

## Моделювання регіонального магнітного поля з використанням сферичних функцій: теоретичний аспект

*Ю. П. Сумарук<sup>1</sup>, А. М. Янків-Вітковська<sup>2</sup>, Б. Б. Джуман<sup>2</sup>, 2019*

<sup>1</sup>Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна  
НАН України, Львів, Україна

<sup>2</sup>Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет  
"Львівська політехніка", Львів, Україна

Надійшла 23 жовтня 2018 р.

Наблюдение геомагнитного поля, измерение величин его компонент и создание на их основе моделей геомагнитного поля, а также составление геомагнитных карт представляют основное направление геомагнитных исследований. Аналитическая модель геомагнитного поля позволяет вычислить величину любой компоненты геомагнитного поля в какой-либо точке околоземного космического пространства и на Земле. Предложен новый метод для построения региональной модели геомагнитного потенциала. Согласно фундаментальным исследованиям Гаусса, классическим представлением геомагнитного потенциала стала его запись в виде бесконечного ряда функций Лежандра. Обычно разложение геомагнитного потенциала в ряд по сферическим или эллипсоидальным функциям используется в большинстве случаев для моделирования глобального (нормального) геомагнитного поля с длиной ряда в 9—13 гармоник. Однако если речь идет не о всей сфере, а о ее отдельной части (сегменте сферы или ее трапеции), то сферические функции Лежандра теряют свою ортогональность. В связи с этим для разработки региональных моделей поля применяют различные модификации сферического гармонического анализа с использованием сферических функций Лежандра целой степени и действительного порядка. Такие функции формируют ортогональную по весу систему функций на произвольной сферической трапеции, однако не имеют рекуррентных соотношений, в связи с чем для их вычисления необходимо использовать расписание в гипергеометрический ряд. Областью определения таких функций в сферической системе координат служит сферический сегмент. Получены рабочие формулы для построения упомянутой выше модели. В качестве входных данных для построения модели регионального магнитного поля использованы значения его компонент, полученные из измерений на геомагнитных обсерваториях. Предложено проводить вычисления региональной модели геомагнитного потенциала указанным методом в рамках процедуры изъятие—вычисление—восстановление. Сначала находят систематическую составляющую компонент, применив глобальную модель геомагнитного поля. Далее вычисляют аномальные значения компонент. Используя базовые функции, вычисляют модель регионального аномального геомагнитного поля. Для стабилизации решения вводят параметр регуляризации Тихонова.

**Ключевые слова:** региональное магнитное поле, сферические функции, моделирование.

**Вступ.** Просторовий розподіл геомагнітного поля та його еволюційний процес є одним із найважливіших складових у геофізичних дослідженнях. Процес побудови моделі глобального магнітного поля добре вивчений. Аналітичні моделі геомагнітного поля дають змогу визначити величину будь-якої компоненти поля у будь-якій точці з координатами  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  (висота). Подання в аналітичному вигляді є зручним для розв'язання задач, пов'язаних з дослідженням зовнішнього поля, при вирішенні питань

навігації і орієнтації, виділення тренду (дослідження аномалій, створених коровими джерелами) тощо. Безумовно, у кожній з цих задач поставлено свої специфічні вимоги до аналітичного подання, але можна виділити загальні вимоги, яким має задовільняти будь-яка сучасна аналітична модель. По-перше, у моделі має бути певна точність, щоб різниця між вимірними і розрахованими значеннями не перевищувала деяку величину. Так, для оцінювання величини поля корових джерел різниця не має перевищувати 250 нТл. За моделлю має бути виділено поле корових джерел, тобто необхідне виконання умови  $\sum \Delta Z_i \rightarrow 0$ ,  $\sum \Delta H_i \rightarrow 0$ ,  $\sum \Delta T_i \rightarrow 0$  на профілі певної довжини або на площі певних розмірів. Довжина профіля може бути оцінена на підставі спектрального аналізу. Модель має задовільно передавати зменшення поля з висотою. На висотах до 400 км розбіжність між вимірними і обчисленими значеннями не має перевищувати 50 нТл. Модель поля і вікові варіації мають правильно передавати часові зміни поля (при усередненні за деяким інтервалом часу). Ці вимоги необхідні для зіставлення між собою різних аналітичних моделей. Зіставлення коефіцієнтів різних моделей не дає змоги вибрати кращу модель. Зменшення різниць у коефіцієнтах означає, що під час створення моделей використовували однорідніший матеріал, а методики побудови моделей відрізнялися несуттєво.

Дані магнітних обсерваторій, безумовно, є якісним матеріалом для оцінювання репрезентативності створеної аналітичної моделі. Для задач, пов'язаних з вивченням явищ в іоносфері та магнітосфері, аналітична модель має правильно передавати закон зменшення поля з відстанню. Моделі, побудовані тільки за наземними даними, не задовільняють цю умову. Середньоквадратична помилка 250 нТл на поверхні Землі може бути отримана для максимального порядку моделі  $n = m = 9$ , але при цьому виконання умови  $\sum \Delta Z_i \rightarrow 0$ ,  $\sum \Delta H_i \rightarrow 0$ ,  $\sum \Delta T_i \rightarrow 0$  може бути на менших профілях і площах. Усі існуючі аналітичні моделі не можуть бути використані як "нормальне поле" для виділення аномалій протяжністю 200 км і менше, тому деяка частина головного поля входить помилкою в аномальне поле. Корегування моделі для обмеженої території за додатковою інформацією дає змогу одержати більш задовільне "нормальне поле".

