УДК 550.312+550.831+550.838

Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. 2

© *А. В. Черный, А. И. Якимчик, 2000*

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 29 февраля 2000 г.
Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Обгрунтовується запропонований у першій частині роботи спосіб відновлення потенціалу за модулем його градієнта за умови близькості потенціалу до заданого у вигляді границі послідовності розв'язків граничних задач Неймана для рівняння Лапласа, що визначають збурюючий потенціал. Послідовність збурюючих потенціалів генерується послідовністю розв'язків лінійних інтегральних рівнянь другого роду з компактними операторами, що мають великі ядра. Встановлено коректну розв'язуванність даного класу рівнянь і доведено збіжність послідовності розв'язків задач Неймана до функції, яка однозначно породжує шуканий потенціал.

The method of the recovery of the potential on the module of its gradient under conditionof the similarity of the potential to that given as the limit of the succession of the solations of the boundary problems of Neumann for the Laplace equation that define the disturbing potential proposed in the first part is substantiated. The succession of the disturbing potential is generated by the succession of the solutions of linear integral equations of the second kind with compact operators having large cores. A correct solubility of the given kind of equations is established and the convergence of the succession of the solution of the Neumann's problems to the function unambiguously generating the desired potential is proven.

В первой части [1] этой работы нелинейная граничная задача о восстановлении внешнего потенциала притяжения $V(x)$ в области G^+ по значениям модуля градиента $g(x)$ потенциала силы тяжести $W(x)$, заданным в точках $x=(x_1,x_2,x_3)$ границы ∂G области, т. е. задача

$$\Delta V(x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_k^2}=0,\ x\in G^+,$$

$$\left|-\Delta W(x)\right|=\left[\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_k}\right)^2\right]^{1/2}=g(x),\ \ x\in\partial G, \tag{1}$$

$$W(x)\to 0 \ \text{ при } |x|\to\infty,$$

сведена к последовательности внешних линейных граничных задач Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta V^{(i)}(x)=0,\ \ x\in G^+,$$

$$\frac{\partial V^{(i)}(x)}{\partial m(x)}=q^i(x)\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m}), \tag{2}$$

$$i=0,1,\ldots,\infty,\ \ V^{(0)}(x)=\Phi(x),$$

$$q^{(0)}(x)=\chi(x),\quad \mathbf{e}_0(x)=\varepsilon(x),$$

где

$$W(x)=V(x)+\Omega(x),\ \ U(x)=\Phi(x)+\Omega(x),\ \ x\in R^{(3)}=\overline{G}^+\cup G^-;$$

$$V(x)=f\int_{G^-}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{|x-\xi|},\quad \Phi(x)=f\int_{G_0^-}\frac{\sigma_0(\xi)d\xi}{|x-\xi|},\quad \Omega(x)=\begin{cases}\frac{\omega^2}{2}(x_1^2+x_2^2), x\in G^-,\\ 0, x\in G^+;\end{cases}$$

f — гравитационная постоянная; $\sigma(\xi)$, $\xi\in G^-$, — неизвестное распределение масс Земли в области G^-; $\sigma_0(\xi)$, $\xi\in G_0^-$, — заданное распределение масс Земли в области G_0^-; ω — модуль вектора угловой скорости Земли; $U(x)$ — нормальный потенциал, $\Phi(x)$ — нормальный потенциал притяжения; $\Omega(x)$ — потенциал центробежной силы; $\partial W_x: W(y)=c_x^{(1)}$, $\partial U_x: U(y)=c_x^{(2)}$, $\partial V_x: V(y)=c_x^{(3)}$, $\partial\Phi_x: \Phi(y)=c_x^{(4)}$ — эквипотенциальные поверхности соответствующих потенциалов, проходящие через точку x пространства $R^{(3)}$ при $c_x^{(2)}=\text{const}$, $i=1,2,3,4$; $\partial G: F(x)=0$, — поверхность Земли, описываемая известной поверхностью класса многообразий Ляпунова; $\mathbf{n}(x)$, $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{e}(x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$, $\mathbf{m}(x)$ — единичные нормали (внутренние по отношению к области G^-), восстановленные в точке x к этим поверхностям, среди которых только $v(x)$, $\varepsilon(x)$ и $\mathbf{m}(x)$ считается заданными;

$$\cos(x_k,\mathbf{p})=\cos(\mathbf{p},x_k)=\frac{\partial_k R(x)}{r(x)}, \tag{3}$$

$\partial_k R(x)=\partial R(x)/\partial x_k$ — общее обозначение компонент единичного вектора $\mathbf{p}=\mathbf{p}(x)$ в точке x к поверхности ∂R_x: $R(y)=c_x$, который при $\partial R_x=\partial W_x$, ∂U_x, ∂V_x, $\partial\Phi_x$ и $r(x)=g(x)$, $\gamma(x)$, $q(x)$, $\chi(x)$, $g(x)=|-\nabla W(x)|$, $\gamma(x)=|-\nabla U(x)|$, $q(x)=|-\nabla V(x)|$, $\chi(x)=|-\nabla\Phi(x)|$ отождествляется соответственно с нормалями $\mathbf{n}(x)$, $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{e}(x)$, и $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$, а

$$\cos(\mathbf{p},\mathbf{s})=\sum_{k=1}^{3}\cos(\mathbf{p},x_k)\cos(x_k,\mathbf{s}) \tag{4}$$

является косинусом угла между направлениями $\mathbf{p}(x)$ и $\mathbf{s}(x)$ в точке x. Каждое из последующих приближений $q^{(i)}(x)$, $i=1,2,\ldots,\infty$, модуля градиента $q(x)$ потенциала притяжения $V(x)$ определяется в задаче (2) по формуле

$$q^{(i)}(x)=q(x)\left\{1+2\omega^2[q^{(i-1)}(x)]^{-1}\sum_{k=1}^{2}x_k\cos(x_k,\mathbf{e}_{i-1})+\omega^4[q^{(i-1)}(x)]^{-2}(x_1^2+x_2^2)\right\}^{-1/2}. \tag{5}$$

Если распределение плотности $\sigma_0(\xi)$, $\xi\in G_0^-$, и область G_0^- выбраны настолько удачно, что функции $g(x)$ и $\gamma(x)$ друг от друга отличаются незначительно (в принятой метрике), то возмущающий потенциал $T(x)$, определяемый отклонением реального потенциала силы тяжести от нормального, т. е. в виде

$$T(x)=W(x)-U(x)=V(x)-\Phi(x),$$

будет составлять небольшую долю потенциала притяжения. В связи с этим последний выгодно искать в виде последовательности $\{V^{(0)}(x)+T^{(i)}(x)\}$ решений $T^{(i)}(x)$ внешних граничных задач Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta T^{(i)}(x)=0, x\in G^+,$$

$$\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial m(x)}=q^{(i)}(x)\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})-\chi(x)\cos(\mathbf{e},\mathbf{m}), \tag{6}$$

$$T^{(i)}(x)\to 0 \quad \text{при } |x|\to\infty.$$

Решение каждой из этих задач в принятом предположении относительно гладкости земного рельефа ∂G будем искать в виде потенциала простого слоя

$$T^{(i)}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\frac{\delta^{(i)}(\xi)}{|x-\xi|}ds_\xi, x\in G^+, \tag{7}$$

масс, распределенных по поверхности ∂G с непрерывной плотностью. В свою очередь неизвестную плотность определим из граничного условия, которое в соответствии с известной теоремой скачка редуцирует задачу определения плотности к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\delta^{(i)}(x)+\int_{\partial G}k(x,\xi)\delta^{(i)}(\xi)ds_\xi=\varphi^{(i)}(x), x\in\partial G, \tag{8}$$

где ядро интегрального оператора уравнения дается выражением

$$k(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m(x)}\frac{1}{|x-\xi|}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\mathbf{u},\mathbf{m})}{|x-\xi|^2}, \tag{9}$$

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{m})=\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k-\xi_k}{|x-\xi|}\cos(\xi_k,\mathbf{m}),\; u=x-\xi\in R^{(3)},$$

а граничная функция — в виде

$$\varphi^{(1)}(x)=q^{(i)}(x)\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})-\chi(x)\cos(\varepsilon,\mathbf{m}), \tag{10}$$

В результате решения уравнения (8) вычисляем с использованием представления (7) приближение $V^{(i)}(x)$ потенциала притяжения $V(x)$ и приближения производных

$$\partial_k V^{(i)}(x)=\partial_k\Phi(x)+\partial_k T^{(i)}(x), \tag{11}$$

где

$$\partial_k T^{(i)}(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial G}\frac{x_k-\xi_k}{|x-\xi|^3}\delta^{(i)}(\xi)ds_\xi,$$

что дает возможность определить по формулам вида (3)—(5) значения граничных функций для последующих граничных задач типа (6), заменяя индекс i-го приближения на $(i+1)$-е.

