

## Трёхмерное моделирование временного поля лучевым и конечно-разностным методами для решения задач сейсмологии

*В. Н. Пилипенко, А. О. Верпаховская, 2019*

Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 9 сентября 2019 г.

Тривимірне моделювання часового поля дає змогу відтворити кінематику хвильових процесів, які спостерігаються в Землі при сейсмічних дослідженнях, і, таким чином, визначити просторове розміщення в ній цільових об'єктів. Також моделювання є важливим інструментом для перевірки коректності методів розв'язання обернених задач у процесі інтерпретації як сейсмологічних, так і сейсморозвідувальних даних. У сейсмології особливе значення мають сейсмічні промені, які визначають напрямок потоку енергії високочастотної частини сейсмічного хвильового поля. Простеження променів і їх розрахунок дають змогу розв'язувати широке коло завдань сейсмології, а також перевіряти точність отриманих результатів при застосуванні різних методів обробки та інтерпретації спостережених на земній поверхні даних. Варіант скінченнорізницевого моделювання часового поля у тривимірній сферичній Землі ґрунтується на безпосередній сітковій апроксимації рівняння ейконалу, і саме цей підхід до визначення значень часу приходу сейсмічних хвиль у кожному точку земних глибин є найстійкішим, а отже, може гарантувати коректність розв'язання багатьох прикладних завдань сейсмології. Водночас продовження часового поля є частиною обчислювального процесу скінченнорізницевої міграції, яка розроблена в Інституті геофизики ім. С.І. Субботіна НАН України і яку використовують при обробці даних сейсморозвідки. Протягом останніх десятиліть з розвитком комп'ютерних технологій пов'язана поява теорій, алгоритмів і програмних комплексів, які дали змогу реалізувати розв'язання тривимірних геофізичних, зокрема сейсмологічних, задач. У статті наведено теоретичні основи, алгоритми та результати застосування розроблених варіантів тривимірного моделювання часових полів як променевим, так і скінченнорізницевим методом на практичних прикладах.

**Ключові слова:** сейсмологія, тривимірне моделювання, часове поле, скінченнорізничеве продовження, рівняння ейконала.

**Введение.** Моделирование временного поля является важным этапом при проведении как сейсмологических, так и поисково-разведочных сейсмических исследований, поскольку позволяет определить характер поведения кинематики волн в соответствии с внутренним строением среды. Для сейсмологии особенно актуальным является трёхмерное лучевое моделирование в сферической неоднородной Земле, которое позволяет решать прямую задачу сейсмологии, а именно по известному распределению скорости в среде рассчитать лучевые траектории, а также время и координаты выхода луча на земную поверхность.

На больших глубинах внутри Земли от подошвы коры до самого ядра резких изменений скорости как правило не наблюдается. Наиболее четкими глубинными границами раздела являются граница Мохоровичича, которая отделяет земную кору

от мантии, и граница, определяющая поверхность земного ядра. Значения скорости распространения сейсмических волн на этих границах имеют разрыв, который свидетельствует об изменении химического состава или же о существенном изменении состояния вещества Земли. Подобные разрывы скорости не позволяют применять методы, рассчитанные на непрерывную скоростную функцию с линейным ростом скорости по глубине, так как требуют учета неоднородности Земли.

Ранее были сделаны попытки лучевого моделирования в сферической неоднородной Земле [Аки, Ричардс, 1983; Comer, 1984], но при этом скоростная неоднородность рассматривалась в вертикальном направлении. В случае предлагаемого метода трехмерного моделирования лучей учитывается существенная неоднородность среды по скоростным характеристикам как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях.

Трехмерное моделирование конечно-разностным методом основано на продолжении временного поля в земных глубинах и позволяет восстанавливать кинематику сейсмических волн. При этом расчетные разностные сетки выбираются таким образом, чтобы максимально приблизиться к реальному распространению сейсмических волн. Толчок развитию конечно-разностного продолжения временного поля точечного источника в трехмерном пространстве за рубежом дала работа Видале [Vidale, 1990], результаты которой были применены для решения задач сейсмологии [Nelson, Vidale, 1990]. В этом случае для аппроксимации уравнения эйконала бралась трехмерная прямоугольная сетка, а разностный счет велся с одновременным использованием трех типов разностных шаблонов. Выбор шаблона зависит от взаимного расположения его образующих линий и направления распространения рассчитываемой волны. При этом обеспечивается лишь линейное приближение дифференциального уравнения эйконала соответствующим разностным, что не гарантирует уменьшение погрешности в счете пропорционально уменьшению шага сетки. Необходимо признать, что одновременное использование разных шаблонов является совершенно неприемлемым, поскольку не позволяет достичь непрерывного плавного восстановления временного поля ввиду различной степени приближения разностной схемы в области, где происходит стык двух разных шаблонов.

В Институте геофизики им. С. И. Субботина длительное время разрабатывается метод кинематической миграции как поля отраженных, так и поля преломленных волн, основанный на конечно-разностном продолжении временного поля для решения разных прикладных задач профильной и площадной сейсморазведки [Пилипенко и др., 2009; Верпаховская, 2011, 2014; Верпаховская, Пилипенко, 2018]. Кроме того, продолжение временного поля является неотъемлемой частью алгоритмов динамической конечно-разностной миграции, варианты которой также постоянно разрабатываются и совершенствуются авторами с целью повышения точности восстановления глубинного строения районов исследования по данным двумерной [Pavlenkova et al., 2009; Pylypenko et al., 2011; Verpakhovska et al., 2015; Верпаховская и др., 2017; Verpakhovska et al., 2018] и трехмерной сейсморазведок [Верпаховская и др., 2015; Пилипенко и др., 2015]. Выбор конечно-разностного метода решения уравнения эйконала обусловлен как возможностью использования широкого класса неоднородных моделей среды, так и высокой устойчивостью решения по сравнению с лучевым подходом при расчете временного поля. Кроме того, определение временного поля в равномерно распределенных узлах сеток при конечно-разностном методе существенно облегчает необходимую для практических приложений интерполяцию временной функции в произвольных точках среды.

В статье представлены теоретические основы и алгоритмы расчета временного

поля в трехмерной неоднородной среде при использовании лучевого метода и конечно-разностной аппроксимации уравнения эйконала, а также рассмотрены примеры эффективного применения при решении задач сейсмологии.

**Теоретические основы трехмерного моделирования временных полей лучевым методом для существенно неоднородной среды.** Трехмерное моделирование временных полей лучевым методом в сферической неоднородной среде позволяет решать прямую задачу сейсмологии — по известному распределению скорости в Земле рассчитывать лучевые траектории, а также время и координаты выхода луча на ее поверхность. Данные параметры являются необходимыми при изучении землетрясений и внутреннего строения Земли по сейсмологическим данным.

Обозначим дугу длины луча как  $s$ . Время пробега вдоль луча определяется формулой

$$T = \int_0^{\theta} \frac{ds}{V(r)}, \quad (1)$$

где  $\theta$  — эпицентральное расстояние, отсчитываемое от очага землетрясения;  $V(r)$  — функция изменения скорости с глубиной, которая должна быть предварительно известна.

Лучевое моделирование в сферической трехмерной неоднородной Земле основано на решении системы уравнений лучей в сферических координатах. Обозначим сферические координаты через  $r, \theta, \varphi$ , где  $r$  — радиальное расстояние,  $\theta$  — полярный угол,  $\varphi$  — долгота. Направление единичных ортогональных векторов в сферической системе координат показано на рис. 1.

Длина бесконечно малого элемента в сферических координатах задается соотношением

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

В сферических координатах система лучевых уравнений может быть записана в разных формах. Наиболее приемлемым вариантом в случае моделирования в неоднородной сферической среде является система уравнений луча, где в качестве независимой переменной вдоль луча используется время пробега  $T$  [Сейсмическая ..., 1990]:

$$\frac{dr}{dT} = \frac{1}{n} \cos i, \quad \frac{d\theta}{dT} = \frac{1}{rn} \sin i \cos \xi, \quad \frac{d\varphi}{dT} = \frac{1}{rn \sin \theta} \sin i \sin \xi,$$

$$\frac{di}{dT} = -\sin i \left( \frac{1}{nr} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{\cos i}{r} \left( \cos \xi \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\sin \xi}{\sin \theta} \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right),$$

$$\frac{d\xi}{dT} = -\frac{\sin \xi}{r \sin i} \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\cos \xi}{\sin i} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{nr} \sin i \sin \xi \operatorname{ctg} \theta,$$

$$90^\circ \leq i < 180^\circ \text{ и } 180^\circ < i \leq 270^\circ, \quad 0^\circ < \xi \leq 360^\circ, \quad (2)$$

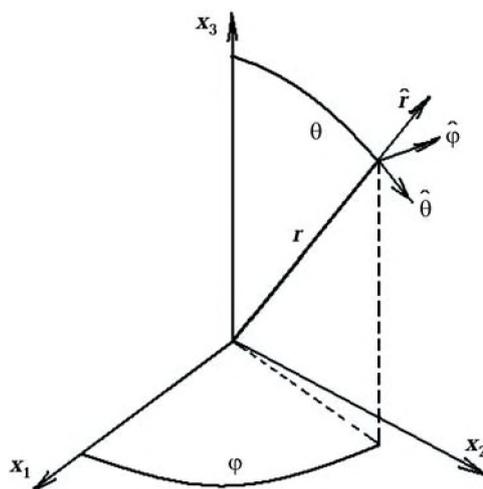


Рис. 1. Сферическая система координат.

где  $1/n = V$  — скорость,  $i$  — угол между лучом и вектором  $\mathbf{r}$ ,  $\xi$  — угол между вектором  $\theta$  и проекцией луча на плоскость  $\theta\phi$ . Необходимо помнить, что  $\partial V/\partial r$  всегда отрицательное, поскольку скорость растет с глубиной.

