИВАН МИХАЙЛОВИЧ ЦИФРА: ДВА ЮБИЛЕЯ ОДНОГО ГОДА

В период с 17 по 22 сентября 2017 г. в уютном горном отеле "Marymont", расположенном рядом с одной из живописнейших долин Польских Татр, проходила XV Международная конференция "Mathematics in Technical and Natural Sciences", организованная факультетом прикладной математики Горно-металлургической академии г. Кракова (http://www.wms.agh.edu.pl/konferencje/mntp/)

В нынешнем году исполняется 30 лет с момента выхода в свет в журнале "Journal of Physics, ser. A" основополагающей статьи "On a reduction and solutions of non-linear wave equations with broken symmetry", в которой впервые был сформулирован в явном виде алгоритм поиска условной симметрии дифференциального уравнения. Чтобы воздать скромную дань уважения авторам этой статьи, покойному профессору В. И. Фущичу и нашему коллеге, профессору И. М. Цифре, было решено организовать в рамках конференции специальную сессию. Другой целью данного мероприятия была популяризация среди участников конференции этого сравнительно нового направления в исследовании дифференциальных уравнений. Мне выпала честь сделать первый сессионный доклад, который в сокращенном и несколько переработанном виде излагается ниже.

Классическая теория симметрий (или группового анализа) дифференциальных уравнений была разработана выдающимся норвежским математиком Софусом Ли в конце XIX в. Основываясь на идеях, сходных с выдвинутыми впервые в теории Галуа, С. Ли показал, что если система обыкновенных дифференциальных уравнений допускает достаточное количество гладких преобразований зависимых и независимых переменных, сохраняющих форму уравнений, то при выполнении определенных алгебраических условий, накладываемых на совокупность генераторов этих преобразований, решение системы может быть представлено в квадратурах.

Идеи С. Ли применимы и к дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП), однако ситуация в этом случае является более сложной. В частности, при наличии лишь конечной совокупности преобразований симметрии ДУЧП, как правило, невозможно полностью проинтегрировать. Однако на всем протяжении XX в. теория симметрий интенсивно использовалась (в явном, а чаще — в скрытом виде), поскольку, используя процедуру *теоретико-групповой редукции,* во многих случаях можно получить многопараметрические семейства точных решений нелинейных ДУЧП. Здесь уместно сослаться как на работы многочисленных специалистов в области физики и нелинейной механики (Баренблатт, Birkhof, Taylor, Коробейников, Ландау, Седов, Станюкович, Зельдович и др.), использующих понятие автомодельности для решения конкретных задач, так и на работы в сфере математики, основанные на формализме локальных групп Ли (Овсянников, Ибрагимов, Bluman and Cole, Olver и многие другие).

Наряду с успехами в применении классической теории Ли к решению конкретных математических задач (поисков полной группы инвариантности дифференциальных уравнений, групповой классификации уравнений, нахождении симметрийных анзацев, приводящих к редукции количества независимых переменных), к концу XX в. появились многочисленные примеры, указывающие на ограниченность классического подхода. В частности, были обнаружены случаи редукции числа независимых переменных с помощью анзацев, которые невозможно воспроизвести на основании формализма классических групп Ли. По этой причине в указанный период времени велись интенсивные попытки расширения понятия симметрии и поиски регулярных методов получения нелиевских анзацев.

Один из возможных подходов был предложен в цитируемой выше работе В. И. Фущича и И. М. Цифры, в которой сформулировано понятие ***условной симметрии***. В очень упрощенном виде ее можно представить себе так. Пусть имеется двумерная поверхность, образованная вращением плоской параболы, заданной уравнениями $z = x^2 - 1$, $y = 0$ относительно оси OZ. Поверхность, образованную малой деформацией всех точек в направлении одной из осей (например, оси OX), за исключением точек, лежащих в плоскости XOY, обозначим как M. Очевидно, что вращения относительно оси OZ не отображают точки поверхности M в себя. Однако она содержит подмножество C: $(x, y, z) \in \in R^3$, где $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, симметричное относительно таких операций. Множество C лежит на пересечении M с многообразием S, совпадающим с плоскостью XOY. Таким образом, точки данного множества обладают более высокой симметрией, если выполняют условие принадлежности к множеству S.