Перейдем к строгому обоснованию предложенной схемы восстановления потенциала притяжения. Отправным пунктом последующих рассмотрений является

Лемма. *Если граница ∂G ограниченной области G^- является поверхностью Ляпунова, то справедливы равенства*

$$\int_{\partial G}\frac{\partial}{\partial m(x)}\Omega(x,\xi)ds_\xi=\begin{cases}1, x\in G^+,\\ \frac{1}{2}, x\in\partial G,\\ 0, x\in G^-,\end{cases}$$

где $\Omega(x,\xi)=\left(4\pi|x-\xi|\right)^{-1}, G^+=R^{(3)}\setminus\overline{G^-}$.

В самом деле, если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(G^+)\cap C^{(1)}(\overline{G^+})$, а граница ∂G, разделяющая области G^+ и G^-, является границей Ляпунова, то к функциям $u(x)$ и $\Omega(x,\xi)$ в области G^+ можно применить формулу Грина [2]. В итоге получим

$$\int_{G^+} \Delta u(\xi)\Omega(x,\xi)d\xi = \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\Omega(x,\xi) - u(\xi)\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial u(\xi)} \right\} ds_\xi , \tag{12}$$

поскольку функция $\Omega(x,\xi)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в $R^{(3)}$.

Далее, если точка x лежит внутри области G^- вместе с достаточно малой шаровой окрестностью $O(x,\xi)$ радиуса $\varepsilon > 0$, то, распространив на область $G^- \setminus O(x,\xi)$ формулу Грина для функций $u(\xi) \in C^{(2)}(G^-) \cap C^{(1)}(\overline{C^-})$ и $\Omega(x,\xi)$, получим

$$\int_{G^- \setminus O(x,\xi)} \{\Delta u(\xi)\Omega(x,\xi) - u(\xi)\Delta_\xi \Omega(x,\xi)\} d\xi = \int_{\partial G \cup \partial O(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\Omega(x,\xi) - u(\xi)\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)} \right\} ds_\xi . \tag{13}$$

Интеграл по области $G^- \setminus O(x,\xi)$ при $\varepsilon > 0$ стремится к несобственному интегралу

$$\int_{G^-} \Delta u(\xi)\Omega(x,\xi)d\xi , \tag{14}$$

так как $\Delta_\xi \Omega(x,\xi) = 0$ при $\xi \in O(x,\xi) - \{x\}$. В то же время поверхностный интеграл по одной из компонент границы $\partial G \cup \partial O(x,\varepsilon)$ области $G^- \setminus O(x,\varepsilon)$, а именно по сфере $\partial O(x,\varepsilon)$, окружающей точку x при $\varepsilon \to 0$, принимает значение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial O(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)}\Omega(x,\xi) - u(\xi)\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial n(\xi)} \right\} ds_\xi = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial O(x,\varepsilon)} u(\xi)\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial n(\xi)}\, ds_\xi = -u(x) . \tag{15}$$

Это следует из теоремы о среднем значении интеграла, свойств фундаментального решения $\Omega(x,\xi)$, непрерывности и ограниченности нормальной производной функции $u(\xi)$ на $\partial O(x,\varepsilon)$, а также из того, что дифференцирование по внутренней нормали границы заменено дифференцированием по противоположному направлению роста радиуса сферы $\partial O(x,\varepsilon)$.

Ели же точка x лежит на границе ∂G области G^-, то граница ∂D области $D = G^- \setminus O(x,\varepsilon)$, на которую распространяется формула Грина для функций $u(\xi) \in C^{(2)}(G^-) \cap C^{(1)}(\overline{C^-})$ и $\Omega(x,\xi)$, будет состоять из двух компонент: части $\partial G \setminus \partial G(x,\varepsilon)$ границы ∂G, из которой вырезан участок $\partial G(x,\varepsilon)$, находящийся внутри сферы $\partial O(x,\varepsilon)$, и части $\partial O_i(x,\varepsilon)$ сферы $\partial O(x,\varepsilon)$, лежащей в области G^-. Поэтому

$$\int_{G^- \setminus O(x,\varepsilon)} \{\Delta u(\xi)\Omega(x,\xi) - u(\xi)\Delta_\xi \Omega(x,\xi)\} d\xi = \int_{(\partial G \setminus \partial G(x,\varepsilon)) \cup \partial O_i(x,\varepsilon)} \left\{ \frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\Omega(x,\xi) - u(\xi)\frac{\partial \Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)} \right\} ds_\xi . \tag{16}$$

Левая часть равенства (16), представленная интегралом по области $G^- \setminus O(x,\varepsilon)$, при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться, как и в предыдущем случае (расположения точки x), к несобственному интегралу (14) по области G^-. Точно так же поверхностный интеграл в правой части равенства (16), вычисляемый на множестве $\partial G \setminus \partial G(x,\varepsilon)$, будет стремиться при $\varepsilon \to 0$ к несобственному интегралу на границе ∂G. Значения обоих несобственных интегралов равны пределу поверхностного интеграла по множеству $\partial O_i(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Для вычисления этого предела воспользуемся тем, что граница ∂G является многообразием Ляпунова. Опираясь на это свойство, прежде всего восстановим в точке $x \in \partial G$ внутреннюю нормаль $\mathbf{m}(x)$ и проведем через эту точку касательную плоскость. Если теперь ввести в точке $x \in \partial G$ местную систему декартовых прямоугольных координат $y = (y_1, y_2, y_3)$, направив ось $0y_3$ по нормали $\mathbf{m}(x)$ и расположив оси $0y_1$ и $0y_2$ произвольным образом в касательной плоскости, то поверхность ∂G, как ляпуновское многообразие, внутри окрестности $O(x,\varepsilon)$ можно параметризовать непрерывно дифференцируемой функцией $y_3=\varphi(y_1,y_2)$ в области $\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$, где $\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$ — проекция поверхности $\partial O_i(x,\varepsilon)$ на координатную плоскость $0y_1,y_2$. Поскольку начало местной системы координат совмещено с точкой $x\in\partial G$, а плоскость $0y_1y_2$ — с касательной плоскостью к поверхности ∂G в этой точке, то функция $y_3=\varphi(y_1,y_2)$ вместе со своими частными производными первого порядка обращаются в нуль в начале координат и, следовательно, в области $\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$ ее можно подать в виде

$$y_3=\varphi(y_1,y_2)\equiv\varphi(y_1,y_2)-\varphi(0,0)=\frac{\partial\varphi(y_1',y_2')}{\partial y_1}y_1+\frac{\partial\varphi(y_1',y_2')}{\partial y_2}y_2, \qquad (17)$$

где $0\le y_1'\le y_1$, $0\le y_2'\le y_2$. Для вычисления интеграла по поверхности $\partial O_i(x,\varepsilon)$ воспользуемся еще параметризацией в сферических координатах:

$$y_1=\varepsilon\sin\alpha\cos\beta,\quad y_2=\varepsilon\sin\alpha\sin\beta,\qquad y_3=\varepsilon\cos\alpha,$$

$$0\le\alpha\le\alpha_0,\qquad 0\le\beta\le2\pi,\qquad ds_\xi=\varepsilon^2\sin\alpha\, d\alpha d\beta,$$

где $\alpha_0=\alpha_0(\beta)$ определяется зависимостью (17), когда $(y_1,y_2)\in\partial O_{i\varphi}(x,\varepsilon)$. Отправляясь от связи (17), очевидно получим

$$\cos\alpha=\psi_1(\varepsilon',\alpha',\beta')\sin\alpha\cos\beta+\ \psi_2(\varepsilon',\alpha',\beta')\sin\alpha\sin\beta=\psi(\varepsilon',\alpha,\beta),$$