Для решения системы уравнений (2) задаются начальные условия, определяющие точку на луче  $\theta_0, \phi_0, r_0$ , направление луча в этой точке  $i_0, \xi_0$  и начальное время пробега

$$T=0, \quad r_0 = R - r_z, \quad (3)$$

где  $R$  — радиус Земли, а  $r_z$  — глубина очага землетрясения. Кроме того, известной является функция распределения скорости  $V(r, \theta, \phi)$ .

Численный расчет луча выполняется решением задачи Коши для системы уравнений (2) при начальных условиях (3) методом Рунге—Кутта [Годунов, Рябенский, 1977].

На каждом  $j$ -м шаге  $\Delta T$  выполняются четыре расчетные операции, которые позволяют определить коэффициенты  $k_r, k_\theta, k_\phi, k_i, k_\xi$  согласно системе уравнений (2):

- 1) рассчитываются коэффициенты  $k_{r1}, k_{\theta1}, k_{\phi1}, k_{i1}, k_{\xi1}$  для значений  $r_j, \theta_j, \phi_j, i_j, \xi_j$ ;
- 2) рассчитываются коэффициенты  $k_{r2}, k_{\theta2}, k_{\phi2}, k_{i2}, k_{\xi2}$  для значений  $r_j + \frac{\Delta T}{2} k_{r1}, \theta_j + \frac{\Delta T}{2} k_{\theta1}, \phi_j + \frac{\Delta T}{2} k_{\phi1}, i_j + \frac{\Delta T}{2} k_{i1}, \xi_j + \frac{\Delta T}{2} k_{\xi1}$ ;
- 3) рассчитываются коэффициенты  $k_{r3}, k_{\theta3}, k_{\phi3}, k_{i3}, k_{\xi3}$  для значений  $r_j + \frac{\Delta T}{2} k_{r2}, \theta_j + \frac{\Delta T}{2} k_{\theta2}, \phi_j + \frac{\Delta T}{2} k_{\phi2}, i_j + \frac{\Delta T}{2} k_{i2}, \xi_j + \frac{\Delta T}{2} k_{\xi2}$ ;
- 4) рассчитываются коэффициенты  $k_{r4}, k_{\theta4}, k_{\phi4}, k_{i4}, k_{\xi4}$  для значений  $r_j + \Delta T k_{r3}, \theta_j + \Delta T k_{\theta3}, \phi_j + \Delta T k_{\phi3}, i_j + \Delta T k_{i3}, \xi_j + \Delta T k_{\xi3}$ .

Параметры для расчетов следующего шага  $j+1$  определяются по формулам

$$r_{j+1} = r_j + \frac{\Delta T}{6} (k_{r1} + 2k_{r2} + 2k_{r3} + k_{r4}), \quad \theta_{j+1} = \theta_j + \frac{\Delta T}{6} (k_{\theta1} + 2k_{\theta2} + 2k_{\theta3} + k_{\theta4}),$$

$$\phi_{j+1} = \phi_j + \frac{\Delta T}{6} (k_{\phi1} + 2k_{\phi2} + 2k_{\phi3} + k_{\phi4}), \quad i_{j+1} = i_j + \frac{\Delta T}{6} (k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}),$$

$$\xi_{j+1} = \xi_j + \frac{\Delta T}{6} (k_{\xi1} + 2k_{\xi2} + 2k_{\xi3} + k_{\xi4}).$$

Вычисление ведется до момента выхода луча на земную поверхность, а именно до того момента, когда выполняется условие  $r_{j+1} > R$ , после чего определяются точное время и координаты выхода луча на поверхность:

$$T_R = j\Delta T + \frac{R - r_j}{r_{j+1} - r_j} \Delta T, \quad \theta_R = \theta_j + \frac{R - r_j}{r_{j+1} - r_j} (\theta_{j+1} - \theta_j),$$

$$\phi_R = \phi_j + \frac{R - r_j}{r_{j+1} - r_j} (\phi_{j+1} - \phi_j).$$

Полученные данные позволяют проконтролировать реально наблюдаемые годографы для изучаемых районов и, по возможности, оценить их корректность.

**Алгоритм трехмерного моделирования временных полей лучевым методом для существенно неоднородной среды.** С учетом теоретических основ был составлен алгоритм моделирования временного поля в неоднородной сферической Земле лучевым методом, который состоит из следующих этапов: подготовка исходных данных, формирование трехмерной скоростной модели среды, трехмерное моделирование луча в сферической неоднородной Земле и формирование полученных результатов.

Подготовка исходных данных проводится путем формирования параметрического файла. Для моделирования лучей в трехмерной неоднородной сферической Земле необходимо задать начальные условия: сферические координаты точки, из которой выходит луч  $(\theta_0, \varphi_0, r_0)$ , направление луча в этой точке  $(i_0, \xi_0)$  и начальное время пробега  $T_0 = 0$ .

Начальные координаты ( $\theta_0$  — полярный угол,  $\varphi_0$  — долгота) и направление движения луча  $(i_0, \xi_0)$  задаются в радианах,  $r_0$  задается относительно земной поверхности (если источник находится на поверхности Земли, то  $r_0 = R = 6370$  км, т. е. радиусу Земли).

По имеющимся априорным данным о распределении скоростей в среде рассчитывается трехмерная скоростная модель и создается таблица скоростей. Априорные данные о скорости в среде представляют собой значения скорости, заданные в произвольных точках пространства. По этим значениям рассчитывается с заданным шагом по глубине и сферическим координатам куб скоростей. Скоростная модель может быть рассчитана как с постоянным, так и с переменным по глубинным уровням градиентом (такой расчет предполагает, что градиент изменяется на глубинных уровнях, заданных априорно). Такая возможность предусмотрена в разработанном алгоритме.

Задача моделирования луча в сферической неоднородной Земле решается, как показано выше, с помощью решения системы лучевых уравнений в сферических координатах (2) при начальных условиях (3) методом Рунге—Кутты. При этом на каждом временном уровне, определяемом заданным шагом по времени, выполняются четыре расчетные операции по расчету коэффициентов для каждого пространственного параметра  $k_r, k_\theta, k_\varphi, k_i, k_\xi$ , после чего определяются параметры следующего временного уровня. Данный расчет продолжается до момента выхода луча на земную поверхность. При выполнении условия  $r_{j+1} > R$  определяются точное время и координаты выхода луча на поверхность. Результаты вычислений дают возможность проконтролировать реально наблюдаемые годографы для изучаемых районов.

Параметры рассчитанной траектории луча (глубина, время, координаты) заносятся в таблицу.

По приведенному алгоритму были написаны программы, которые реализуют процесс моделирования лучей в сферической неоднородной Земле. Каждому шагу алгоритма соответствует одна программа, а в случае расчета трехмерной скоростной модели с изменением градиента скорости количество программ соответствует количеству способов задания градиента.

Составленные программы были опробованы на модельных примерах по расчету траекторий лучей при задании различных исходных данных, включая изменения скоростных характеристик среды.

Для проверки работы программ по расчету траектории луча была взята скоростная модель, которая очень близка к модели, рассчитанной Гутенбергом и приведенной в работе [Саваренский, Кирнос, 1955]. Априорная информация была задана в виде таблицы (табл. 1):

**Т а б л и ц а 1. Априорная информация о распределении скорости в среде**

<i>H</i> , км	$\varphi$ , рад	$\theta$ , рад	<i>v</i> , км/с
0	0,4	0,6	7,0
40	0,4	0,6	8,0
300	0,4	0,6	9,0
500	0,4	0,6	9,5
600	0,4	0,6	10,0
750	0,4	0,6	11,0
1000	0,4	0,6	11,5
1200	0,4	0,6	12,0
1500	0,4	0,6	12,3
2000	0,4	0,6	12,8
2500	0,4	0,6	13,4

По этим данным с шагом в 100 м была сформирована трехмерная скоростная модель среды и был рассчитан луч для  $i = 1,58$  и  $\xi = 0,1$ . Результат расчета занесен в табл. 2.

В таблице приведены в столбцах: время с шагом 0,2 с, глубина, начиная с поверхности, и расчетные пространственные координаты. В конце таблицы записываются данные выхода луча на поверхность ( $trz$  — время,  $qrz$  и  $frz$  — сферические координаты) и максимального проникания луча ( $rd$  — глубина,  $td$  — время,  $fd$ ,  $qd$  — сферические координаты,  $id$  и  $ksid$  — направление луча). Полученный результат свидетельствует о возможностях разработанных программ моделирования лучей в трехмерной сферической Земли и перспективах их использования при решении разных задач сейсмологии.

**Теоретические основы трехмерного моделирования временного поля на основе конечно-разностного решения уравнения эйконала для существенно неоднородной среды.** Проблема моделирования временного поля в неоднородной среде путем численного расчета распределения времени прихода прямой волны при использовании априорной информации о скоростных характеристиках среды является основой для создания эффективных подходов к реализации обратных сейсмических задач для интерпретации наблюдаемых данных. Особенно актуальным следует считать трехмерный расчет временного поля в силу его большей общности, сложности в постановке и многообразия, вызванного требованиями конкретными практическими приложениями.

Временное поле будем рассматривать как функцию времени  $t(\xi)$  прихода фронта волны в произвольную точку среды с пространственными координатами, определяемые вектором  $\xi$ .

В декартовой трехмерной системе координат для изотропной среды функция  $t(x, y, z)$  подчиняется уравнению эйконала:

$$\left(\frac{\partial t(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t(x, y, z)}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{V^2(x, y, z)}, \quad (4)$$

где  $V(x, y, z)$  — сейсмическая скорость в среде.

Уравнение (4) следует из скалярного волнового уравнения при условии, что сейсмический сигнал обладает бесконечной частотой [Смирнов, 1953].