Для побудови глобальної моделі переважно використовують глобальні сферичні функції Лежандра, однак для побудови моделі регіонального магнітного поля такий підхід застосовувати не можна, оскільки у такому разі сферичні функції Лежандра втрачають свою ортогональність і розв'язок стає нестабільним [Орлюк, 2000; Орлюк и др., 2017]. Для побудови моделі регіонального магнітного поля застосовують метод SCHA [Haines, 1985, 1988; Yankiv-Vitkovska, Dzhuman, 2017], який ґрунтується на використанні як базової системи функцій сферичних функцій Лежандра цілого степеня, але дійсного порядку, а також інші методи, наприклад ASHA [De Santis, 1992; Dzhuman, 2014], TOSCA [De Santis, 1991], R-SCHA [Thébault et al., 2006], кожен з яких має свої переваги та недоліки і є модифікацією методу SCHA [Beggan et al., 2013; Thébault, Gaya-Piqué, 2008; Thébault et al., 2010]. Основними недоліками усіх перелічених методів можна вважати такі: а) для їх безпосереднього використання вхідну інформацію необхідно трансформувати з довільного регіону на сферичний сегмент з центром на північному полюсі, через що втрачається фізичний зміст процесу; б) базовим функціям не властива ортогональність. У статті для побудови моделі регіонального магнітного поля запропоновано метод, у якому як базові використовують функції, ортогональної на довільній сферичній трапеції.

**Гармонічний аналіз на "шапці" сфери (SCHA).** У 1985 р. у статті [Haines, 1985] для побудови моделі регіонального магнітного поля було запропоновано застосовувати метод SCHA (spherical cap harmonic analysis), теоретичні засади якого вперше були роз-

роблені задовго до цього у роботі [Kelvin, Tait, 1896]. Цей метод передбачає накладення граничних умов задачі Штурма—Ліувілля [Hwang, Chen, 1997] на диференціальне рівняння Лежандра. У такому випадку за базову систему функцій приймають сферичні функції Лежандра цілого степеня, але дійсного порядку  $P_{n_k m}(\cos\theta)$ , де  $n_k$  — дійсне число,  $k$  — упорядковувальний індекс. Алгоритми для знаходження значень  $n_k$  детально розглянуто у статті [Macdonald, 1900]. Функції  $P_{n_k m}(\cos\theta)$  не мають простих рекурентних співвідношень, тому зазвичай їх знаходять за допомогою розкладення в гіпергеометричний ряд. Область визначення таких функцій у сферичній системі координат слугує сферичний сегмент  $\theta \in [0, \theta_0]$ , де  $\theta_0$  — зенітна відстань, що відображає координату межі сегмента (рис. 1).



Рис. 1. Сферичний сегмент.

Слід зауважити, що функції  $P_{n_k m}(\cos\theta)$  формують дві ортогональні системи функцій на сферичному сегменті, проте загалом вони не є ортогональними. Зрештою будь-яку функцію  $F$ , задану на сферичному сегменті  $\theta \in [0, \theta_0]$  одиничної сфери, можна розкласти в ряд

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k (C_{km} \cos m\lambda + S_{km} \sin m\lambda) P_{n_k m}(\cos\theta), \quad (1)$$

де  $C_{km}$  та  $S_{km}$  — невідомі коефіцієнти моделі.

Оскільки вхідні дані розміщуються здебільшого на довільній території, їх переносять штучно на сегмент з центром на північному полюсі за допомогою формул [Younis et al., 2013]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \bar{\phi} \sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin \bar{\phi} \cos \bar{\phi}_0 - \cos \bar{\phi} \sin \bar{\phi}_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}, \quad \cos \theta = \sin \bar{\phi} \sin \bar{\phi}_0 - \cos \bar{\phi} \cos \bar{\phi}_0 \cos(\lambda - \lambda_0), \quad (2)$$

де  $\alpha$  — азимут лінії, проведеної з полюса до точки;  $\theta$  — сферична відстань від полюса до точки;  $(\lambda, \bar{\phi})$  — геоцентричні широта і довгота точки;  $(\lambda_0, \bar{\phi}_0)$  — геоцентричні широта і довгота полюса.

Метод SCHA можна використовувати для моделювання гравітаційного поля [De Santis, Torta, 1997], а також для моделювання іоносфери та її параметрів [Gao, Liu, 2002; Liu et al., 2014]. Проте найбільшого застосування він набув при розв'язанні задач моделювання регіонального магнітного поля Землі [Düzgüt, Malin, 2000; Kotzé, 2001; Stening et al., 2008].