где $\psi_i(\varepsilon',\alpha',\beta')$ суть значения производных $\partial_i\varphi(y_1',y_2')$, $i=1,2$, в сферических координатах, а $\psi(\varepsilon',\alpha,\beta)$ — функция ограниченная, непрерывная и обращающаяся в нуль одновременно с $\varepsilon'<\varepsilon$. В связи с этим и на основании характеристических свойств интегрируемых функций находим

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\partial O_i(x,\varepsilon)}\left\{\frac{\partial u(\xi)}{\partial m\qquad(\xi)}\Omega(x,\xi)-u(\xi)\frac{\partial\Omega(x,\xi)}{\partial m\qquad(\xi)}\right\}ds_\xi=-\frac{u(x')}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{2\pi}d\beta\int\limits_0^{\alpha_0}\sin\alpha d\alpha=$$

$$=-\frac{1}{2}u(x)+\frac{u\qquad(x')}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^{2\pi}[-\psi(\varepsilon',\alpha',\beta)]\Big|_{\pi/2}^{\alpha_0}d\beta=-\frac{1}{2}u(x). \qquad (18)$$

Таким образом, для функции $u(x)$ класса $C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\overline{D})$ из соотношений (12), (15), (16) и (18) установлены следующие интегродифференциальные тождества:

$$\int\limits_D\Delta u(\xi)\Omega(x,\xi)d\xi=\int\limits_{\partial G}\left\{\frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)}\Omega(x,\xi)-u(\xi)\frac{\partial\Omega(x,\xi)}{\partial m(\xi)}\right\}ds_\xi-\begin{cases}u(x), x\in D,\\ \frac{1}{2}u(x), x\in\partial G,\\ 0,\ x\in R^{(3)}\setminus\overline{D},\end{cases} \qquad (19)$$

где область D может принимать значения G^- или G^+. Однако если $D=G^+$, то проведенные рассмотрения распространяются только на класс функций из $C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\overline{D})$, которые в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяют (как нетрудно видеть) условиям

$$u(x)=o\left(|x|^{-1}\right),\quad |\nabla u(x)|=o\left(|x|^{-2}\right),\quad |\Delta u(x)|=o\left(|x|^{-3}\right).$$

Из тождеств (19) при $u(x)=1, x\in\overline{G^-}$, в частности, следует справедливость леммы.

Теперь можно убедиться, что задача (7) — (8) имеет единственное решение.

Теорема 1 (единственности). *Если для любой функции $\varphi^{(1)}(x)$, $x \in \partial G$, из ограниченного в $C(\partial G)$ множества интегральное уравнение (8) имеет непрерывные решения $\delta^{(i)}(x)$, $x \in \partial G$, то число этих решений не более одного.*

Доказательство начнем из противоположного предположения, что для одной и той же функции $\varphi^{(i)} \in C(\partial G)$ существует по меньшей мере два непрерывных решения $\delta_1^{(i)}(x)$ и $\delta_2^{(i)}(x)$. Тогда, очевидно, для разности $\delta(x) = \delta_1^{(i)}(x) - \delta_2^{(i)}(x$, $x \in \partial G$, представляющей собой непрерывную на ∂G функцию как разность двух непрерывных функций, будем иметь равенство

$$\partial(x) + \int_{\partial G} k(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi = 0. \tag{20}$$

Это равенство относительно функции $\delta(x)$ является линейным однородным интегральным уравнением, соответствующим уравнению (8). С его получением доказательство теоремы сводится к выяснению вопроса существуют или нет нетривиальные решения класса $C(\partial G)$ однородного уравнения (20).

Особенно просто вопрос выясняется в случае, когда многообразие Ляпунова ∂G представляет собой границу выпуклой области G. Из геометрических соображений ясно, что в этом случае $\cos(u,m) \le 0$, когда $u = x - \xi \in \partial G$, и в соответствии с утверждением леммы

$$\int_{\partial G} k(x,\xi)ds_\xi = 1, \quad x \in \partial G. \tag{21}$$

Поэтому, отправляясь от этого равенства, можем переписать однородное уравнение (20) в виде

$$\int_{\partial G} k(x,\xi)[\delta(x) + \delta(\xi)]ds_\xi = 0, \quad x \in \partial G.$$

Пусть точка x поверхности ∂G является точкой глобального экстремума функции $\delta(x)$ на ∂G. Тогда сумма $\delta(x) + \delta(\xi)$, $x,\xi \in \partial G$, будет знакопостоянной. Равенство (21) с учетом структуры ядра, отраженной в выражении (9), свидетельствует о том, что $k(x,\xi) \ge 0$ для любой из точек x или ξ выпуклой поверхности ∂G. Поэтому из предыдущего интегрального равенства получаем

$$\delta(\xi) = -\delta(x), \quad x,\xi \in \partial G,$$

что, естественно, противоречит непрерывности функции $\delta(x)$ на ∂G, если только $\delta(x) \ne 0$.

Следовательно, однородное интегральное уравнение (20) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (8), если и имеет решения, то не более одного. Теорема для выпуклой поверхности ∂G доказана.

Распространим теперь ее на более общий случай, когда многообразие ∂G является поверхностью Ляпунова. Пусть $\delta(x)$, $x \in \partial G$, — непрерывное решение однородного уравнения (20). Покажем, что непременно $\delta(x) = 0$, $x \in \partial G$. Потенциал простого слоя с плотностью $\delta(x)$, удовлетворяющей уравнению (20), будет гармонической функцией $T(x)$ и в неограниченной области G^+, и в ограниченной области G^-. Эта функция будет непрерывной во всем пространстве $R^{(3)}$, поскольку граничные значения ее нормальной производной $\dfrac{\partial T(x)}{\partial m_i}$ по внутренней нормали $\mathbf{m}_i$ на ∂G равны нулю (при стремлении точки $y \in \mathbf{m}_i(x)$ по внутренней по отношению к области G^+ нормали в точке $x \in \partial G$). Равенство $\dfrac{\partial T(x)}{\partial m_i} = 0$ следует из того, что плотность $\delta(x)$ потенциала $T(x)$ удовлетворяет уравнению (20) по условию. Далее, из формулы Грина

$$\int_{G^+} v(x)\Delta T(x)dx = -\int_{G^+}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\frac{\partial T(x)}{\partial x_k}dx + \int_{\partial G} v(x)\frac{\partial T(x)}{\partial m_i}ds_x,$$

справедливой для потенциала $T(x)$ и произвольной функции $v(x)$ класса $C^{(1)}(\overline{G}^+)$, при $v(x) = T(x)$ и с учетом равенства $\Delta T(x) = 0$, $x \in \overline{G}^+$, получаем

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{G^+}\left[\frac{\partial T(x)}{\partial x_k}\right]^2 dx = \int_{\partial G} T(x)\frac{\partial T(x)}{\partial m_i}ds_x .$$

Отсюда при выполнении условия $\frac{\partial T(x)}{\partial m_i} = 0$ должны выполняться равенства $\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = 0$, $k=1, 2, 3$, и, следовательно, функция $T(x)$ во всей неограниченной области G^+ должна быть постоянной. В то же время в бесконечно удаленной точке потенциал простого слоя $T(x)$ равен нулю. Поэтому $T(x) = 0$ во всей области G^+, включая и ее границу ∂G. Отсюда следует, что $T(x) = 0$ и внутри ограниченной области G^-, т. е. $T(x) \equiv 0$ во всем пространстве $R^{(3)}$. На основании принципа экстремума для гармонической функции $T(x)$ и равенства $\frac{\partial T(x)}{\partial m_i}$ заключаем, что и производная $\frac{\partial T(x)}{\partial m_e} = 0$ потенциала $T(x)$ по внешней по отношению к G^+ нормали $\mathbf{m}_e(x)$ в точке $x \in \partial G$ равна нулю. Таким образом, если учесть скачок $\delta(x)$ нормальной производной потенциала простого слоя, то получим

$$\delta(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial m_i} - \frac{\partial T(x)}{\partial m_e} \equiv 0, \quad x \in \partial G.$$

А это, в свою очередь, означает, что однородное интегральное уравнение (20) имеет только тривиальное решение, если ∂G является поверхностью Ляпунова. Итак, теорема для границ типа многообразий Ляпунова полностью доказана.