Учитывая необходимость решения интерпретационных задач с произвольным характером распределения скорости  $V(x, y, z)$  в среде, наиболее приемлемым для расчета временного поля следует считать конечно-разностную аппроксимацию уравнения (4) на пространственной сетке.

В зависимости от практических приложений восстановления временного поля сложилось три подхода к его реализации. Каждый из этих подходов отличается как начальными условиями, так и видами расчетных дифференциальных уравнений, которые, в общем, являются производными от уравнения (4).

Т а б л и ц а 2. Пример результата моделирования луча

0.000000	6370.000000	0.400000	0.600000	1.580000	0.100000
0.200000	66369.987305	0.400217	0.600056	1.579739	0.099949
0.400000	66369.975098	0.400434	0.600112	1.579478	0.099897
0.600000	66369.963379	0.400651	0.600168	1.579218	0.099846
0.800000	66369.951660	0.400868	0.600223	1.578957	0.099794
1.000000	66369.940430	0.401086	0.600279	1.578696	0.099743
1.200000	66369.929688	0.401303	0.600335	1.578435	0.099692
1.400000	66369.919434	0.401520	0.600390	1.578174	0.099641
1.600000	66369.909180	0.401737	0.600446	1.577913	0.099590
1.800000	66369.899414	0.401954	0.600501	1.577657	0.099539
2.000000	66369.890625	0.402171	0.600556	1.577401	0.099488
2.200000	66369.882812	0.402388	0.600612	1.577145	0.099437
2.400000	66369.875977	0.402605	0.600667	1.576889	0.099386
2.600000	66369.870117	0.402823	0.600722	1.576633	0.099335
2.800000	66369.864746	0.403040	0.600778	1.576377	0.099284
3.000000	66369.860352	0.403257	0.600833	1.576121	0.099234
3.200000	66369.856934	0.403474	0.600888	1.575865	0.099183
3.400000	66369.854492	0.403691	0.600943	1.575609	0.099132
3.600000	66369.853027	0.403908	0.600998	1.575353	0.099082
3.800000	66369.852539	0.404125	0.601053	1.575097	0.099031
4.000000	66369.853027	0.404343	0.601107	1.574841	0.098981
4.200000	66369.854492	0.404560	0.601162	1.574585	0.098931
4.400000	66369.856934	0.404777	0.601217	1.574329	0.098880
4.600000	66369.860352	0.404994	0.601272	1.574073	0.098830
4.800000	66369.864746	0.405211	0.601326	1.573817	0.098780
5.000000	66369.870117	0.405428	0.601381	1.573561	0.098730
5.200000	66369.876465	0.405646	0.601435	1.573305	0.098680
5.400000	66369.883789	0.405863	0.601490	1.573049	0.098629
5.600000	66369.892090	0.406080	0.601544	1.572793	0.098580
5.800000	66369.901367	0.406297	0.601599	1.572537	0.098530
6.000000	66369.911133	0.406514	0.601653	1.572281	0.098480
6.200000	66369.921387	0.406731	0.601707	1.572025	0.098430
6.400000	66369.932129	0.406949	0.601761	1.571769	0.098380
6.600000	66369.942871	0.407166	0.601815	1.571513	0.098330
6.800000	66369.954102	0.407383	0.601869	1.571257	0.098281
7.000000	66369.965820	0.407600	0.601923	1.571001	0.098231
7.200000	66369.978027	0.407817	0.601977	1.570745	0.098182
7.400000	666369.990234	0.408034	0.602031	1.570489	0.098132
trz = 7.553846    qrz = 0.408201    frz = 0.602073					
rd = 6369.852539    td = 3.800001    fd = 0.601053    qd = 0.404125    id = 1.570690    ksid = 0.099031					

В первом подходе процесс восстановления временного поля осуществляется путем расчета лучей, являющихся характеристиками уравнения (4). Дифференциальное уравнение в частных производных (4) в трехмерной декартовой системе координат трансформируется в систему простых дифференциальных уравнений [Červený et al., 1977]:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{p}{r}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{q}{r}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{rV^3} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dz} = -\frac{1}{rV^3} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dr}{dz} = -\frac{1}{rV^3} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (5)$$

где  $p \equiv \frac{\partial t}{\partial x}$ ,  $q \equiv \frac{\partial t}{\partial y}$ ,  $r \equiv \frac{\partial t}{\partial z}$ .

Для уравнения (5) могут быть сформулированы начальные данные в виде производных  $p_0, q_0$ , определенные в фиксированной точке с координатами  $x_0, y_0, z_0$ . Значение  $r_0$  вычисляется в точке  $x_0, y_0, z_0$  при известном распределении скорости посредством уравнения (4).

Таким образом, на основе начальных данных и дифференциальных уравнений (5), определяющих луч, может быть сформулирована задача Коши для определения временного поля в последовательности точек среды, совпадающей с траекторией данного луча.

Последовательно восстанавливая некую совокупность лучей, можно определить временное поле в произвольно неоднородной среде даже в случае его неоднозначности в пространстве. Использование численных методов решения системы дифференциальных уравнений позволяет достичь очень высокой точности восстановления лучей в неоднородной среде. Однако в целом задача определения временного поля таким путем решается весьма неустойчиво, что связано с независимым расчетом каждого луча. В дальнейшем объединить полученные на лучах разрозненные значения времени в единое временное поле представляется затруднительным, особенно для существенно неоднородной среды.

Во втором подходе задача восстановления временного поля в трехмерной среде является более устойчивой, поскольку решается с использованием исходных данных в виде временной функции на некоторой фиксированной линии  $L$  (профиле).

Предположим, что линия  $L$  однозначна относительно оси  $X$ , определяется уравнением  $y_L(x)$  и расположена на земной поверхности:  $z = 0$ .

В дальнейшем будем рассматривать поведение временного поля  $t$  на некоторой поверхности  $Q$ , определяющей непрерывную совокупность лучей, восстановленных с линии  $L$  в трехмерном пространстве. Для расчета поверхности  $y_Q(x, z)$ , а также временной функции на ней в двумерной системе координат  $x, z$  необходимо воспользоваться системой дифференциальных уравнений:

$$p \frac{\partial y}{\partial x} + r \frac{\partial y}{\partial z} = q, \quad p \frac{\partial q}{\partial x} + r \frac{\partial q}{\partial z} = -V^{-3} \frac{\partial V}{\partial y}, \quad p \frac{\partial p}{\partial x} + r \frac{\partial p}{\partial z} = -V^{-3} \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$p \frac{\partial t}{\partial x} + r \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{V^2}, \quad (6)$$

где  $y \equiv y_Q(x, z)$ ,  $p \equiv p_Q(x, z) = \frac{\partial t(x, y, z)}{\partial x}$ ,  $q \equiv q_Q(x, z) = \frac{\partial t(x, y, z)}{\partial y}$ ,  $r \equiv r_Q(x, z) = -\sqrt{V^{-2} - p^2 - q^2}$ .

Систему уравнений (6) необходимо дополнить начальными данными:

$$y_Q(x, 0) = y_L(x), \quad p_Q(x, 0) = p_L(x), \quad q_Q(x, 0) = q_L(x). \quad (7)$$

Значения  $p_L(x)$  и  $q_L(x)$  определяются по значениям наблюдаемого временного поля на земной поверхности.

Таким образом, задача Коши, определяемая уравнениями (6) и (7), обеспечивает восстановление в трехмерной среде как лучевой поверхности, так и распределения времени на ней по информации о наблюдаемом поле и его производных на некоторой линии земной поверхности.

Восстановление лучевой поверхности в трехмерном пространстве играет важную роль в задачах построения сейсмических границ по наблюдаемым кинематическим параметрам волнового поля. В процессе поиска пространственного расположения границы в неоднородной среде путем продолжения вниз волнового поля, известного на земной поверхности в ограниченном контуре, важно знать границы той части трехмерного пространства, в которой правомерно выполнять обратное продолжение временного поля. Устойчивое решение этой задачи и призвано решать данный подход к моделированию временного поля и его характеристик [Пилипенко и др., 2009].

Третий вариант конечно-разностного моделирования временного поля основан на непосредственной сеточной аппроксимации уравнения эйконала (4). Этот подход к восстановлению временного поля в неоднородной среде является наиболее устойчивым, а следовательно, может гарантировать корректность решения многих прикладных задач сейсмологии. Он удобен также тем, что расчет времени ведется на заранее определенных регулярных пространственных сетках. Следовательно, есть возможность применить в процессе расчета временного поля произвольное распределение скорости, а также получить значение времени в регулярных точках, что облегчает задачу получения временного поля с требуемым распределением его значений в пространстве.

Высокая устойчивость определения временного поля этим методом обеспечивается последовательным пересчетом временного поля на узлах сетки, что, естественно, гарантирует однозначность его восстановления. Иначе говоря, платой за устойчивый счет является однозначность расчетного временного поля. Однозначность как ограничение во многих прикладных задачах сейсмологии не является существенной. К примеру, в сейсмологии первостепенное значение играет первое интенсивное вступление сейсмической волны для всех типов волн. Аналогичное требование выдвигается и в сейсмических методах с искусственным возбуждением колебаний, когда необходимо провести расчет времени прихода прямой волны от источника в произвольную точку пространства для последующего формирования изображения среды обратным волновым продолжением.

Для корректной организации конечно-разностного продолжения временного поля большое значение имеет равномерное разбиение пространства, подчиненное процессу распространения во времени фронта волны.

При выборе разностной схемы необходимо, чтобы выполнялись определенные требования, а именно, необходимо достичь квадратичной степени аппроксимации уравнения эйконала и при выборе сеточного разбиения пространства для выполнения разностного счета добиться максимально возможного приближения линий сетки к предполагаемому поведению лучей и изохрон восстанавливаемого временного поля.