На підставі методу SCHA побудовано методи ASHA і TOSCA, які також здебільшого використовують для обчислення регіонального магнітного поля Землі. Метод ASHA [De Santis, 1992] передбачає перехід від системи координат "шапки" сфери  $(r, \theta, \lambda)$  до нової системи координат на половині сфери  $(r', \theta', \lambda')$ :

$$\left. \begin{aligned} r' &= r, \\ \lambda' &= \lambda, \\ \theta' &= s \cdot \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де  $s = \frac{\pi}{2\theta_0}$ ,  $\theta_0$  — половинний кут "шапки" сфери.

Перехід (3) у геоцентричній системі координат можна записати у вигляді

$$X' = \frac{X}{s}, \quad Y' = Y \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}, \quad Z' = Z. \quad (4)$$

У такому разі отримаємо неортогональну систему функцій, проте між функціями будуть прості рекурентні співвідношення.

Метод TOSCA [De Santis, 1991] полягає у переміщенні початку системи координат з центру Землі до її поверхні. Таким чином, цей метод діє свого роду як фільтр, подає дані в дуже дрібних деталях (малі довжини хвиль) у центрі регіону і згладжує їх (великі довжини хвиль) на шляху до межі регіону.

Оригінальний підхід за методом TOSCA полягає у використанні методу SCHA у новій референсній системі зі зміщеним центром вертикально вздовж радіуса з центру Землі. Формули переходу між цими системами координат мають вигляд

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad Z_1 = Z - Z_0, \quad (5)$$

де  $X, Y, Z$  — координати у сферичній системі (після обертання вихідних даних на "шапку" сфери);  $X_1, Y_1, Z_1$  — координати у новій зміщеній референсній системі. Очевидно, перехід (3) у сферичних координатах матиме вигляд (рис. 2)

$$r_1 = \sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0 r \cos \theta}, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \theta_1 = \arcsin \left( r \sin \frac{\theta}{r_1} \right). \quad (6)$$

Позначивши центральний кут сферичної "шапки"  $\alpha$  у системі координат  $\{r, \theta, \lambda\}$  і, відповідно,  $\alpha_1$  — у системі координат  $\{r_1, \theta_1, \lambda_1\}$ , можна легко встановити між ними зв'язок:

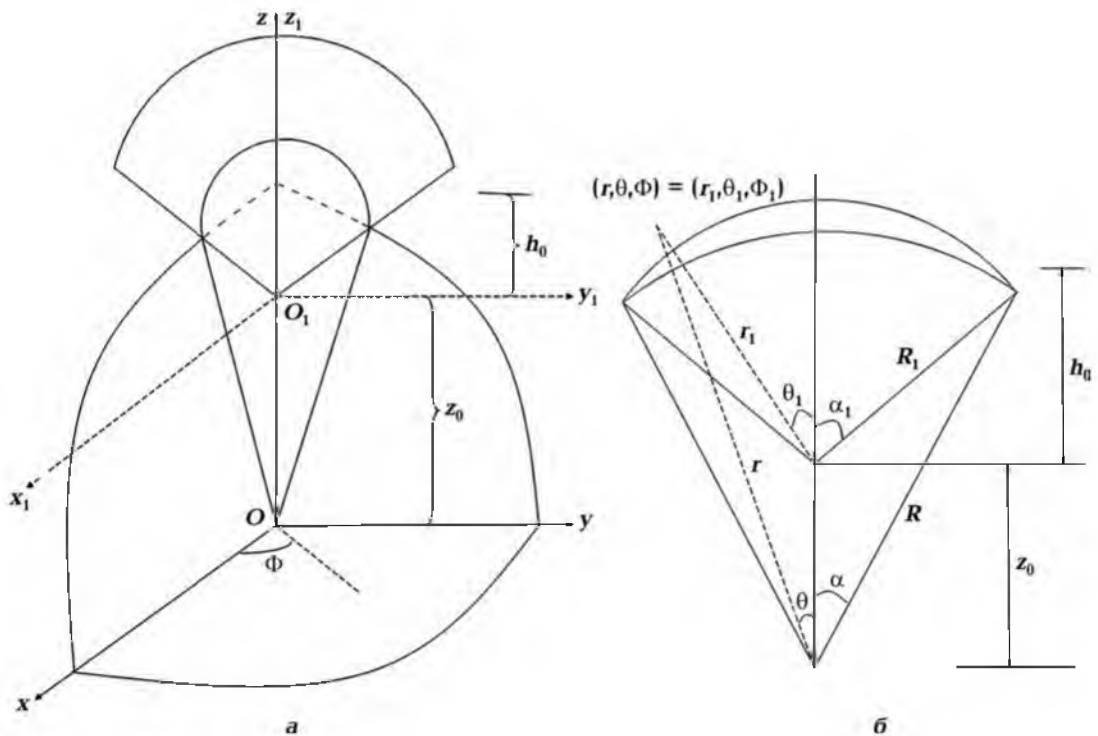


Рис. 2. Зміщення системи координат для використання методу TOSCA у вигляді 3D (а) і 2D (б).