Теорема 2. *Интегральный оператор K задачи (8), заданный равенством*

$$K\delta = \int_{\partial G} k(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi = v(x), \quad x \in \partial G,$$

и ставящий в соответствие непрерывной функции $\delta(x)$ функцию $v(x)$, является компактным (вполне непрерывным) оператором.

Доказательство. Нетрудно видеть, что интегральный оператор K аддитивен, однороден и на основании равенства (21) ограничен. Следовательно, как линейный оператор он непрерывен. Для обнаружения полной его непрерывности покажем, что он переводит ограниченное множество функций из $C(\partial G)$ в компактное множество того же пространства. Выделим в пространстве $C(\partial G)$ шар

$$S(0,r) = \left\{\partial(x) : \delta \in C(\partial G), \|\delta\|_C = \max_{x\in\partial G}|\delta(x)| \le r\right\}$$

радиуса $r < \infty$ с центром в нуле. Тогда, ссылаясь на равенство (21), будем иметь

$$\|K\delta\|_C = \|v\|_C = \max_{x\in\partial G}\left|\int_{\partial G} k(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi\right| \le \|\delta\|_C \max_{x\in\partial G}\left|\int_{\partial G} k(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi\right| = \|\delta\|_C \le r.$$

Отсюда заключаем, что функции $v(x)$ множества $K\Delta \subset C(\partial G)$ равномерно ограничены. Положим $u = x - \xi$ и на основании представления

$$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}\frac{\cos(\mathbf{u},\mathbf{m})}{|u|^2}\delta(x-u)ds_u$$

и неравенства Липшица

$$|\delta(x_1)-\delta(x_2)| \le L|x_1-x_2|$$

с константой L получим при $|x_1-x_2|<\varepsilon$ (для произвольного числа $\varepsilon>0$)

$$|v(x_1)-v(x_2)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial G}\frac{\cos(\mathbf{u},\mathbf{m})}{|u|^2}[\delta(x_2-u)-\delta(x_1-u)]ds_u\right| \le L|x_1-x_2|\max_{x\in\partial G}\left|\int_{\partial G}k(x,\xi)ds_\xi\right| = L|x_1-x_2| < L\varepsilon.$$

Следовательно, функции $v(x)$ множества $K\Delta$ не только равномерно ограничены, но и равностепенно непрерывны (в метрике $C(\partial G)$) ввиду произвольной малости числа $\varepsilon>0$. Поэтому множество $K\Delta\subset C(\partial G)$ компактно по известной теореме Арцела, а интегральный оператор — вполне непрерывен. Теорема доказана.

Теперь можно перейти к освещению вопроса о существовании решения интегрального уравнения (8).

Теорема 3 (существования). *Если однородное интегральное уравнение (20) в пространстве непрерывных функций $C(\partial G)$ имеет только тривиальное решение, то соответствующее ему неоднородное интегральное уравнение (8) имеет решение при любой правой части, принадлежащей ограниченному множеству в $C(\partial G)$.*

Другими словами, из теоремы единственности следует теорема существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Для доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2, в которой утверждается, что интегральный оператор K является компактным. Действительно, если оператор K компактен, то оператор $E-K$, где E — тождественный в $C(G)$ оператор, будет непрерывно обратимым оператором на $C(\partial G)$, ибо его нуль-многообразие

$$N(E-K) = \{\delta\colon \delta - K\delta = 0, \delta\in C(\partial G)\}$$

состоит, как мы убедились, из единственного нуля. Однако для обращения оператора $E-K$ нельзя использовать известный ряд Неймана из-за наличия условия (21), которое имеет место для любой замкнутой поверхности Ляпунова. Тем не менее разрешимость на $C(\partial G)$ неоднородного интегрального уравнения (8) следует, в частности, из возможности представления ядра оператора K в виде суммы двух ядер, одно из которых будет ядром конечного ранга (вырожденным), а другое — "малым" ядром . Наличие такой возможности позволяет предложить один оптимальный из множества других алгоритм решения линейного интегрального уравнения второго рода с компактным оператором. Однако к вопросу о построении этого алгоритма вернемся только после рассмотрения более общей теории уравнения (8) Риса-Шаудера .

Теорема 4. *Если K — линейный вполне непрерывный оператор в пространстве $C(\partial G)$, то уравнение $\delta-K\delta=0$ имеет только тривиальное решение $\delta=0$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что условие теоремы не выполняется и подпространство нулей оператора $E-K$ нетривиально:

$$N(E-K) = \{\delta{:}\delta - K\delta = 0, \delta\in C(\partial G)\} \ne \{0\}.$$

Покажем, что в этом случае можно построить цепочку

$$N_1 \subset N_2 \subset\ldots\subset N_n \subset N_{n+1} \subset\ldots \tag{22}$$

строго вложенных друг в друга подпространств нулей операторов $(E-K)^n$, $n=1,2,\ldots,\infty$. В самом деле, если $\delta_1 \in N_1 \equiv N(E-K)$ и $\delta_1\ne 0$, то функция δ_2, удовлетворяющая условию

$$(E-K)\delta_2=\delta_1, \tag{23}$$

не может, во-первых, равняться нулю из-за того, что $\delta_1=0$ по предположению и, во-вторых, она не принадлежит N_1 по определению (23). Умножая уравнение (23) на оператор $E-K$, будем иметь в силу того, что $\delta_1\in N_1$,

$$(E-K)(E-K)\delta_2=(E-K)^2\delta_2=(E-K)\delta_1=0.$$

Отсюда заключаем, что существует такое отличное от нуля решение δ_2 уравнения (23), которое принадлежит

$$\delta_2\in N_2\equiv N\left((E-K)^2\right)=\left\{\delta:(E-K)^2\delta=0,\ \delta\in C(\partial G)\right\}$$

и не принадлежит N_1, иначе оказалось бы, что $\delta_1=0$, а это противоречит исходному предположению. Следовательно, налицо строгое включение $N_1\subset N_2$. Индукцией по индексу n доказывается справедливость всей цепочки в предположении, что $N_1\neq\{0\}$.

Действительно, предполагая, что $\delta_n\in N_n\equiv N\left((E-K)^n\right)$ и $\delta_n\neq 0$, $\delta_n\notin N_k$, $k=1,2,\ldots,n-1$, зададимся целью определить характеристики функции δ_{n+1}, удовлетворяющей уравнению

$$(E-K)\delta_{n+1}=\delta_n.$$

Прежде всего заключаем, что δ_{n+1} не может равняться нулю, поскольку $\delta_n\neq 0$. Более того, так как

$$(E-K)^k\delta_n\neq 0,\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

по предположению, то и для тех же индексов k

$$(E-K)^{k+1}\delta_{n+1}\neq 0$$

и поэтому $\delta_{n+1}\notin N_k$ для $k=1,2,\ldots n$. Однако в силу того, что $\delta_n\in N_n$, имеем

$$(E-K)^{n+1}\delta_{n+1}=(E-K)^n\delta_n=0$$

и, следовательно, $\delta_{n+1}\in N_{n+1}$, что и доказывает справедливость цепочки (22) строгого включения друг в друга подпространств нулей операторов $(E-K)^n$, $n=1,2,\ldots,\infty$.