**Определение временного поля в ближней зоне источника.** Во многих прикладных задачах важное значение играет расчет временного поля для точечного источника в условиях неоднородной модели среды. Очевидно, в этом случае фронт вол-

ны близок к сферической форме. Однако препятствием к использованию пространственной сферической сетки является то, что не существует равномерного покрытия сферы произвольным числом правильных многоугольников.

Относительно равномерное разбиение сетки можно достичь, если распределить узлы сетки равномерно по сферическим осям координат, исключая область вырождения, примыкающую к линии полюсов. Чтобы добиться максимально равномерного разбиения сетки в вертикальной, близкой к пункту возбуждения колебаний области, линию полюсов необходимо расположить на поверхности. В связи с этим необходимо обратиться к следующей системе координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y = r \cos \theta, \quad \varphi = \arctg \frac{z}{x},$$

$$z = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \theta = \arctg \left( \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{y} \right), \quad \theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r_{\max}, \quad (8)$$

где  $\theta_c$  — значение  $\theta$ , ограничивающее разностную сетку вблизи полюсов.

Уравнение эйконала (4) в сферической системе (8) имеет вид

$$\left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial t}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{1}{V^2}. \quad (9)$$

В предположении, что пункт возбуждения расположен в центре системы координат, выполним разбиение полупространства с шагами  $\Delta r$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \theta$  по осям координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ . Сеточная область, образованная в результате такого разбиения, представлена на рис. 2.

Рассмотрим аппроксимацию уравнения (9) на десятиточечном двуслойном шаблоне (рис. 3), где сеточные координаты  $i, j, k$  соответствуют сферическим координатам  $r, \varphi, \theta$  вместо декартовых координат  $x, y, z$ . Для этого представим в виде ряда

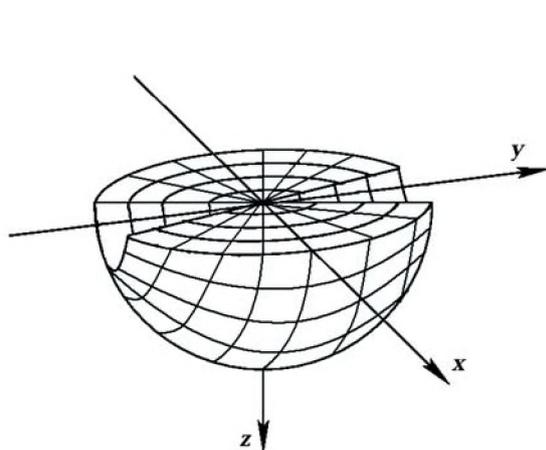


Рис. 2. Трехмерная сетка продолжения временного поля точечного источника.

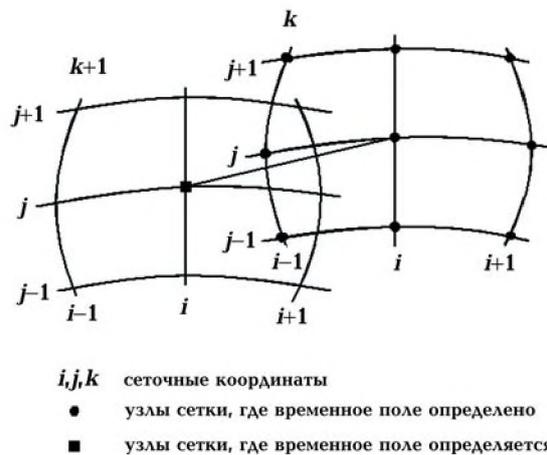


Рис. 3. Десятиточечный двуслойный шаблон трехмерной сетки продолжения временного поля.

значение времени в узле  $i, j, k + 1$ :

$$t_{i,j}^{k+1} = t_{i,j}^k + \Delta r \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + O(\Delta r^3). \quad (10)$$

Уравнение (10) представляет собой квадратичное представление значения времени в произвольном узле сетки.

Разностное выражение для  $\partial t / \partial r$  получим из уравнения (9):

$$L'_r = \left( \frac{1}{V_{i,j,k}^2} - \frac{L_{\phi}^{\prime 2}}{r_k^2 \sin^2 \theta_j} - \frac{L_{\theta}^{\prime 2}}{r_k^2} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

где  $L'_{\phi} = \frac{1}{2\Delta\phi} (t_{i+1,j}^k - t_{i-1,j}^k)$ ,  $L''_{\theta} = \frac{1}{2\Delta\theta} (t_{i,j+1}^k - t_{i,j-1}^k)$ ,  $r_k$  — радиус сферической поверхности уровня  $k$ ,  $\theta_j$  — значение координаты  $\theta$  для узла  $i, j, k$ .

Разностное выражение для оператора  $\partial^2 t / \partial r^2$  при использовании двуслойного шаблона непосредственно получить невозможно. Поэтому предварительно необходимо выполнить дифференцирование уравнения (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} &= \\ &= \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{r^3} \left( \frac{\partial t}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial t}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial r} \right], \\ \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \theta} &= \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^{-1} \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \theta \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial t}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi \partial \theta} - \frac{1}{V^3} \frac{\partial V}{\partial r} \right], \\ \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial \phi} &= \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^{-1} \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} - \frac{1}{V^3} \frac{\partial V}{\partial r} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Используя (12) и исключая величины порядка  $O(\Delta r^3)$ , получаем явную разностную схему для пересчета временного поля на сферической сетке с квадратичной точностью относительно сеточных шагов:

$$\begin{aligned} t_{i,j}^{k+1} &= t_{i,j}^k + \Delta r L'_r + \frac{\Delta r^2}{2} (L'_r)^{-1} \left\{ \frac{1}{r^3} \left[ L_{\theta}^{\prime 2} - \frac{1}{\sin^2 \theta_j} \left( \frac{1}{r_k \operatorname{tg} \theta_j} \frac{L'_{\theta}}{L'_r} - 1 \right) L_{\phi}^{\prime 2} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{r_k^4} (L'_r)^{-1} \left( L_{\theta}^{\prime 2} L_{\theta\theta}'' + \frac{2}{\sin^2 \theta_j} L'_{\theta} L'_{\phi} L_{\theta\phi}'' + \frac{1}{\sin^4 \theta_j L_{\phi}^{\prime 2} L_{\phi\phi}''} \right) + \frac{1}{V_{i,j,k}^3} \left[ \frac{1}{r_k^2 L'_r} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left[ L'_\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta_j} L'_\varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial r} \right] \Bigg\}, \quad (13)$$

$$\text{где } L''_{\theta\theta} = \frac{t_{i,j+1}^k - 2t_{i,j}^k + t_{i,j-1}^k}{\Delta\theta^2}, L''_{\varphi\varphi} = \frac{t_{i+1,j}^k - 2t_{i,j}^k + t_{i-1,j}^k}{\Delta\varphi^2}, L''_{\theta\varphi} = \frac{t_{i+1,j+1}^k - t_{i+1,j}^k - t_{i,j-1}^k + t_{i-1,j-1}^k}{4\Delta\theta \Delta\varphi}.$$

Располагая значениями скорости и ее производными в декартовой системе координат, нетрудно получить необходимые значения производных скорости в сферической системе сеточных координат  $i, j, k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \sin \theta_j \cos \varphi_i \frac{\partial V}{\partial x} + \cos \theta_j \frac{\partial V}{\partial y} + \sin \theta_j \sin \varphi_i \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= -r_k \sin \theta_j \sin \varphi_i \frac{\partial V}{\partial x} + r_k \sin \theta_j \cos \varphi_i \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= r_k \cos \theta_j \cos \varphi_i \frac{\partial V}{\partial x} - r_k \sin \theta_j \frac{\partial V}{\partial y} + r_k \cos \theta_j \sin \varphi_i \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, используя уравнение (13), представляется возможным последовательно рассчитывать время от точечного источника колебаний в направлении возрастания координаты  $r$ .

Определение временной функции по данной разностной схеме позволяет оценить влияние различных скоростных неоднородностей среды на сейсмическое временное поле. Рассчитанное время распространения фронта прямой волны точечного источника может быть непосредственно использовано в процедуре миграционного преобразования сейсмической информации как кинематическое условие для определения момента выборки изображения по волновому полю.

**Определение временного поля в дальней зоне источника.** Во многих приложениях сейсмологии область изучения среды, как и область наблюдений, находится на значительных расстояниях от источника возбуждения колебаний. Это происходит как в случае естественных землетрясений, так и в процессе использования искусственных источников возбуждения колебаний (глубинное сейсмическое зондирование, метод преломленных волн). Методы интерпретации наблюдаемых данных в этом случае существенно отличаются от методов, привычно используемых для обработки материалов, полученных в зоне, непосредственно примыкающей к источнику. Аналогично и подходы к моделированию временного поля в случае больших расстояний от источника колебаний имеют свою специфику. В первую очередь, при выборе способа расчета временного поля необходимо учитывать, что значительную часть расстояния от источника до пункта регистрации волна движется в направлении, близком к горизонтальному.

Остановимся на конечно-разностной реализации задачи восстановления временного поля в трехмерной неоднородной среде для точечного источника.