$$r_1 = r \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} \tag{7}$$

**Сферичні функції на сферичній трапеції.** У статті [Dzhuman, 2017] запропоновано використовувати як базову систему функцій, яку зрештою також побудовано на підставі методу SCHА, проте їй властива ортогональність за вагою на довільній сферичній трапеції. Базові функції для трапеції з координатами вершин  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  у такому разі мають вигляд [Dzhuman, 2017]

$$R_{km}(\theta, \lambda) = P_{km}(\theta) \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right), \quad S_{km}(\theta, \lambda) = P_{km}(\theta) \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right), \tag{8}$$

тоді як  $P_{km}(\theta)$  можна знайти з таких співвідношень:

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(\theta) &= \sin^m(\theta - \theta_{\min}) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta - \theta_{\min})}{2}\right), \\ &\quad \text{if } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\text{mean}}, \\ P_{km}(\theta) &= (-1)^{k+m} \sin^m(\theta_{\max} - \theta) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_{\max} - \theta)}{2}\right), \\ &\quad \text{if } \theta_{\text{mean}} \leq \theta \leq \theta_{\max}. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

У формулі (9)  $F$  — позначення гіпергеометричного ряду [Смирнов, 1953]:

$$F(a, b, c, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \prod_{l=0}^{k-1} \frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)} \right] z^k = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Алгоритм знаходження величин  $n_k$  також детально розглянуто у статті [Dzhuman, 2017]. Для наочності на рис. 3 показано графік функцій (2) для  $m = 0$  і  $k = 0 \dots 3$  на відрізьку  $[20^\circ; 70^\circ]$ .

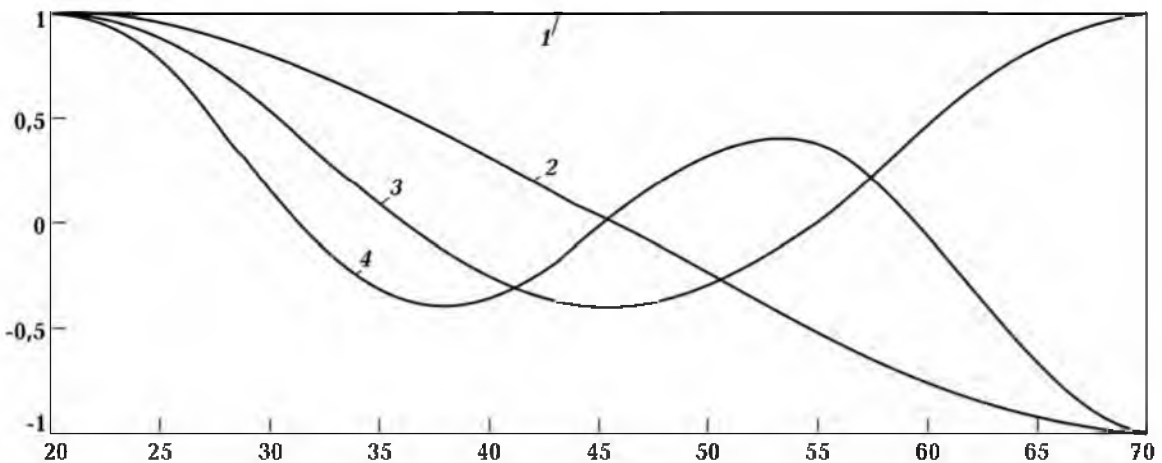


Рис. 3. Функції (2) на відрізьку  $[20^\circ; 70^\circ]$ : 1 —  $m = 0, k = 0$ ; 2 —  $m = 0, k = 1$ ; 3 —  $m = 0, k = 2$ ; 4 —  $m = 0, k = 3$ .

Практично будь-яку функцію на довільній сферичній трапеції, в тому числі функцію геомагнітного потенціалу, можна розкласти в ряд за функціями (8).

Добре відомо, що компоненти геомагнітного потенціалу є функціями перших похідних. Очевидно, особливий інтерес становлять вирази похідних  $\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta}$  (рис. 4):