В каждом подпространстве $N_n=N\left((E-K)^n\right)$ пространства $C(\partial G)$ найдется элемент μ_n такой, что $\|\mu_n\|_C=1$ и $\|\delta-\mu_n\|_C>\dfrac{1}{2}$ для всех $\delta\in N_{n-1}$, $n=2,3,\ldots$ Действительно, пусть элемент $\alpha\notin N_{n-1}$, но принадлежит N_n. Такой элемент $\alpha\neq 0$, как мы убедились, предположив, что $N_1\neq\{0\}$, существует. Положим

$$\inf_{\beta\in N_{n-1}}\|\alpha-\beta\|_C=d.$$

Поскольку $\alpha\notin N_{n-1}$, то, очевидно, $d>0$. Воспользуемся определением нижней грани и для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ найдем элемент β_ε такой, что

$$d(1-\varepsilon)\le\|\alpha-\beta_\varepsilon\|_C\le d.$$

Рассмотрим теперь элемент

$$\mu_n=\frac{\beta_\varepsilon-\alpha}{\|\alpha-\beta_\varepsilon\|_C},\quad \|\mu_n\|_C=1,\quad \beta_\varepsilon\in N_{n-1}.$$

Этот элемент будет искомым, $\mu_n\in N_n$. В самом деле, он не принадлежит ни одному из подпространств N_{n-1}, $n=2,3,\ldots$, иначе выполнялось бы включение $\beta_\varepsilon-\alpha\in N_{n-1}$, т. е. $\alpha\in N_{n-1}$, а это не так. Далее, расстояние от элемента μ_n до подпространства N_{n-1}, $n=2,3,\ldots$, оценивается следующим образом:

$$\|\mu_n-\beta\|_C=\left\|\frac{\beta_\varepsilon-\alpha}{\|\alpha-\beta_\varepsilon\|}-\beta\right\|=\frac{\|\alpha-(\beta_\varepsilon-\beta\|\beta_\varepsilon-\alpha\|)\|}{\|\beta_\varepsilon-\alpha\|}>\frac{d(1-\varepsilon)}{d}=1-\varepsilon,$$

ибо элемент $\beta_\varepsilon-\beta\|\beta_\varepsilon-\alpha\|$ принадлежит N_{n-1}, а $\|\alpha-\beta\|\geq d$ по определению для любого $\beta\in N_{n-1}$. Полагая $\varepsilon=1/2$, получаем

$$\|\delta-\mu_n\|>\frac{1}{2},\|\mu_n\|=1,\mu_n\in N_n,\delta\in N_{n-1},n=2,3,\ldots \tag{24}$$

Рассмотрим последовательность $\{K\mu_n\}$. Она компактна, ибо оператор K — вполне непрерывен, а последовательность $\{\mu_n\}$, $\|\mu_n\|_C=1$, $\mu_n\in N_n$, — ограничена. Для $m>n$ находим

$$\|K\mu_m-K\mu_n\|=\|\mu_m-(E-K)\mu_m-\mu_n+(E-K)\mu_n\|=\|\mu_m-\mu\|,$$

где $\mu=\mu_n-(E-K)\mu_n+(E-K)\mu_m$. Легко убедиться, что $\mu\in N_{m-1}$. Действительно,

$$(E-K)^{m-1}\mu=(E-K)^{m-1}\mu_n-(E-K)^m\mu_n+(E-K)^m\mu_m=0,$$

так как при $p>n$: $(E-K)^p\mu_n=(E-K)^{p-n}(E-K)^n\mu_n=(E-K)^{p-n}\cdot 0=0$, что, собственно, следует из включений $N_n\subset N_m$ при $m>n$. Отсюда, ссылаясь на неравенства (24), можем записать

$$\|K\mu_m-K\mu_n\|=\|\mu_m-\mu_n\|>\frac{1}{2},\mu\in N_{m-1},\mu\in N_m.$$

Выводом неравенства приходим к противоречию: с одной стороны, последовательность $\{K\mu_n\}$ компактна, а с другой — удовлетворяет неравенству $\|K\mu_m-K\mu_n\|>\frac{1}{2}$ при $m>n$. Полученное противоречие показывает, что допущение $N(\varepsilon-k)\neq\{0\}$ неверно и теорема доказана.

Теорема 5. *Если K — линейный вполне непрерывный оператор, то множество значений $V(E-K)$ оператора $E-K$ замкнуто в $C(\partial G)$ и оператор $E-K$ непрерывно обратим.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{v_n\}$ функций из ограниченного множества в $C(\partial G)$ принадлежит множеству значений $V(E-K)$ оператора $E-K$ и сходится к некоторой функции v_0 при $n\to\infty$. Для каждого значения индекса n найдется такая функция δ_n, что

$$\delta_n-K\delta_n=v_n.$$

Покажем, что $v_0\in V(E-K)$, а это, в свою очередь, и будет означать замкнутость множества $V(E-K)$. Если последовательность $\{\delta_n\}$ ограничена, то последовательность $\{K\delta_n\}$ компактна согласно теореме 2. Отсюда следует, что последовательность $\{\delta_n\}$ также компактна, потому что

$$\delta_n=v_n+K\delta_n,$$

где последовательность $\{v_n\}$ сходится по предположению, а последовательность $\{K\delta_n\}$ компактна. Вследствие компактности из последовательности $\{\delta_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\delta_{n_k}\}$, сходящуюся к δ_0. Переходя к пределу при $n_k\to\infty$ в равенстве

$$\delta_{n_k}-K\delta_{n_k}=v_{n_k},$$

получаем по непрерывности оператора K, что

$$\delta_0 - K\delta_0 = v_0,$$

т. е., элемент v_0 принадлежит множеству $V(E-K)$ и, следовательно, при ограниченности последовательности $\{\delta_n\}$ область значений $V(E-K)$ оператора $E-K$ замкнута. Вместе с тем, последовательность $\{\delta_n\}$ не может быть неограниченной, поскольку, как сказано в теореме 4, нуль-многообразие $N(E-K)$ оператора $E-K$ состоит из единственного элемента, равного нулю. Отсюда и из известной теоремы Банаха [3, 4] также следует, что оператор $E-K$ имеет обратный и поскольку $V(E-K)=C(\partial G)\setminus N(E-K)\equiv C(\partial G)$, то оператор $E-K$ непрерывно обратим в $C(\partial G)$.

Отметим свойство устойчивости решений интегрального уравнения (8) с большим ядром. Из теорем 4 и 5 следует

Теорема 6 (устойчивости). *Если непрерывные функции $v_i(x)\in C(\partial G)$, служащие правыми частями неоднородных линейных интегральных уравнений с оператором $A=E-K$, незначительно отличаются друг от друга в смысле выполнения неравенства*

$$\|v_1(x)-v_2(x)\|_C \le \varepsilon$$

при достаточно малом $\varepsilon>0$, то соответствующие им решения $\delta_i(x)$ этих уравнений представляют собой непрерывные функции $\delta_i(x)\in C(\partial G)$ и мало отличаются между собой, т. е. удовлетворяют условию

$$\|\delta_1(x)-\delta_2(x)\|_C \le c\varepsilon,$$

где $c<\infty$ — вполне определенная постоянная.

Доказательство. Так как однородное интегральное уравнение с оператором $A=E-K$ имеет в соответствии с теоремой 4 только тривиальные решения и оператор A по теореме 5 непрерывно обратим в $C(\partial G)$, то в этом пространстве существует обратный оператор A^{-1}, $A^{-1}A=AA^{-1}=E$, с ограниченной нормой $\|A^{-1}\|\le c<\infty$ и каждая из функций $\delta(x)$ как образ непрерывного отображения $\delta = A^{-1}v$ элементов $v\in C(\partial G)$ будет непрерывной. Это свойство отображения A^{-1} доказано в теореме 5. Из ограниченного отображения A^{-1} помимо того следует

$$\|\delta_1(x)-\delta_2(x)\|_C = \|A^{-1}v_1 - A^{-1}v_2\|_C \le \|A^{-1}\|\|v_1(x)-v_2(x)\| \le c\varepsilon$$

и теорема доказана.

Теоремы 2, 4, 5, впрочем как и предложения 1 и 3, гарантируют однозначную разрешимость интегрального уравнения (8) на $C(\partial G)$, а теоремы 3, 5 и 6, помимо этого, обеспечивают еще и устойчивость его решения, т. е. определяют классическую корректность сформулированной задачи. Остается указать способ отыскания этого решения. В основу способа положим построение "малого" ядра. В связи с этим представим ядро (9) компактного оператора K рассматриваемого интегрального уравнения в виде

$$k(x,\xi) = l(x,\xi) + s(x,\xi),$$

где

$$s(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} a_k(x)a_k(\xi),$$

является ядром конечного ранга, составленным из линейно независимых на ∂G функций $a_k(x)$, $k=1,2,\dots,m$. В качестве $a_k(x)$ возьмем такие функции, чтобы обеспечивалось неравенство

$$\|l(x,\xi)\|_C = \max_{x\in\partial G}\left|\int_{\partial G}[k(x,\xi)-s(x,\xi)]ds_\xi\right| < 1, \tag{25}$$

т. е. чтобы ядро $l(x,\xi)$ было малым. Уравнение (8) на основании введенного представления ядра принимает вид

$$\delta(x)+\int_{\partial G} l(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi=\varphi(x)-\int_{\partial G} s(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi, x\in\partial G. \tag{26}$$