В подходе Фущича и Цифры был впервые предложен конструктивный алгоритм, позволяющий находить условия (аналоги поверхности S), приводящие к нахождению подмножеств решений, обладающих дополнительной симметрией. Не будучи непосредственным участником описываемых событий, я, тем не менее, был осведомлен о перипетиях, связанных с условной симметрией, ибо проживал в 1980-е годы с Иваном Цифрой под одной крышей общежития аспирантов АН УССР и часто с ним общался. В описываемый период времени он проходил подготовку в аспирантуре Института математики АН УССР и был занят симметричным анализом уравнений Максвелла в материальной среде. Идея условной симметрии не была связана с основным направлением исследований, проводимых Иваном. Первоначально она была воспринята без должного энтузиазма, поскольку выглядела сырой и малоперспективной. Ситуация, однако, кардинально изменилась в тот момент, когда Ивану удалось сконструировать конкретный легко верифицируемый пример, который лег в основу указанной выше статьи: нелинейное уравнение Д'Аламбера, допускающее лишь масштабные преобразования и сдвиг в классическом (лиевском) смысле, редуцировалось к обыкновенному дифференциальному уравнению ***Лоренц-инвариантным анзацем***! После этого решено было написать заметку, послать ее в хороший журнал и посмотреть, какими будут рецензии. Ответы рецензентов превзошли самые смелые ожидания. Один из рецензентов написал, что материал заслуживает не только публикации, но и наиболее широкой популяризации. Он также выслал несколько статей на эту же тему, доселе неизвестных авторам. Работа В. И. Фущича и И. М. Цифры не была, однако, повторением известных к тому времени результатов, так как содержала конструктивный алгоритм, позволяющий описывать условные симметрии и реализовывать на их основе нелиевские редукции.

Подход, предложенный авторами, технически отличался от лиевского тем, что приводил к необходимости решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, тогда как в классическом подходе уравнения, определяющие симметрию, всегда линейны. К счастью, системы нелинейных определяющих уравнений, как правило, сильно переопределены. Используя это обстоятельство, такие системы весьма часто удается точно решить.

Переориентацию группы математиков, возглавляемой профессором В. И. Фущичем, на класс задач, связанных с поисками и использованием условной симметрии, в одночасье сделать было нельзя. К тому времени, когда работы были в разгаре, Иван Цифра уже занимался освоением методов обратных задач ядерной геофизики в Институте геофизики АН Украины, в который был направлен по распределению после окончания аспирантуры. Поэтому лавры первопроходцев в этой по-настоящему увлекательной и перспективной области исследований достались, по большей части, не Ивану, а тем его коллегам, которые могли полностью посвятить свое время этим отнюдь не легким исследованиям.

К задачам, связанным с условной симметрией, Иван Цифра вернулся несколькими годами позже, во время пребывания в докторантуре Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины. Более зрелое понимание темы исследований позволило ему, совместно с коллегами, получить в тот период очень сильный теоретический результат о том, что если лиевская симметрия является ***достаточным*** условием для редукции, то условная симметрия является условием ***необходимым и достаточным***.

В настоящее время Иван Михайлович Цифра совмещает свою работу в Институте геофизики им. С. И. Субботина Национальной академии наук Украины с лекциями на факультете прикладной математики Горно-металлургической академии г. Кракова в должности профессора и, помимо педагогической работы, принимает активное участие в научных исследованиях, обобщая свои предыдущие результаты на более сложные алгебро-геометрические объекты и развивая нелинейные методы разделения переменных в теории дифференциальных уравнений.

Нынешний год является для профессора И. М. Цифры дважды юбилейным, поскольку в октябре он отмечает свое 60-летие. Пожелаем уважаемому юбиляру крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

декан факультета прикладной математики
Akademia Gorniczo-Hutnicza im. Stanislava Staszica (Krakow), Wydzial Matematyki Stosowanej,
д-р физ.-мат. наук В. А. Владимиров