На значительных расстояниях от источника на характер распространения волны оказывает существенное влияние возрастание сейсмической скорости с глубиной, при которой фронт волны быстро теряет сферическую форму. При выборе сетки для конечно-разностной аппроксимации уравнения эйконала будем руководст-

воваться положениями лучей и изохрон в реальной среде. В связи с этим предлагается применить в качестве разностной сетки взаимно ортогональную последовательность изохрон и лучей, которые присущи временному полю точечного источника в среде с линейным изменением скорости с глубиной  $V = V_0 (1 + \beta z)$ , где  $V_0$  — скорость на земной поверхности при расчете сетки,  $V_0 \beta$  — градиент изменения скорости с глубиной. Величины  $V_0, \beta$  выбираются как некоторые фоновые средние значения для данной модели среды. Новая система координат, образованная в трехмерном пространстве лучами и изохронами для фонового распределения скорости, представлена следующими выражениями:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{\beta(x^2 + y^2 + z^2) + 2z}, \quad \tau = \operatorname{arch} \left( \frac{\beta^2(x^2 + y^2 + z^2)}{2(\beta z + 1)} + 1 \right), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (15)$$

где  $\tau = V_0 \beta T$ ,  $T$  — время изохронны фонового поля,  $\gamma$  — угловая координата,  $\varphi$  — азимутальная координата.

В системе координат (15) уравнение эйконала (4) записывается следующим образом:

$$\left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left( \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2 \right) = \frac{1}{V^2 \beta^2 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^2}. \quad (16)$$

Для аппроксимации дифференциального уравнения эйконала (16) разобьем в трехмерном пространстве ортогональную сетку по координатным осям  $\gamma, \varphi, \tau$ , задавшись соответственно сеточными координатами  $i, j, k$ . Время в произвольном сеточном узле будем обозначать  $t_{i,j}^k$ .

Рассматриваемая методика предполагает последовательное восстановление значений времени на уровне сетки  $k+1$  по его значениям на уровне  $k$ , начиная от точечного источника, где  $k=0$  и  $t_{i,j}^0 = 0$ .

При аппроксимации дифференциального уравнения (16) на созданной сетке будем стремиться к квадратичному приближению разностного уравнения к дифференциальному. В результате такая аппроксимация будет иметь следующий вид:

$$t_{i,j}^{k+1} = t_{i,j}^k + \Delta \tau \left[ \frac{\partial t}{\partial \tau} \right] + \frac{\Delta \tau^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right]. \quad (17)$$

Используя уравнение (16), будем искать разностные выражения, аппроксимирующие дифференциальные выражения правой части уравнения (17) на десятиточечном шаблоне (см. рис. 3) уровня  $k$  с квадратичной точностью.

Разностное представление  $[\partial t / \partial \tau]$  производной  $\partial t / \partial \tau$  следует непосредственно из уравнения (16):

$$\left[ \frac{\partial t}{\partial \tau} \right] = \left\{ \frac{1}{\beta^2 V^2 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \left( \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right| \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \right)^2 \right) \right\}^{1/2}, \quad (18)$$

где  $|\partial t / \partial \gamma|$  и  $|\partial t / \partial \varphi|$  являются разностными выражениями для соответствующих производных:

$$\left| \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right| = \frac{1}{2\Delta\gamma} (t_{i+1, j}^k - t_{i-1, j}^k), \quad \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| = \frac{1}{2\Delta\varphi} (t_{i, j+1}^k - t_{i, j-1}^k). \quad (19)$$

Для поиска разностного выражения второй производной  $\partial^2 t / \partial \tau^2$  в выражении (17) выполним дифференцирование исходного уравнения (16) по  $\tau$ :

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right| = \frac{1}{\left| \partial t / \partial \tau \right|} \left\{ \frac{-\partial V / \partial \tau}{\beta^2 V^3 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^2} - \frac{\operatorname{sh} \tau - \cos \gamma \operatorname{ch} \tau}{\beta^2 V^2 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \tau} \left[ \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right| \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \right)^2 \right] - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma \partial \tau} \right| + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \tau \partial \varphi} \right| \right) \right\}, \quad (20)$$

где  $V, \partial V / \partial \tau$  — скорость и ее производная в узле сетки  $i, j, k$ .

Производные  $\partial^2 t / \partial \gamma \partial \tau$  и  $\partial^2 t / \partial \tau \partial \varphi$  не могут быть аппроксимированы по явной двуслойной схеме. Для их преобразования необходимо выполнить дифференцирование уравнения (16) по  $\gamma$  и по  $\varphi$ :

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma \partial \tau} \right| = \frac{1}{\left| \partial t / \partial \tau \right|} \left\{ \frac{-\partial V / \partial \gamma}{\beta^2 V^3 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^2} - \frac{\operatorname{sh} \gamma \sin \gamma}{\beta^2 V^2 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^3} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \times \right. \\ \left. \times \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} \right| - \frac{\cos \gamma}{\sin^3 \gamma} \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma \partial \varphi} \right| \right) \right\}, \quad (21)$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi \partial \tau} \right| = \\ = \frac{1}{\left| \partial t / \partial \tau \right|} \left\{ \frac{-\partial V / \partial \varphi}{\beta^2 V^3 (\operatorname{ch} \tau - \cos \gamma \operatorname{sh} \tau)^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \gamma} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma \partial \varphi} \right| + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right| \right) \right\}, \quad (22)$$

где  $\partial V / \partial \gamma$  и  $\partial V / \partial \varphi$  — производные скорости по соответствующим осям координат в узле  $i, j, k$ ;

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} \right| = \frac{1}{\Delta\gamma^2} (t_{i+1, j}^k - 2t_{i, j}^k + t_{i-1, j}^k), \quad \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right| = \frac{1}{\Delta\varphi^2} (t_{i, j+1}^k - 2t_{i, j}^k + t_{i, j-1}^k), \\ \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma \partial \varphi} \right| = \frac{1}{4\Delta\gamma\Delta\varphi} (t_{i+1, j+1}^k + t_{i-1, j-1}^k - t_{i+1, j-1}^k - t_{i-1, j+1}^k). \quad (23)$$

Подставляя полученные представления дифференциальных операторов (19)—(23) в уравнение (18), получаем окончательное явное разностное уравнение, которое поз-

воляет пересчитывать последовательно время по координате  $\tau$  с уровня  $k$  на уровень  $k + 1$ . Уравнение (18) предусматривает расчет временного поля в широком диапазоне расстояний от пункта возбуждения, исключая область, непосредственно расположенную вблизи источника.

В случае плавного изменения скорости с глубиной возможно, что на значительном интервале сейсмическая волна будет распространяться в направлении, близком к горизонтальному. Тогда полезно воспользоваться для моделирования временного поля разностной сеткой, базирующейся на цилиндрической системе координат. Поскольку методика определения разностных схем для аппроксимации уравнения эйконала в трехмерном пространстве с квадратичной точностью сохраняется, приведем лишь окончательные выражения, определяющие пересчет времени на цилиндрической сетке.

Прямое преобразование координат для цилиндрической сетки имеет вид

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad \varphi = \arctg x/y, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Уравнение эйконала в цилиндрической системе координат определяется выражением

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{V^2},$$

где  $r$  — радиус или расстояние по горизонтали от точки возбуждения колебаний.

Конечно-разностная схема, соответствующая квадратичной точности аппроксимации уравнения эйконала, имеет вид

$$t_{i,j}^{k+1} = t_{i,j}^k + \Delta r \left| \frac{\partial t}{\partial r} \right| + \frac{\Delta r^2}{2} \left| \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \right|, \quad (24)$$

где  $k$  — сеточная координата по  $r$ ,  $i$  — по  $\varphi$ ,  $j$  — по  $z$ .

Необходимо выполнить следующие последовательные подстановки разностных выражений в уравнении (24):

$$\left| \frac{\partial t}{\partial r} \right| = \left[ \frac{1}{V^2} - \left( \left| \frac{\partial t}{\partial z} \right| \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\left| \frac{\partial t}{\partial z} \right| = \frac{1}{2\Delta z} (t_{i,j+1}^k - t_{i,j-1}^k), \quad \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| = \frac{1}{2\Delta \varphi} (t_{i+1,j}^k - t_{i-1,j}^k),$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \right| = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial (V^{-2})}{\partial r} - \left| \frac{\partial t}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial r} \right| - \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi \partial r} \right| + \frac{1}{r^3} \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right|^2 \right\}}{\left| \partial t / \partial r \right|},$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial r} \right| = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial (V^{-2})}{\partial z} - \left| \frac{\partial t}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right| - \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi \partial z} \right| \right\}}{\left| \partial t / \partial r \right|},$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial \phi \partial r} \right| = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial (V^{-2})}{\partial \phi} - \left| \frac{\partial t}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial \phi} \right| - \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial t}{\partial \phi} \right| \left| \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} \right| \right\}}{\left| \partial t / \partial r \right|},$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right| = \frac{1}{\Delta z^2} (t_{i, j+1}^k - 2t_{i, j}^k + t_{i, j-1}^k),$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} \right| = \frac{1}{\Delta \phi^2} (t_{i+1, j}^k - 2t_{i, j}^k + t_{i-1, j}^k),$$

$$\left| \frac{\partial^2 t}{\partial z \partial \phi} \right| = \frac{1}{4\Delta z \Delta \phi} (t_{i+1, j+1}^k + t_{i-1, j-1}^k - t_{i+1, j-1}^k - t_{i-1, j+1}^k). \quad (25)$$

Предполагается, что начальные данные определяются на начальном уровне сетки  $k_0$  по координате  $r$  с помощью конечно-разностной схемы (17), которая позволяет выполнять моделирование временного поля непосредственно от точечного источника.

Результаты детального исследования устойчивости решения уравнения эйконала на пространственных сетках изложены в работах [Пилипенко и др., 2009; Верпаховская, 2014; Верпаховская, Пилипенко, 2018]. На их основе можно сформулировать единое для обеих используемых схем условие, которое имеет четкую физическую природу. Оно сводится к требованию, чтобы произвольный сейсмический луч временного поля, приходящий в расчетный узел сетки, не выходил за пределы шаблона, образованного узлами разностной схемы (см. рис. 3).