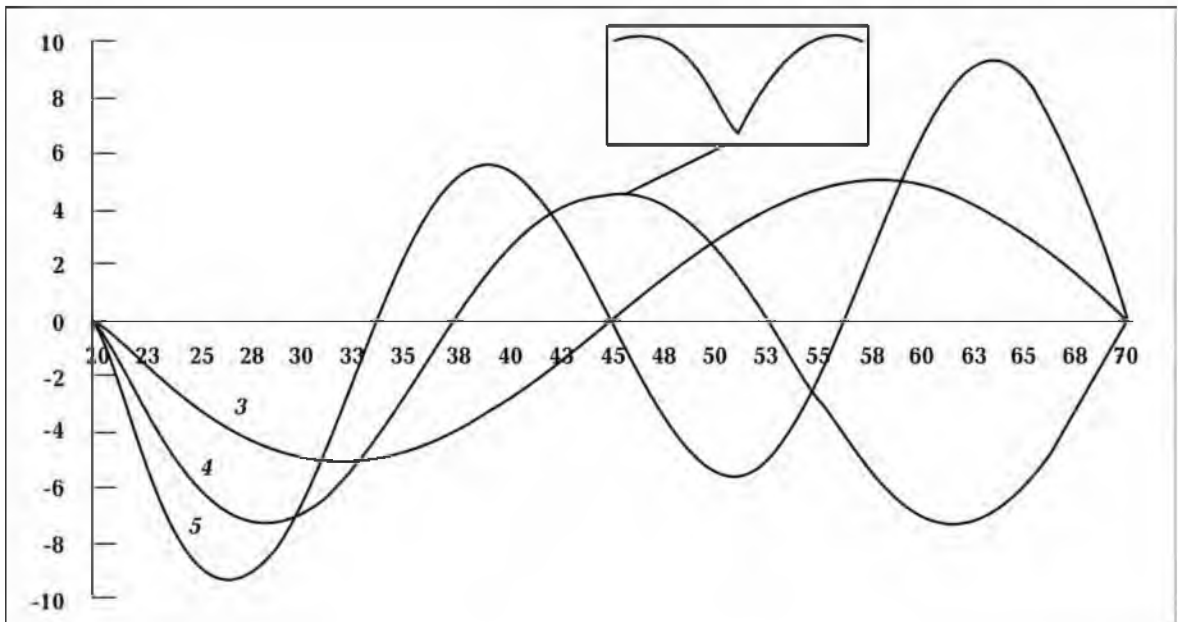
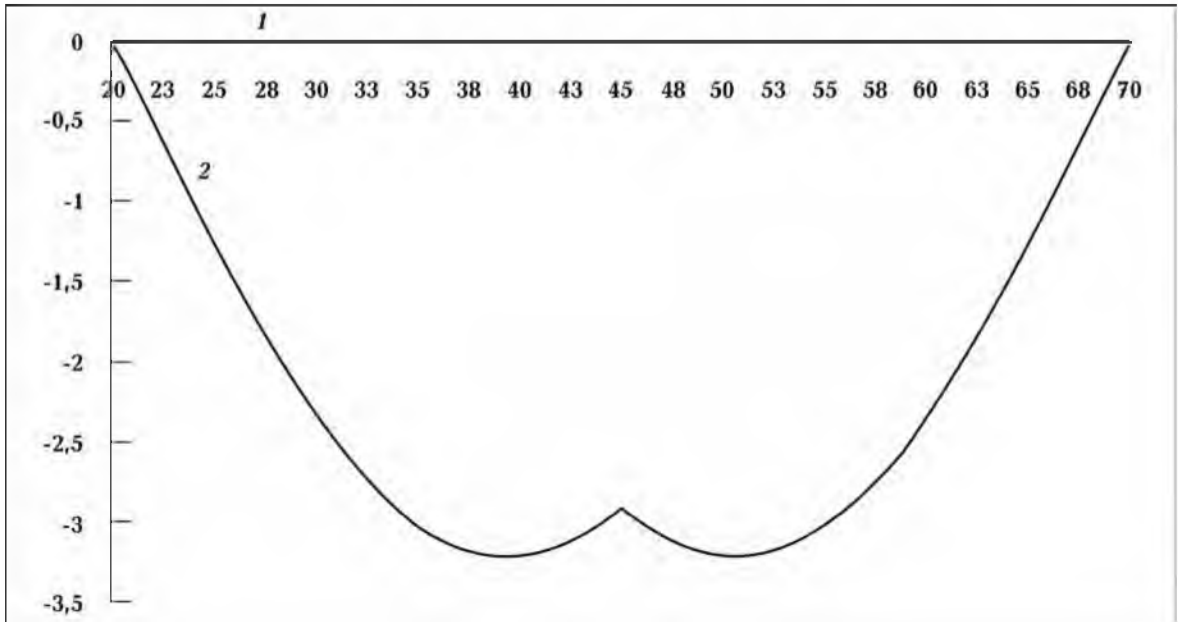


Рис. 4. Графік функцій  $\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta}$ : 1 —  $m=0, k=0$ ; 2 —  $m=0, k=1$ ; 3 —  $m=0, k=2$ ; 4 —  $m=0, k=3$ ; 5 —  $m=0, k=4$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta} &= m \cdot \operatorname{ctg}(\theta - \theta_{\min}) P_{km}(\theta) + \frac{1}{2} \frac{(m - n_k)(n_k + m + 1)}{1 + m} \sin^{m+1}(\theta - \theta_{\min}) \times \\ &\times F\left(m - n_k + 1, n_k + m + 2, 2 + m, \frac{1 - \cos(\theta - \theta_{\min})}{2}\right), \text{ if } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\text{mean}}, \\ \frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta} &= -m \cdot \operatorname{ctg}(\theta_{\max} - \theta) P_{km}(\theta) + (-1)^{k+m+1} \cdot \frac{1}{2} \frac{(m - n_k)(n_k + m + 1)}{1 + m} \sin^{m+1}(\theta_{\max} - \theta) \times \\ &\times F\left(m - n_k + 1, n_k + m + 2, 2 + m, \frac{1 - \cos(\theta_{\max} - \theta)}{2}\right), \text{ if } \theta_{\text{mean}} \leq \theta \leq \theta_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