В этом соотношении в отличие от уравнения (8) опущены для простоты индексы и вместо обозначений $\delta^{(i)}(x)$ и $\varphi^{(i)}(x)$ взяты $\delta(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно. Выражением

$$\delta(x)+\int_{\partial G} l(x,\xi)\delta(\xi)ds_\xi=f(x), x\in\partial G, \tag{27}$$

введем новую неизвестную функцию $f(x)$, $x\in\partial G$, и выразим через нее неизвестную плотность $\delta(x)$. Проще всего это сделать с использованием ряда Неймана для уравнения (27), которое при "заданной" функции $f(x)$ можно относительно функции $\delta(x)$ рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма второго рода с "малым" ядром $l(x,\xi)$ компактного интегрального оператора. В результате $(n+1)$-е приближение плотности $\delta(x)$ можно выразить через n-е ее приближение так:

$$\delta_{n+1}(x)=f(x)-\int_{\partial G} l(x,\xi)\delta_n(\xi)ds_\xi \; f(x)-\int_{\partial G} l_1(x,\xi)f(\xi)ds_\xi+\int_{\partial G} l_2(x,\xi)\delta_{n-1}(\xi)ds_\xi, \tag{28}$$

где

$$l_1(x,\xi)\equiv l(x,\xi),\; l_2(x,\xi)=\int_{\partial G} l(x,\eta)l(\eta,\xi)ds_\eta .$$

Введем в рассмотрение многомерную функцию Дирака $l_0(x,\xi)$, действующую на функции класса $C(\partial G)$ по правилу

$$(l_0,f)\equiv\int_{\partial G} l_0(x,\xi)f(\xi)ds_\xi=f(x), x\in\partial G,$$

а также "итерированные ядра" по формуле

$$l_k(x,\xi)=(-1)^k\int_{\partial G} l_{k-1}(x,\eta)l(\eta,\xi)ds_\eta=(-1)^k\int_{\partial G} l(x,\eta)l_{k-1}(\eta,\xi)ds_\eta,\quad k=1,2,3,\ldots,$$

и запишем на основании соотношения (28) выражение искомой плотности $\delta(x)$ через неизвестную функцию $f(x)$ в виде ряда

$$\delta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{\partial G} l_k(x,\xi)f(\xi)ds_\xi. \tag{29}$$

Ряд (29) сходится, так как ядро $l(x,\xi)$ удовлетворяет неравенству (25).

Подставим полученное выражение плотности в правую часть соотношения (26). Ссылаясь при этом на обозначение (27), получаем для введенной неизвестной функции $f(x)$, $x\in\partial G$, интегральное уравнение

$$f(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{\partial G} s(x,\xi)ds_\xi\int_{\partial G} l_k(\xi,\eta)ds_\eta=\varphi(x), x\in\partial G.$$

Преобразуем это уравнение с учетом того, что $s(x,\xi)$ является ядром конечного ранга. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{\partial G} s(x,\xi)l_k(\xi,\eta)ds_\xi=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(\eta)=r(x,\eta),$$

где обозначено

$$b_i(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_{\partial G}a_i(\xi)l_k(\xi,\eta)ds_\xi.$$

Таким образом, для определения новой неизвестной функции $f(x)$, $x\in\partial G$, получено линейное интегральное уравнение второго рода:

$$f(x)+\int_{\partial G}r(x,\xi)f(\xi)ds_\xi=\varphi(x),x\in\partial G, \tag{30}$$

с вырожденным ядром $r(x,\xi)$ интегрального оператора. Это уравнение эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений. В самом деле, принимая функционалы

$$z_i=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}b_i(\xi)f(\xi)ds_\xi,\ i=1,2,\ldots,m,$$

за неизвестные компоненты вектора $z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)^*$, выражая через эти неизвестные функцию $f(x)$ в базисе $\{a_k(x)\}$

$$f(x)=\varphi(x)-\sum_{k=1}^{m}a_k(x)z_k \tag{31}$$

и подставляя последнее выражение в уравнение (30), получаем

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\left(z_i+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}z_j\int_{\partial G}a_j(\xi)b_i(\xi)ds_\xi\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\int_{\partial G}b_i(\xi)\varphi(\xi)ds_\xi.$$

Для функционалов в этом выражении введем следующие обозначения:

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}a_j(\xi)b_i(\xi)ds_\xi,$$

$$b_i=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial G}b_i(\xi)\varphi(\xi)ds_\xi,$$

$$a_{ij}=\begin{cases}1+\alpha_{ij},i=j,\\ \alpha_{ij},i\neq j\end{cases}$$

и перепишем его в более обозримом виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_i(x)a_{ij}z_j=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i$$

Поскольку функции $a_i(x)$, $i=1,2,\ldots,m$, выбраны изначально линейно независимыми, то выражения при одинаковых функциях $a_i(x)$ должны равняться друг другу в приведенном соотношении, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}z_j=b_i,i=1,2,\ldots,m.$$

Таким образом, задача (8) решения линейного интегрального уравнения второго рода с "большим ядром" (21) относительно неизвестной плотности $\delta(x)$, $x\in\partial G$, сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Az=b \tag{32}$$

с квадратной матрицей $A=(a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{m}$ и m-мерным вектором $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ свободных членов. Решение $z=(z_1,z_2,\ldots,z_m)^*$ системы (32), если оно существует, дает возможность восстановить по формуле (31) функцию $f(x)$, $x \in \partial G$, и, следовательно, решение $\delta(x)$, $x \in \partial G$, исходного интегрального уравнения (8), которое, в свою очередь, однозначно, представляется сходящимся рядом (29) функционалов от итерированных "малых ядер" $l_k(x,\xi)$ и функции $f(x)$.

Теорема 7. *Система линейных алгебраических уравнений* $Az=b$, *возникающая в задаче определения непрерывной плотности* $\delta(x)$, $x \in \partial G$, *возмущающего потенциала (7) из линейного интегрального уравнения (8) с большим ядром компактного оператора, разрешима однозначно.*

Доказательство. Предположим, что определитель $\det A$ системы (32) равен нулю, $\det A = 0$, и, следовательно, ранг матрицы системы $\operatorname{rang} A = r < m$. В этом случае система (32) будет иметь $n = m - r$ линейно независимых решений $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \ldots, z_m^{(i)})^*$, $i = 1,2,\ldots,n$, а общее ее решение z, как известно [5], будет зависеть от n произвольных постоянных c_i, т. е.

$$z = z^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} c_i z^{(i)},$$

где $z^{(0)}$ — частное решение системы, обладающее наименьшей нормой и удовлетворяющее условиям $(z^{(0)}, z^{(i)}) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Поэтому и функция $f(x)$, $x \in \partial G$, определяемая формулой (31), будет зависеть от произвольных параметров c_i. Значит и плотность $\delta(x)$, задаваемая рядом (29), вопреки утверждению теорем 1 или 4, была бы неоднозначной функцией. Корректность приведенных рассуждений была бы нарушена, если бы ядро конечного ранга $s(x,\xi)$ выражалось через линейно зависимые функции $a_k(x)$, $k = 1,2,\ldots,m$. Но в принятой конструкции такое не допускается. Поэтому предположение о том, что однородная система линейных алгебраических уравнений, отвечающая системе (32), имеет отличные от тривиального решения, неверно (что и убеждает в справедливости теоремы).

Перейдем теперь к обоснованию предложенного способа восстановления потенциала притяжения $V(x)$ по значениям модуля его градиента $q(x)$ при условии, что искомый потенциал близок к заданному нормальному потенциалу притяжения $\Phi(x)$, $x \in \overline{G}^+$. Другими словами, покажем, что задача (2), сформулированная в виде последовательности внешних линейных граничных задач Неймана для уравнения Лапласа, разрешима однозначно. Метод будет обоснован, если будет доказана сходимость вычисляемых приближений $V^{(i)}(x)$, $i = 0,1,\ldots,\infty$, к непрерывной ограниченной функции $V(x)$, $x \in \overline{G}^+$. В свою очередь, сходимость приближений $V^{(i)}(x)$ будет определена , если удастся установить сходимость последовательности $\{T^{(i)}(x)\}$ приближений возмущающего потенциала $T(x)$, вычисляемых в виде решений последовательности граничных задач (6) — (7). Действительно, если будет показано, что последовательность $\{T^{(i)}(x)\}$ сходится к предельной функции $T(x)$, то по определению будет следовать сходимость последовательности $\{V^{(0)}(x) + T^{(i)}(x)\}$ к потенциалу притяжения $V(x)$ в любой точке x неограниченной области $\overline{G}^+$. Обозначим через

$$\varepsilon^2(x) = \frac{|\nabla T(x)|^2}{|\nabla \Phi(x)|^2} = \frac{\sum_{k=1}^{3} (\partial^k T(x))^2}{\sum_{k=1}^{3} (\partial^k \Phi(x))^2}$$

квадрат отношения модуля градиента возмущающего потенциала $T(x)$ к модулю градиента нормального $\Phi(x)$, $x \in G^+$.