**Алгоритм трехмерного моделирования временного поля на основе конечно-разностного решения уравнения эйконала для существенно неоднородной среды.** С использованием теоретических разработок был составлен алгоритм определения временного поля в узлах трехмерного сеточного прямоугольного параллелепипеда для неоднородной модели среды, в состав которого вошли следующие этапы: ввод исходных данных, подготовка сетки лучей и изохрон, определение скоростных параметров в узлах сетки лучей и изохрон, расчет временного поля в узлах сетки лучей и изохрон, подготовка цилиндрической сетки для расчета в дальней зоне источника, определение скоростных параметров в узлах цилиндрической сетки, расчет временного поля в узлах цилиндрической сетки, определение временного поля в сеточных узлах параллелепипеда.

В качестве входной информации рассматриваются координаты точки источника колебаний, а также координаты параллелепипеда, определяющего положение трехмерного сеточного пространства, в пределах которого будут получены результативные значения временного поля. Разностный счет должен осуществляться последовательным пересчетом, продолжением временного поля на сетке от точки возбуждения до предельного узла пространственной сетки в расчетной области, где предполагается получить результат. Так как для продолжения временного поля вблизи источника принято использовать сетку лучей и изохрон, соответствующих линейному изменению скорости с глубиной, а в дальней зоне источника расчет временной функции осуществляется на цилиндрической сетке, то во входные данные включе-

ны значения сеточных шагов для двух типов сеток, а также значения радиуса начала цилиндрической сетки. Размер сеточных шагов и значение начального радиуса определяются требованиями к точности расчета времени в конкретных сейсмических задачах. Входная информация готовится в виде параметрических файлов.

Поскольку для приближения нелинейного дифференциального уравнения эйконала используется явная схема конечно-разностной аппроксимации, то имеет место условная устойчивость счета. Условие устойчивости определяется соотношением шагов пространственной сетки, имеет четкую физическую природу и сводится к требованию, чтобы произвольный сейсмический луч временного поля, проходящий в расчетный узел сетки, не выходил за пределы шаблона, образованного узлами разностной схемы (см. рис. 3).

Для максимального удовлетворения условия устойчивости при разностном счете была сформулирована концепция, которая заключается в том, что при конструировании сеточного разбиения пространства необходимо стремиться к приближению линий пространственной сетки к траектории лучей и изохронам расчетного временного поля. Воплощением этой концепции в данном алгоритме явилось применение на начальной стадии счета в качестве линий пространственной сетки взаимно ортогональных последовательностей изохрон и лучей, которые присущи волновому полю точечного источника при линейном изменении скорости с глубиной  $V = V_0 (1 + \beta z)$ , где  $V_0$  — скорость на дневной поверхности при расчете сетки,  $V_0 \beta$  — градиент изменения скорости с глубиной. Так как в большинстве случаев имеет место увеличение скорости с глубиной, то при согласовании параметров  $V_0, \beta$  с осредненными их значениями для реальной скоростной функции снижается вероятность радикального расхождения линий сетки и лучевых траекторий, что, в свою очередь, обеспечивает устойчивость разностного счета.

Для организации разностного счета при неоднородной модели среды необходимы значения скорости и ее пространственных производных в каждом узле трехмерной сетки.

Скоростная модель, для которой применяется конечно-разностный метод решения, может быть описана произвольно. На этапе опробования принципиальных возможностей данного алгоритма было использовано описание скоростной модели в виде задания отдельных поверхностей, которые определяли пласты с различными значениями скорости и ее вертикального градиента. Таким образом, в неоднородную скоростную модель среды были включены разрывы как непосредственно скорости, так и ее производных.

Выражение (17) определяет явную схему расчета временного поля в направлении радиальной сеточной координаты  $k$  (ось  $\tau$ ), принятую для расчета времени в узле  $i, j, k + 1$  радиального уровня  $k + 1$  по девяти значениям времени на предыдущем уровне  $k$  (см. рис. 3). Продолжение временного поля по этой схеме выполняется в радиальном направлении от точечного источника до начального радиального уровня цилиндрической сетки.

Принятая к реализации разностная схема (17) обеспечивает квадратичную степень приближения сеточного решения к точечному дифференциальному решению по определению временного поля. Это означает, что при изменении сеточных шагов обеспечивается адекватное увеличение точности расчетов временного поля.

В дальней зоне источника фронт волны преимущественно распространяется в близком к горизонтальному направлении. В связи с этим целесообразно воспользоваться цилиндрической системой координат для разбиения пространственной расчетной сетки, координаты которой  $r, z, \varphi$ , где  $r$  — радиус,  $z$  — глубина,  $\varphi$  — азиму-

тальный угол. Предельные значения координат цилиндрической сетки обеспечивают полное покрытие ею области параллелепипеда, где предполагается получить результирующее временное поле. Значение сеточных шагов цилиндрической сетки  $\Delta r$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta \phi$  выбирается, как и в случае сетки лучей-изохрон, из условия необходимой точности расчетного временного поля и удовлетворения условий устойчивости счета.

Стартовые значения времени на начальном уровне цилиндрической сетки определяются путем интерполяции по значениям времени в узлах сетки лучей-изохрон. Расчет временного поля на цилиндрической сетке предполагает предварительное определение скорости  $V$ , а также ее производных  $\partial V/\partial r$ ,  $\partial V/\partial z$  и  $\partial V/\partial \phi$  во всех узлах расчетной области.

Необходимость привлечения к конечно-разностному счету производных скорости объясняется требованием при счете квадратичной степени сходимости разностного решения к решению дифференциальному. При этом по аналогии с конечно-разностной схемой на сетке лучей-изохрон используется явная конечно-разностная схема для цилиндрической сетки (24). Так как уравнение эйконала является нелинейным, то существует вероятность, что для неоднородной модели среды может существовать область пространства, где его решение будет неопределенно. При конечно-разностном продолжении это может иметь место, если в некотором узле сетки подкоренные выражения в формулах принимают отрицательные значения. В таком случае значения времени в этом узле не может быть рассчитано. В реальных условиях действуют волновые законы, при которых резкие изменения фронта волны в соответствии с принципом дифракции "затягиваются" в процессе его распространения [Кравцов, Орлов, 1980]. В разработанном алгоритме разностного счета узлы сетки, где нет возможности выполнить разностный счет, опускаются. После завершения счета на текущем радиальном уровне сетки время в пропущенных узлах доопределяется интерполяцией по значениям временной сетки, где сеточный счет был успешно реализован. Благодаря этой процедуре можно говорить об определенном волновом характере решения кинематической задачи продолжения временного поля, что позволяет расширить применение данного алгоритма на модели среды со сложным распределением скорости.

При явном расчете временного поля на сетке с применением шаблона (см. рис. 3) нет возможности определять время в крайних линиях сетки при минимальных и максимальных значениях сеточных координат  $i$ ,  $j$ . Поэтому в рассматриваемом алгоритме краевые значения времени, подобно как в случае с пропущенными узлами, доопределяются с помощью экстраполяции значений поля в соседних, относительно краевых, узлах.

На заключительной стадии расчета временного поля осуществляется пересчет временной функции с цилиндрической сетки на прямоугольную в области пространства, представляющего собой параллелепипед. Временное поле на прямоугольной сетке удобно для использования в дальнейших практических приложениях.

Расчет трехмерного временного поля может быть полезным в процессе наблюдений сейсмических явлений на отдельном пространственном полигоне. В этом случае отдельно для каждой из ведущих наблюдение сейсмических станций может быть рассчитано с использованием предположительной скоростной модели среды трехмерное временное поле, которое описывает время прихода волны от всех гипотетических источников колебаний, расположенных на контролируемом полигоне.

Располагая детальной трехмерной сеткой значений времени прихода волны с полигона, нетрудно путем интерполяции определить разность реального и расчетного времен для зафиксированного на станции явления, что может служить как для кор-

рекции принятой скоростной модели среды, так и для контроля и уточнения пространственного положения произошедшего явления.

На основе рассмотренного алгоритма расчета временного поля в трехмерной неоднородной среде был составлен комплекс программ, каждая из которых выполняет один из этапов алгоритма. Опробование данного комплекса на различных тестовых примерах подтвердило сделанные ранее выводы о точности и устойчивости конечно-разностного определения временного поля.

В качестве примера рассмотрим расчет трехмерного временного поля для скоростной модели, заданной в параллелепипеде размером  $110 \times 40 \times 30$  км по осям  $x, y, z$  соответственно. Скоростная модель определяется заданием скачкообразного изменения скорости по глубине (от 3000 до 6000 м/с) на плоской наклонной границе, а также локальным телом с повышенной скоростью в виде эллиптического усеченного конуса, кровля которого располагается на глубине 12 км.

На рис. 4 представлена карта поверхности границы с локальным выступом, на которой происходит скачок скорости, а на рис. 5 приведено вертикальное сечение скоростной модели по линии, соединяющей точку возбуждения и центр локального выступа, расположенный на расстоянии 60 км от точки возбуждения. Скачок скорости на границе имеет переменный характер и достигает максимального значения в 1500 м/с на поверхности локального выступа.

Рассмотрим результат определения временного поля в интервале расстояний 40—110 км от пункта возбуждения в виде верхнего среза (поверхностного годографа) трехмерного массива данных. Расчетный массив данных соответствует объему среды  $40 \times 110 \times 30$  км. Был выполнен расчет временного поля на поверхности данного параллелепипеда в присутствии и отсутствии локального, аномального по скорости тела. На общем фоне поведения временного поля на поверхности трудно выделить аномальный эффект от наличия выступа, однако при определении разности двух поверхностных годографов этот эффект очень ощутимый, что демонстрируется на рис. 6. Здесь отчетливо фиксируется отрицательная аномалия во временном поле, вызванная присутствием в модели высокоскоростного включения.