**Обчислення моделі регіонального магнітного поля з використанням процедури вилучення—обчислення—відновлення.** Для побудови моделі регіонального магнітного поля як вхідні дані використовують значення його компонент  $B_x, B_y, B_z$ , отримані як виміри з геомагнітних обсерваторій. Потенціал  $V$  геомагнітного поля пов'язаний з трьома його компонентами  $B_x, B_y, B_z$  таким чином:

$$B_x \equiv -B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad B_y \equiv B_\lambda = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \lambda}, \quad B_z \equiv -B_r = \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (12)$$

Для якіснішого використання обчислювальних ресурсів і отримання точнішої моделі здебільшого використовують процедуру вилучення—обчислення—відновлення. Вона передбачає такі кроки.

1. Знаходять систематичну складову компонент  $B_{xm}, B_{ym}, B_{zm}$ , використовуючи деяку глобальну модель магнітного поля. Рівняння такої моделі має вигляд

$$V(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \left\{ \bar{g}_{nm}(t) \cos(m\lambda) + \bar{h}_{nm}(t) \sin(m\lambda) \right\} \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (13)$$

де  $R$  — середній радіус Землі;  $\bar{g}_{nm}$  та  $\bar{h}_{nm}$  — нормовані коефіцієнти моделі;  $n_{\max}$  — максимальний порядок моделі.

2. Обчислюють аномальні значення компонент  $\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z$  за формулами

$$\Delta B_x = B_x - B_{xm}, \quad \Delta B_y = B_y - B_{ym}, \quad \Delta B_z = B_z - B_{zm}. \quad (14)$$

3. "Обчислюють" модель регіонального магнітного поля, а саме аномальні значення компонент  $\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z$ , використовуючи відповідні базові функції, наприклад функції (8).

4. Знаходять суму глобальної і обчисленої регіональної моделі для її "відновлення".

Розкладемо геомагнітний потенціал  $V$  в ряд за функціями (8). Отримаємо

$$V(r, \theta, \lambda) = R \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \right\} P_{km}(\theta). \quad (15)$$

Комбінуючи рівняння (15) з рівняннями (12) і зважаючи на формули (11), після не-

значних математичних перетворень отримуємо формули для обчислення значень аномальних компонент  $\Delta B_x$ ,  $\Delta B_y$ ,  $\Delta B_z$ :

$$\Delta B_x = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \right\} P'_{km}(\theta), \quad (16a)$$

$$\Delta B_y = -\frac{2\pi}{\lambda_2-\lambda_1} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} m \left\{ -C_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) + S_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \right\} \times \\ \times \frac{P_{km}(\theta)}{\sin(\theta)}, \quad (16б)$$

$$\Delta B_z = -\sum_{k=1}^{k_{\max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} (n_k+1) \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \right\} \times \\ \times P_{km}(\theta). \quad (16в)$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів моделі можна використати спосіб найменших квадратів, стабілізувавши розв'язок уведенням параметра регуляризації Тихонова  $\alpha$ :

$$V^T V + \alpha \tilde{X}^T \tilde{X} \rightarrow \min. \quad (17)$$

**Висновки.** 1. Наведено різні методи для моделювання регіонального магнітного поля Землі.

2. Запропоновано метод для обчислення регіональної моделі геомагнітного поля Землі, який має переваги порівняно з уже існуючими методами.

3. Отримано робочі формули для побудови згаданої вище моделі.

Наступний крок нашого дослідження — побудова і оцінювання точності регіональної моделі геомагнітного поля на території Центральної Європи з використанням запропонованого алгоритму.

### Список літератури

Орлюк М.И. Пространственные и пространственно-временные магнитные модели разноранговых структур литосферы континентального типа. *Геофиз. журн.* 2000. Т. 22. №6. С. 148—165.

Орлюк М.И., Марченко А.В., Роменец А.А. Пространственно-временные изменения геомагнитного поля и сейсмичность. *Геофиз. журн.* 2017. Т. 39. №6. С. 84—105. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v39i6.2017.116371>.

Смирнов В. Курс высшей математики. Том III. Ч. 2. Москва: Наука, 1953. 676 с.