Теорема 8. *Если функция* $\varepsilon^2(x)$ *пренебрежимо мала по сравнению с функцией* $\varepsilon(x)$, *то последовательность* $\{T^{(i)}(x)\}$ *решений* $T^{(i)}(x)$ *граничных задач (6) — (7) сходится к возмущающему потенциалу* $T(x)$ *области* G^-.

Доказательство. Достаточно установить, что сходится последовательность $\{\delta^{(i)}(x)\}$ плотностей потенциалов $T^{(i)}(x)$, ибо сходимость последней, как это видно из представления (7), влечет за собой сходимость последовательности $\{T^{(i)}(x)\}$. А чтобы установить сходимость последовательности $\{\delta^{(i)}(x)\}$, воспользуемся утверждением теоремы 5 о том, что оператор

$$A\delta^{(i)}=(E-K)\delta^{(i)}=\varphi^{(i)}\equiv\delta^{(i)}(x)+\int\limits_{\partial G}k(x,\xi)\delta^{(i)}(\xi)ds_{\xi}=\varphi^{(i)}(x)$$

каждой из задач (8), или, что то же самое, задач (6) — (7), непрерывно обратим в и, следовательно, ограничен на любом ограниченном подмножестве этого пространства. Это, в свою очередь, означает, что существует такая постоянная $0<c<\infty$, что норма обратного оператора A^{-1} к оператору A удовлетворяет неравенству $\|A^{-1}\|<c$ для всех конечных приближений $\delta^{(i)}\in C(\partial G)$. Заметим тут же, что конкретная оценка нормы $\|A^{-1}\|$ может быть при необходимости найдена в зависимости от определенных функционалов над функциями $a_i(x)$, $k(x,\xi)$, $f(x)$ и $\varphi^{(i)}(x)$, часть из которых $\{k(x,\xi),\varphi^{(i)}(x)\}$ задана непосредственно, а часть $\{a_i(x),f(x)\}$ вводится в связи с реализацией решения интегрального уравнения (8) с большим ядром. В данном рассмотрении конкретная оценка нормы $\|A^{-1}\|$ нас не интересует. Достаточно предположить, что она существует и записать на этом основании следующее очевидное неравенство:

$$\left\|\delta^{(i+1)}(x)-\delta^{(i)}(x)\right\|_C\le c\left\|\varphi^{(i+1)}(x)-\varphi^{(i)}(x)\right\|_C, \tag{33}$$

которое с учетом определения функции $\varphi^{(i)}(x)$ в виде (10) можно переписать так:

$$\left\|\delta^{(i+1)}(x)-\delta^{(i)}(x)\right\|\le c\left(\left\|q^{(i+1)}(x)\right\|\left\|\cos(\mathbf{e}_{i+1},\mathbf{m})-\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})\right\|+\left\|\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})\right\|\left\|q^{(i+1)}(x)-q^{(i)}(x)\right\|\right),$$

где для простоты индекс нормы опущен.

В рассматриваемой оценке приближения $q^{(k)}(x)$ модуля градиента потенциала притяжения $V(x)$ определяются выражением (5), в котором на первых порах будем различать приближение $q^{(k)}(x)$ модуля, вычисленное на k-м шаге процесса непосредственно по формуле (5) и стоящее слева равенства, а также приближение $q^{(k-1)}(x)$, вычисляемое по формуле

$$q^{(k-1)}(x)=\left(\sum_{j=1}^{3}\left[\partial_jV^{(k-1)}(x)\right]^2\right)^{1/2}, \tag{34}$$

при определении на предыдущем $(k-1)$-м шаге приближения

$$\cos(x_j,\mathbf{e}_{k-1})=\left[q^{(k-1)}(x)\right]^{-1}\partial_jV^{(k-1)}(x) \tag{35}$$

направляющего косинуса и определяющее наряду с другими величинами подкоренное выражение справа равенства (5). Первое приближение в отличие от второго обозначим через $\tilde q^{(k)}(x)$. В соответствии с этим соглашением перепишем предыдущее неравенство в виде

$$\left\|\delta^{(i+1)}(x)-\delta^{(i)}(x)\right\|\le c\left(\left\|\tilde q^{(i+1)}(x)\right\|\left\|\cos(\mathbf{e}_{i+1},\mathbf{m})-\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})\right\|+\left\|\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})\right\|\left\|\tilde q^{(i+1)}(x)-\tilde q^{(i)}(x)\right\|\right) \tag{36}$$

и подвергнем его исследованию.

Покажем, прежде всего, что первым слагаемым в правой части этого неравенства можно пренебречь как величиной порядка $\varepsilon^2(x)$. В соответствии с определениями (4), (11) и (35) имеем

$$\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m}) = \sum_{k=1}^{n}\cos(\mathbf{e}_i,x_k)\cos(x_k,\mathbf{m}) = \left[q^{(i)}(x)\right]^{-1}\sum_{k=1}^{3}\left[\partial_k \Phi(x) + \partial_k T^{(i)}(x)\right]\cos(x_k,\mathbf{m}) =$$

$$= \chi^{-1}(x)\left[q^{(1)}(x)\right]^{-1}\left[\cos(\ ,\mathbf{m}) + \chi^{-1}(x)\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial m}\right].$$

Далее, из выражения (34) легко находим

$$q^{(i)}(x) = \left(\chi^2(x) + 2\chi(x)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial x_k}\cos(x_k,\mathbf{m}) + \left|\nabla T^{(i)}(x)\right|^2\right)^{1/2} = \chi(x)\left(1 + \chi^{-1}(x)\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial \varepsilon}\right) + o(\varepsilon^2(x)), \tag{37}$$

где

$$o(\varepsilon^2(x)) = \chi^{-2}(x)\left[\left|\nabla T^{(i)}(x)\right|^2 - \left(\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2\right]$$

и, помимо этого,

$$\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial m} = \cos(\varepsilon,\mathbf{m})\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial \varepsilon}.$$

На основании полученных соотношений

$$\cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m}) = \cos(\varepsilon,\mathbf{m})\left[1 - \chi^{-2}(x)\left(\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2\right]. \tag{38}$$

Отсюда с учетом не требующего пояснения сравнения

$$\chi^{-2}(x)\left(\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2 = o(\varepsilon^2(x))$$

окончательно получаем требуемый результат:

$$\left\|\tilde{q}^{(i+1)}(x)\right\|\left\|\cos(\mathbf{e}_{i+1},\mathbf{m}) - \cos(\mathbf{e}_i,\mathbf{m})\right\| =$$

$$= \frac{\left\|\tilde{q}^{(i+1)}\right\|}{\chi(x)}\frac{\cos(\varepsilon,\mathbf{m})}{\chi(x)}\left[\left(\frac{\partial T^{(i-1)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2 - \left(\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2\right] + o(\varepsilon^2(x)) = o(\varepsilon^2(x)). \tag{39}$$

Перейдем теперь к оценке разности $\left\|\tilde{q}^{(i+1)}(x) - \tilde{q}^{(i)}(x)\right\|$ и начнем с установления зависимости между приближениями $\tilde{q}^{(k)}(x)$ и $\tilde{q}^{(k-1)}(x)$. Согласно представлению (5)

$$\tilde{q}^{(k)}(x) = g(x) - \omega^2 g(x)[q^{(k-1)}(x)]^{-1}\sum_{j=1}^{2}x_j\partial_j V^{(k-1)}(x) + o(\varepsilon^2(x)) =$$

$$= g(x) - \omega^2\frac{g(x)}{\chi\quad (x)}\left(1 - \chi^{-1}(x)\frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2\sum_{j=1}^{2}x_\xi\left[-\cos(x_j,\varepsilon) + \chi^{-1}(x)\partial_j T^{(k-1))}(x)\right] + o(\varepsilon^2(x)).$$