На этом и некоторых других примерах была исследована корректность разработанного алгоритма путем оценки влияния изменений сеточных параметров на резуль-

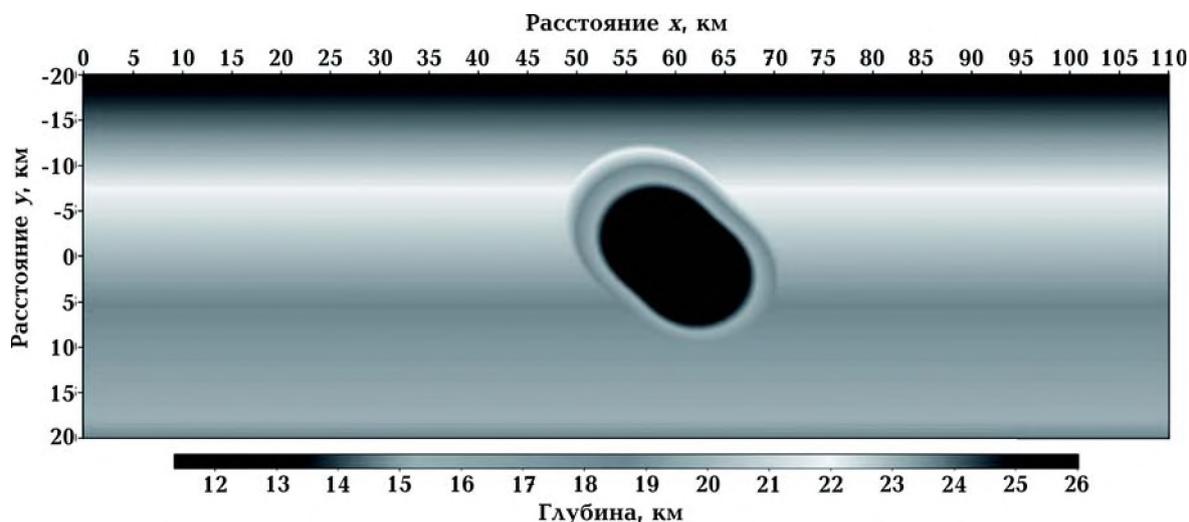


Рис. 4. Вертикальный срез трехмерной скоростной модели с локальным выступом.

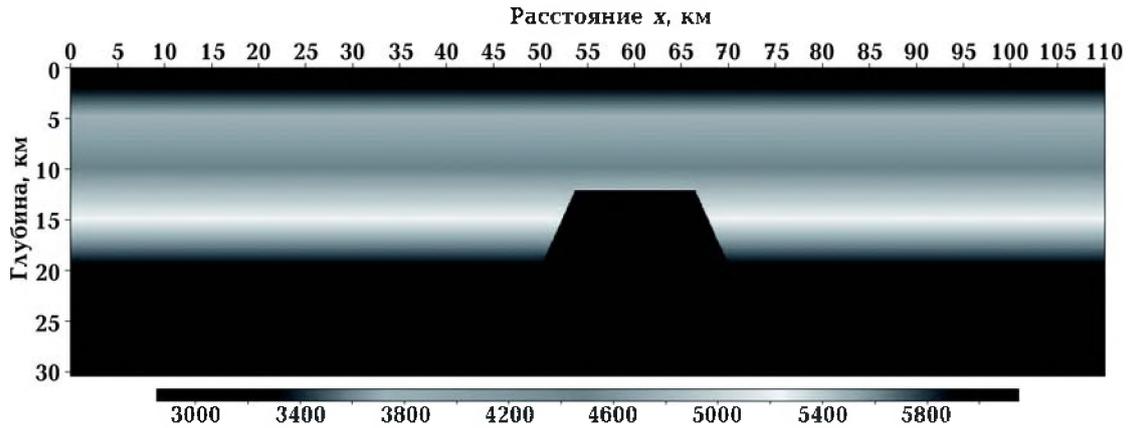


Рис. 5. Горизонтальное сечение трехмерной скоростной модели с локальным выступом.

тативные временные поля. Как показали расчеты, даже при двукратном изменении шагов сетки значения временного поля не изменяются более чем на доли процента.

**Выводы.** Кинематику сейсмических волн, возникающих при землетрясении и распространяющихся в неоднородной Земле, можно воссоздать с помощью трехмерного моделирования временного поля, которое позволяет определить время прихода волны в каждую точку пространства. Трехмерное моделирование временного поля позволяет решать прямую задачу сейсмологии — по известному распределению скорости в Земле рассчитывать лучевые траектории, а также время и координаты выхода луча на ее поверхность. Данные параметры являются необходимыми при изучении параметров очага землетрясения и внутреннего строения Земли по сейсмологическим данным.

Разработано два подхода к моделированию временного поля в трехмерном сферическом пространстве с помощью лучевого моделирования, основанного на реше-

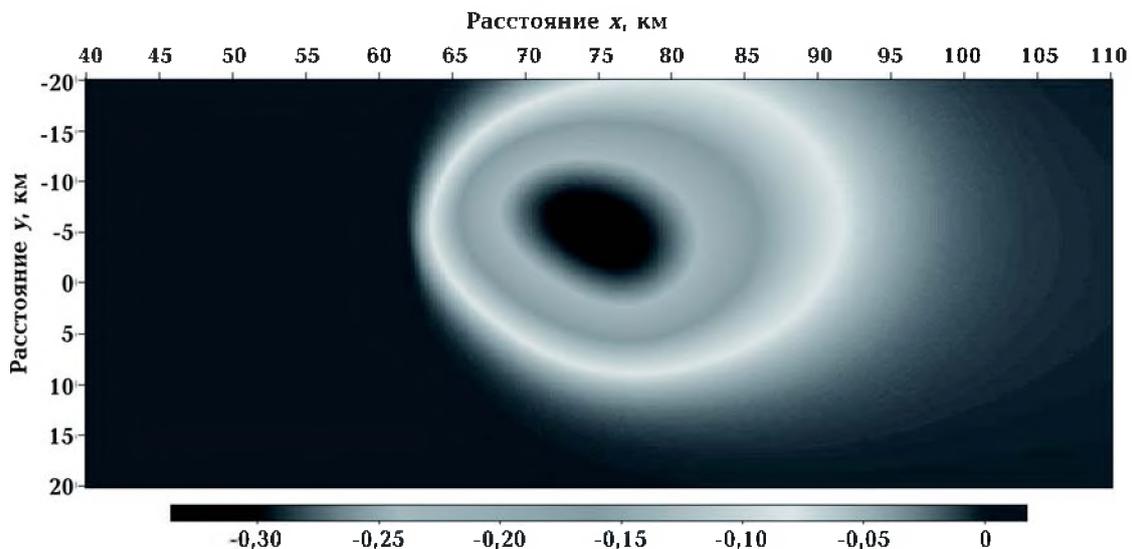


Рис. 6. Аномалия временного поля, вызванная присутствием в скоростной модели локального выступа.

нии системы уравнений лучей в сферических координатах и путем численного расчета распределения времени прихода волны с применением конечно-разностного решения уравнения эйконала с учетом априорной информации о скоростных характеристиках среды. При этом разностная аппроксимация уравнения эйконала выполняется на сферической сетке с десятиточечным двуслойным шаблоном. Предложенная явная схема позволяет достичь квадратичной точности с условием, что произвольный сейсмический луч, приходящий в расчетный узел сетки, не выходит за пределы шаблона, образованного узлами заданной сетки.

На основе теоретических разработок были созданы алгоритмы и программы трехмерного моделирования временного поля как лучевым, так и конечно-разностным методами в сферической неоднородной Земле. Программы были протестированы на ряде примеров и полученные результаты подтверждают точность и корректность разработок.

Таким образом, можно утверждать, что предложенные варианты трехмерного моделирования временного поля как лучевым, так и конечно-разностным методами позволяют эффективно решать разные задачи как сейсмологии, так и поисковой сейсморазведки даже в существенно неоднородных средах.

### Список литературы

Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. Т. 2. Москва: Мир, 1983. 880 с.

Верпаховская А. О. Актуальные задачи конечно-разностной миграции поля преломленных волн. *Геофиз. журн.* 2011. Т. 33. № 6. С. 96—108. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v33i6.2011.116796>.

Верпаховская А. О. Кинематическая миграция поля преломленных волн при формировании изображения среды по данным ГСЗ. *Геофиз. журн.* 2014. Т. 36. № 6. С. 153—164. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v36i6.2014.111054>.

Верпаховская А. О., Пилипенко В. Н. Кинематическая миграция для определения скоростной модели среды при решении практических задач сейсморазведки. *Геофиз. журн.* 2018. Т. 40. № 6. С. 52—67. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v40i6.2018.151007>.

Верпаховская А. О., Пилипенко В. Н., Будкевич В. Б. 3D конечно-разностная миграция поля преломленных волн. *Геофиз. журн.* 2015. Т. 37. № 3. С. 50—65. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i3.2015.111102>.

Верпаховская А. О., Пилипенко В. Н., Пилипенко Е. В. Формирование изображения глубинного геологического строения по данным морской сейсморазведки МОВ и МПВ. *Геофиз. журн.* 2017. Т. 39. № 6. С. 106—121. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v39i6.2017.116375>.

Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Москва: Наука, 1977. 440 с.

Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. Москва: Наука, 1980. 306 с.