Beggan, C.D., Saarimäki, J., Whaler, K.A. & Simons, F.J. (2013). Spectral and spatial decompo-



- sition of lithospheric magnetic field models using spherical Slepian functions. *Geophysical Journal International*, 193(1), 136—148. <https://doi.org/10.1093/gji/ggs122>.
- De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field.. *Geophysical Research Letters*, 19(10), 1065—1067. <https://doi.org/10.1029/92GL01068>.
- De Santis, A. (1991). Translated origin spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 106(1), 253—263. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb04615.x>.
- De Santis, A. & Torta, J. (1997). Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. *Journal of Geodesy*, 71(9), 526—532. <https://doi.org/10.1007/s001900050120>.
- Düzgüt, Z., & Malin, S. R. C. (2000). Assessment of regional geomagnetic field modeling methods using a standard data set: spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 141(3), 829—831. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00099.x>.
- Dzhuman, B. B. (2014). Approximation of gravity anomalies by method of ASHA on Arctic area. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (80), 62—68.
- Dzhuman, B. B. (2017). Modeling of the Earth's gravitational field using spherical function. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (86), 5—10. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.02.005>.
- Gao, Y., & Liu, Z. (2002). Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data. *Journal of Global Positioning Systems*, 1(1), 18—24.
- Haines, G. (1988). Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields. *Computers & Geosciences*, 14(4), 413—447. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(88\)90027-1](https://doi.org/10.1016/0098-3004(88)90027-1).
- Haines, G. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B3), 2583—2591. <https://doi.org/10.1029/JB090iB03p02583>.
- Hwang, C. & Chen, S. (1997). Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophysical Journal International*, 129(2), 450—460. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb01595.x.
- Kelvin, L. & Tait, P. (1896). *Treatise on natural philosophy*. New York: Cambridge Univer. Press., 852 p.
- Kotzé, P. B. (2001). Spherical Cap Modelling of R̈rsted Magnetic Field Vectors over Southern Africa. *Earth, Planets and Space*, 53(5), 357—361. <https://doi.org/10.1186/BF03352392>.
- Liu, J., Chen, R., An, J., Wang, Z. & Hyypä, J. (2014). Spherical cap harmonic analysis of the Arctic ionospheric TEC for one solar cycle. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 119(1), 601—619. <https://doi.org/10.1002/2013JA019501>.
- Macdonald, H., (1900). Zeroes of the spherical harmonic  $P_n^m(\mu)$  considered as a function of n. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 31(1), 264—278. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-31.1.264>.
- Stening, R. J., Reztsova, T., Ivers, D., Turner, J., & Winch, D. E. (2008). Spherical cap harmonic analysis of magnetic variations data from mainland Australia. *Earth, Planets and Space*, 60(12), 1177—1186. <https://doi.org/10.1186/BF03352875>.

Thébault, E., & Gaya-Piqué, L. (2008). Applied comparisons between SCHA and R-SCHA regional modeling techniques. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9 (7), Q07005, doi: 10.1029/2008GC001953.

Thébault, E., Mandeau, M. & Schott, J. (2006). Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111 (B5), 111—113. <https://doi.org/10.1029/2005JB004110>.

Thébault, E., Purucker, M., Whaler, K. A., Langlais, B., & Sabaka, T. J. (2010). The Magnetic Field of the Earth's Lithosphere. *Space Science Reviews*, 155 (1-4), 95—127. <https://doi.org/10.1007/s11214-010-9667-6>.

Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2017). Constructing of regional model of ionosphere parameters. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 85, 27—35. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.01.027>.

Younis, A., Jäger, R., & Becker, M. (2013). Transformation of global spherical harmonic models of the gravity field to a local adjusted spherical cap harmonic model. *Arabian Journal of Geosciences*, 6 (2), 375—381. <https://doi.org/10.1007/s12517-011-0352-1>.

## Modeling of regional magnetic field applying spherical functions: theoretical aspect

*Yu. P. Sumaruk, L. M. Yankiv-Vitkovska, B. B. Dzuman, 2019*

Observation of geomagnetic field, measurement of its components values and establishment on their base models of geomagnetic field as well as geomagnetic mapping are the main trend of geomagnetic studies. Analytical model of geomagnetic field allows calculating the value of any component of geomagnetic field at any point of near-earth space and on the Earth. A new method has been proposed for construction of geomagnetic potential regional model. In accordance with Gauss' fundamental studies, classical concept of geomagnetic potential became its record as endless series of Legendre functions. A program of writing the series of geomagnetic potentials according to their spherical or ellipsoidal functions is used for most cases for modeling of global (normal) geomagnetic field with the length of a series equal to 9—13 harmonics. However in case when the sphere is not complete and only its part (a segment of the sphere or its trapezium) is taken into account the spherical Legendre functions lose their orthogonality. In this connection for elaboration of regional field models different modifications of spherical harmonic analysis with application of spherical Legendre functions even grade and real order are used. Such functions form an orthogonal by weight system of functions on arbitrary spherical trapezium but do not have recurrent correlation therefore we are to use for their calculation an arrangement as hypergeometric series. The area of determination of such functions is spherical segment. Working formulae have been obtained for constructing the model mentioned above. As front-end data for constructing a model of regional magnetic field the values of its components obtained at geomagnetic observatories have been used. It has also been suggested to make calculations of regional model of geomagnetic potential by a method proposed within the limits of a procedure deletion-computing-restoration. Initially a systematic product of components is found using a global model of geomagnetic field. Then abnormal values of components are calculated. A model of regional abnormal geomagnetic field is computed using basic functions. A parameter of Tikhonov's regularizing is introduced to stabilize the solution.