А так как, очевидно,

$$\partial_j T^{(k-1)}(x) = \cos(x_j,\varepsilon)\frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial \varepsilon},$$

то

$$\tilde{q}^{(k)}(x) = g(x) - \frac{\omega^2\sum_{j=1}^{3}x_j\cos(x_j,\varepsilon)}{\chi(x)}g(x)\left(1 - \chi^{-1}(x)\frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial \varepsilon}\right)^2\left(1 + \chi^{-1}(x)\frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial \varepsilon}\right) + o(\varepsilon^2(x)).$$

Попутно заметим, что входящая в приведенное выражение величина

$$\frac{\omega^2 \sum_{j=1}^{2} x_j \cos(x_j, \varepsilon)}{\chi(x)}$$

является отношением проекции центробежной силы на нормаль $\varepsilon(x)$ к эквипотенциальной поверхности $\partial \Phi_x : \Phi(y) = c_x$ в точке x к нормальной силе притяжения в этой же точке. Из полученного выражения определяем, с одной стороны, что

$$\tilde{q}^{(k)}(x) = g(x) - \frac{\omega^2 \sum_{j=1}^{2} x_j \cos(x_j, \varepsilon)}{\chi(x)} g(x) \left(1 - \chi^{-1}(x) \frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial \varepsilon} \right) + o(\varepsilon^2(x)), \tag{40}$$

а с другой —

$$\tilde{q}^{(k)}(x) = g(x) - \omega^2 \sum_{j=1}^{2} x_j \cos(x_j, \varepsilon)\ g(x) \left[q^{(k-1)}(x) \right]^{-1} + o(\varepsilon^2(x)), \tag{41}$$

Теперь, ссылаясь на представление (40), не составляет труда вычислить разность

$$\tilde{q}^{(k+1)}(x) - \tilde{q}^{(k)}(x) = \frac{\omega^2 \sum_{j=1}^{2} x_j \cos(x_j, \varepsilon)}{\chi(x)} \frac{g(x)}{\chi(x)} \left[\frac{\partial T^{(k)}(x)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial \varepsilon} \right] + o(\varepsilon^2(x)) =$$

$$= \frac{\omega^2 \sum_{j=1}^{2} x_j \cos(x_j, \varepsilon)}{\chi(x)} \frac{g(x)}{\chi(x)} \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \left[\frac{\partial T^{(k)}(x)}{\partial e_{k-1}} \frac{\partial e_{k-1}}{\partial m} - \frac{\partial T^{(k-1)}(x)}{\partial e_{k-2}} \frac{\partial e_{k-2}}{\partial m} \right] + o(\varepsilon^2(x)) =$$

$$= \frac{\omega^2 \sum_{j=1}^{2} x_j \cos(x_j, \varepsilon)}{\chi(x)} g(x) \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \left[q^{(k)}(x) \cos(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{m}) - q^{(k-1)}(x) \cos(\mathbf{e}_{k-2}, \mathbf{m}) \right] + o(\varepsilon^2(x)).$$

Принимая во внимание зависимость (41) между приближениями $\tilde{q}^{(k)}(x)$ и $q^{(k-1)}(x)$, рассматриваемую разность перепишем следующим образом:

$$\tilde{q}^{(k+1)}(x) - \tilde{q}^{(k)} = \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \left[\tilde{q}^{(k)}(x) \cos(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{m}) - \tilde{q}^{(k-1)}(x) \cos(\mathbf{e}_{k-2}, \mathbf{m}) \right] + o(\varepsilon^2(x)) =$$

$$= \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \left[\varphi^{(k)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x) \right] + o(\varepsilon^2(x)). \tag{42}$$

Таким образом, неравенство (33) с учетом условия теоремы и выражений (36), (39) и (42) можно представить в виде цепочки индуктивных неравенств:

$$\left\| \delta^{(i+1)}(x) - \delta^{(i)}(x) \right\| \le c \left\| \varphi^{(i+1)}(x) - \varphi^{(i)}(x) \right\| \le c \left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right| \left| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{m}) \right| \left\| \varphi^{(i)}(x) - \varphi^{(i-1)}(x) \right\| \le$$

$$\le c \left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right|^2 \ \left| \cos(\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{m}) \right| \ \left| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{m}) \right| \ \left\| \varphi^{(i-1)}(x) - \varphi^{(i-2)}(x) \right\| \le \cdots \le$$

$$\le c \left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right|^k \left| \cos(\mathbf{e}_{i-k+1}, \mathbf{m}) \right| \left| \cos(\mathbf{e}_{i-k}, \mathbf{m}) \right| \cdots \left| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{m}) \right| \left\| \varphi^{(i-k+1)}(x) - \varphi^{(i-k)}(x) \right\| \le$$

$$\le \cdots \le c \left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right|^i \prod_{k=1}^{i+1} \left| \cos(\mathbf{e}_{i-k+1}, \mathbf{m}) \right| \left\| \varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(0)}(x) \right\|,$$

что на основании зависимости (38) можно переписать так:

$$\left\| \delta^{(i+1)}(x) - \delta^{(i)}(x) \right\| \le c \left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right|^{2i+1} \left\| \varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(0)}(x) \right\|.$$

Следовательно, последовательность $\left\{ \delta^{(1)}(x) \right\}$ довольно быстро сходится в себе (по метрике $C(\partial G)$), если $\left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right| < 1$. В то же время, когда $\left| \cos(\varepsilon, \mathbf{m}) \right| = 1$, т. е. когда направление внутренней нормали $\varepsilon(x)$ к эквипотенциальной поверхности $\partial\Phi_x\colon \Phi(\varsigma)=c_x$ совпадает (или ему противоположно) с направлением нормали $\mathbf{m}(x)$ к поверхности ∂G в точке x, тогда наша задача сводится к хорошо изученной задаче Неймана для уравнения Лапласа и, естественно, может быть решена с помощью классической процедуры. Исключая этот случай из рассмотрения (как неинтересный и практически нереальный в данной ситуации) и возвращаясь к последовательности $\{\delta^{(i)}(x)\}$, заметим, наконец, что из сходимости в себе элементарно следует ее сходимость к единственному пределу $\delta(x)$, однозначно по формуле типа (7) определяющему возмущающий потенциал $T(x)$, а следовательно, и искомый потенциал притяжения $V(x)$. Этим замечанием завершается доказательство теоремы.

Замечание. Доказательство теоремы не изменится, если не различать функции $\tilde{q}^{(k)}(x)$ и $q^{(k-1)}(x)$ в формуле (5) для приближений модуля градиента потенциала притяжения, поскольку одно из них нельзя считать "строго динамическим", а другое — "строго статическим". В самом деле, если хотя бы одно из приближений $q^{(k)}(x)$, $k>0$, (а не все) получено по формуле (5), а последующие — по формуле (34), то на основании представления (37) сразу же находим

$$q^{(i+1)}(x)-q^{(i)}(x)=\cos(\varepsilon,\mathbf{m})\left[\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial m}-\frac{\partial T^{(i-1)}(x)}{\partial m}\right]+o(\varepsilon^2(x))=$$

$$=\cos(\varepsilon,\mathbf{m})\left[\frac{\partial T^{(i)}(x)}{\partial e_{i-1}}\frac{\partial e_{i-1}}{\partial m}-\frac{\partial T^{(i-1)}(x)}{\partial e_{i-2}}\frac{\partial e_{i-2}}{\partial m}\right]+o(\varepsilon^2(x))=$$

$$=\cos(\varepsilon,\mathbf{m})(\varphi^{(i)}(x)-\varphi^{(i-1)}(x))+o(\varepsilon^2(x)).$$

Отсюда с учетом представления (33) убеждаемся в справедливости сформулированной теоремы.

Список литературы

1. *Черный А. В., Якимчик А. И.* Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. 1 // Геофиз. журн. — 1999. — **21**, № 3. — С. 55—72.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
4. *Рис Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 592 с.
5. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959. — 232 с.