Пилипенко В. Н., Верпаховская А. О., Будкевич В. Б., Пилипенко Е. В. Формирование трехмерного изображения среды по сумме ОГТ для изучения геологического строения шахт-

- ных полей. *Геофиз. журн.* 2015. Т. 37. № 4. С. 104—113. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i4.2015.111129>.
- Пилипенко Е.В., Верпаховская А.О., Кекух Д.А. Интерпретация данных 3D сейсморазведки с применением конечно-разностной кинематической миграции. *Геофиз. журн.* 2009. Т. 31. № 1. С. 16—27.
- Пилипенко В.М., Верпаховська О.О., Кекух Д.А. 3D скінчено-різницева кінематична міграція в інтерпретації даних сейсморозвідки: Тези міжнародної науково-технічної конференції "Прикладна геологічна наука сьогодні: здобутки та проблеми". Київ, 2007. С. 87—88.
- Саваренский Е.Ф., Кирнос Д.П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. Москва: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 543 с.
- Сейсмическая томография с приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике. Под ред. Т. Нолета. Москва: Мир, 1990. 415 с.
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Москва: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953.
- Comer, R.P. (1984). Rapid seismic ray tracing in a spherical symmetric Earth via interpolation of rays. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(2), 479—492.
- Červený, V., Molotkov, I.A. & Pšenčík, I. (1977). *Ray Method in Seismology*. Praha: Universita Karlova, 214 p.
- Nelson, G.D., & Vidale, J.E. (1990). Earthquake locations by 3-D finite-difference travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 80(2), 395—410.
- Pavlenkova, N.I., Pilipenko, V.N., Verpakhovskaja, A.O., Pavlenkova, G.A., & Filonenko, V.P. (2009). Crustal structure in Chile and Okhotsk Sea regions. *Tectonophysics*, 472(1-4), 28—38. doi: 10.1016/j.tecto.2008.08.018.
- Pilipenko, V.N., Verpakhovskaya, A.O., Starostenko, V.I., & Pavlenkova, N.I. (2010). Finite-difference migration of the field of refracted waves in studies of the deep structure of the Earth's crust and the upper mantle based on the DSS (on the example of the DOBRE profile). *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 46(11), 943—954. doi: 10.1134/S1069351310110042.
- Pylypenko, V.N., Verpakhovska, O.O., Starostenko, V.I., & Pavlenkova, N.I. (2011). Wave images of the crustal structure from refraction and wide-angle reflection migrations along the DOBRE profile (Dnieper-Donets paleorift). *Tectonophysics*, 508(1-4), 96—105. doi: 10.1016/j.tecto.2010.11.009.
- Verpakhovska, O., Pylypenko, V., Pylypenko, O., & Sydorenko, H. (2015). 3D finite-difference migration with paralleling of process of computing: *Extended abstract, 14<sup>th</sup> EAGE International Conference on Geoinformatics Theoretical and Applied Aspects, Geoinformatics 2015* (pp. 114). doi: 10.3997/2214-4609.201412406.
- Verpakhovska, A., Pylypenko, V., Yegorova, T., & Murovskaya, A. (2018). Seismic image of the crust on the PANCAKE profile across the Ukrainian Carpathians from the migration method. *Journal of Geodynamics*, 121, 76—87. doi: 10.1016/j.jog.2018.07.006.
- Vidale, J.E. (1990). Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. *Geophysics*, 55(5), 521—526. <https://doi.org/10.1190/1.1442863>.

# Three-dimensional modeling of temporal field by radial and finite-differential methods for solving the problems of seismology

V. N. Pilipenko, A. O. Verpakhovskaya, 2019

Three-dimensional modeling of temporal field allows reconstructing the kinematics of wave processes observed in the Earth during seismic studies and determine in such a way spatial position into it of the studied objects. Modeling is also an important tool for inspection of correctness of methods for solving the inverse problem during the process of interpretation both seismological and seismic exploration data. Seismic rays which determine the direction of the flow of high-frequency part of seismic wave field energy are very important in seismology. Tracking the rays and their calculation allows solving different problems of seismology as well as checking the accuracy of results obtained while different methods of processing and interpretation of data observed on the Earth surface are used. A version of finite-differential modeling of temporal field in three-dimensional spherical Earth is based on direct net approximation of the eikonal equation and it is this approach to reconstruction of values of seismic waves arrivals to any point of Earth depths is the most stable and as a result can guarantee correctness of solving lots of applied problems of seismology. At the same time continuation of temporal field is a part of calculative process of finite-differential migration designed at the Institute of Geophysics named after S. I. Subbotin of NAS of Ukraine and is used while processing seismic exploration data. Development of computer technologies during recent decades brought the appearance of theories, algorithms, and software-based complexes realizing the solving of three-dimensional geophysical in particular seismological problems. The paper gives theoretical foundations, algorithms, and results of application of three-dimensional temporal fields modeling developed for both radial and finite-differential methods by practical examples.

**Key words:** seismology, three-dimensional modeling, temporal field, finite-differential continuation, eikonal equation.

## References

- Aki, K., & Richards, P. (1983). *Quantitative Seismology. Theory and methods*. Vol. 2. Moscow: Mir, 880 p. (in Russian).
- Verpakhovskaya, A. O. (2011). Actual problems of finite-difference migration of the of refracted-wave field. *Geofizicheskiy zhurnal*, 33(6), 96—108. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v33i6.2011.116796> (in Russian).
- Verpakhovskaya, A. O. (2014). Kinematic migration of the field of refracted waves while the image of environment is being formed according to DSS data. *Geofizicheskiy zhurnal*, 36(6), 153—164. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v36i6.2014.111054> (in Russian).
- Verpakhovskaya, A. O., & Pilipenko, V. N. (2018). Kinematic migration for determination of velocity model of the medium while solving practical problems of seismic exploration. *Geofizicheskiy zhurnal*, 40(6), 52—67. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v40i6.2018.151007> (in Russian).
- Verpakhovskaya, A. O., Pilipenko, V. N., & Budkevich, V. B. (2015). 3D finite-difference migration of the field of refracted waves. *Geofizicheskiy zhurnal*, 37(3), 50—65. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i3.2015.111102> (in Russian).
- Verpakhovskaya, A. O., Pilipenko, V. N., & Pilipenko, E. V. (2017). Formation geological depths image according to refraction and reflection marine seismic data. *Geofizicheskiy zhurnal*, 39(6), 106—121. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v39i6.2017.116375> (in Russian).

- Godunov, S.K., & Ryabenkiy, V.S. (1977). *Difference Schemes*. Moscow: Nauka (in Russian).
- Kravtsov, Yu.A., & Orlov, Yu.I. (1980). *Geometric optics of inhomogeneous media*. Moscow: Nauka (in Russian).
- Pilipenko, V.N., Verpakhovskaya, A.O., Budkevich, V.B., & Pilipenko, E.V. (2015). Formation of three-dimensional image of the medium by the sum of CDP for the studies of geological structure of mine fields. *Geofizicheskiy zhurnal*, 37(4), 104—113. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i4.2015.111129> (in Russian).
- Pilipenko, E.V., Verpakhovskaya, A.O., & Kekukh, D.A. (2009). Interpretation of 3D seismic exploration data applying finite-difference kinematic migration. *Geofizicheskiy zhurnal*, 31(1), 16—27 (in Russian).
- Pylypenko, V.M., Verpakhovska, O.O., & Kekukh, D.A. (2007). 3D finite-difference kinematic migration in the interpretation of seismic data: *Abstracts of the international scientific and technical conference "Applied Geological Science Today: Achievements and Problems"* (pp. 87—88). Kyiv.
- Savarensky, E.F., & Kirnos, D.P. (1955). *Elements of seismology and seismometry*. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 543 p. (in Russian).
- Nolet, T. (Ed.). (1990). *Seismic tomography with applications in global seismology and exploratory geophysics*. Moscow: Mir, 415 p. (in Russian).
- Smirnov, V.I. (1953). *Course of higher mathematics*. Vol. 4. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature (in Russian).
- Comer, R.P. (1984). Rapid seismic ray tracing in a spherical symmetric Earth via interpolation of rays. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 74(2), 479—492.
- Červený, V., Molotkov, I.A. & Pšenčík, I. (1977). *Ray Method in Seismology*. Praha: Universita Karlova, 214 p.
- Nelson, G.D., & Vidale, J.E. (1990). Earthquake locations by 3-D finite-difference travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 80(2), 395—410.
- Pavlenkova, N.I., Pilipenko, V.N., Verpakhovskaja, A.O., Pavlenkova, G.A., & Filonenko, V.P. (2009). Crustal structure in Chile and Okhotsk Sea regions. *Tectonophysics*, 472(1-4), 28—38. doi: 10.1016/j.tecto.2008.08.018.
- Pilipenko, V.N., Verpakhovskaya, A.O., Starostenko, V.I., & Pavlenkova, N.I. (2010). Finite-difference migration of the field of refracted waves in studies of the deep structure of the Earth's crust and the upper mantle based on the DSS (on the example of the DOBRE profile). *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 46(11), 943—954. doi: 10.1134/S1069351310110042.
- Pylypenko, V.N., Verpakhovska, O.O., Starostenko, V.I., & Pavlenkova, N.I. (2011). Wave images of the crustal structure from refraction and wide-angle reflection migrations along the DOBRE profile (Dnieper-Donets paleorift). *Tectonophysics*, 508(1-4), 96—105. doi: 10.1016/j.tecto.2010.11.009.
- Verpakhovska, O., Pylypenko, V., Pylypenko, O., & Sydorenko, H. (2015). 3D finite-difference migration with paralleling of process of computing: *Extended abstract, 14<sup>th</sup> EAGE International Conference on Geoinformatics Theoretical and Applied Aspects, Geoinformatics 2015* (pp. 114). doi: 10.3997/2214-4609.201412406.
- Verpakhovska, A., Pylypenko, V., Yegorova, T., & Murovskaya, A. (2018). Seismic image of the crust on the PANCAKE profile across the Ukrainian Carpathians from the migration method. *Journal of Geodynamics*, 121, 76—87. doi: 10.1016/j.jog.2018.07.006.
- Vidale, J.E. (1990). Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. *Geophysics*, 55(5), 521—526. <https://doi.org/10.1190/1.1442863>.