**Key words:** regional magnetic field, spherical functions, modeling.

References

- Orlyuk, M.I. (2000). Spatial and spatial-temporal magnetic models of different-rank structures of the lithosphere of continental type. *Geofizicheskiy zhurnal*, 22(6), 148—165 (in Russian).
- Orlyuk, M.I., Marchenko, A.V., & Romenets, A.A. (2017). Spatial-temporal changes in the geomagnetic field and seismicity. *Geofizicheskiy zhurnal*, 39(6), 84—105. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v39i6.2017.116371> (in Russian).
- Smirnov, V. (1953). Course of higher mathematics. Vol. III. Pt. 2. Moscow: Nauka, 676 p. (in Russian).
- Beggan, C.D., Saarimäki, J., Whaler, K.A. & Simons, F.J. (2013). Spectral and spatial decomposition of lithospheric magnetic field models using spherical Slepian functions. *Geophysical Journal International*, 193(1), 136—148. <https://doi.org/10.1093/gji/ggs122>.
- De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field.. *Geophysical Research Letters*, 19(10), 1065—1067. <https://doi.org/10.1029/92GL01068>.
- De Santis, A. (1991). Translated origin spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 106(1), 253—263. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb04615.x>.
- De Santis, A. & Torta, J. (1997). Spherical cap harmonic analysis: a comment on its proper use for local gravity field representation. *Journal of Geodesy*, 71(9), 526—532. <https://doi.org/10.1007/s001900050120>.
- Düzgüt, Z., & Malin, S. R.C. (2000). Assessment of regional geomagnetic field modeling methods using a standard data set: spherical cap harmonic analysis. *Geophysical Journal International*, 141(3), 829—831. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00099.x>.
- Dzhuman, B.B. (2014). Approximation of gravity anomalies by method of ASHA on Arctic area. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (80), 62—68.
- Dzhuman, B.B. (2017). Modeling of the Earth's gravitational field using spherical function. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (86), 5—10. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.02.005>.
- Gao, Y., & Liu, Z. (2002). Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data. *Journal of Global Positioning Systems*, 1(1), 18—24.
- Haines, G. (1988). Computer programs for spherical cap harmonic analysis of potential and general fields. *Computers & Geosciences*, 14(4), 413—447. [https://doi.org/10.1016/0098-3004\(88\)90027-1](https://doi.org/10.1016/0098-3004(88)90027-1).
- Haines, G. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B3), 2583—2591. <https://doi.org/10.1029/JB090iB03p02583>.
- Hwang, C. & Chen, S. (1997). Fully normalized spherical cap harmonics: application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophysical Journal International*, 129(2), 450—460. doi: 10.1111/j.1365-246X.1997.tb01595.x.
- Kelvin, L. & Tait, P. (1896). *Treatise on natural philosophy*. New York: Cambridge Univer. Press., 852 p.

- Kotzé, P.B. (2001). Spherical Cap Modelling of Ŕrsted Magnetic Field Vectors over Southern Africa. *Earth, Planets and Space*, 53(5), 357—361. <https://doi.org/10.1186/BF03352392>.
- Liu, J., Chen, R., An, J., Wang, Z. & Hyypä, J. (2014). Spherical cap harmonic analysis of the Arctic ionospheric TEC for one solar cycle. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 119(1), 601—619. <https://doi.org/10.1002/2013JA019501>.
- Macdonald, H., (1900). Zeroes of the spherical harmonic  $P_n^m(\mu)$  considered as a function of  $n$ . *Proceedings of the London Mathematical Society*, 31(1), 264—278. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-31.1.264>.
- Stening, R.J., Reztsova, T., Ivers, D., Turner, J., & Winch, D.E. (2008). Spherical cap harmonic analysis of magnetic variations data from mainland Australia. *Earth, Planets and Space*, 60(12), 1177—1186. <https://doi.org/10.1186/BF03352875>.
- Thébault, E., & Gaya-Piqué, L. (2008). Applied comparisons between SCHA and R-SCHA regional modeling techniques. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9(7), Q07005, doi: 10.1029/2008GC001953.
- Thébault, E., Mandea, M. & Schott, J. (2006). Modeling the lithospheric magnetic field over France by means of revised spherical cap harmonic analysis (R-SCHA). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 111(B5), 111—113. <https://doi.org/10.1029/2005JB004110>.
- Thébault, E., Purucker, M., Whaler, K. A., Langlais, B., & Sabaka, T.J. (2010). The Magnetic Field of the Earth's Lithosphere. *Space Science Reviews*, 155(1-4), 95—127. <https://doi.org/10.1007/s11214-010-9667-6>.
- Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2017). Constructing of regional model of ionosphere parameters. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 85, 27—35. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2017.01.027>.
- Younis, A., Jäger, R., & Becker, M. (2013). Transformation of global spherical harmonic models of the gravity field to a local adjusted spherical cap harmonic model. *Arabian Journal of Geosciences*, 6(2), 375—381. <https://doi.org/10.1007/s12517-011-0352-1>.