

*Светлой памяти
Мераба Александровича Алексидзе,
талантливейшего грузинского математика и
геофизика, человека глубоко интеллигентного
с чувством справедливости, посвящается*

Восстановление потенциала по значениям модуля его градиента. 1

© А. В. Черный, А. И. Якимчик, 1999

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина
Поступила 17 сентября 1998г.

Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко

Викладено коротку історію дослідження проблеми. Подано характеристику сили тяжіння. Доведено, що за значеннями модуля градієнта потенціалу неможливо сконструювати точні граничні умови для будь-якої лінійної класичної задачі теорії потенціалу, в тому числі, і для задачі Стокса — Молоденського для рівняння Лапласа. Показано, що похибка трансформацій аномалій модуля градієнта потенціалу як гармонічних функцій залежить від кривизни екві-потенціальних поверхонь поля, амплітуди аномалій та розміру області, в якій виконується трансформація. Стверджується, що методи обробки та інтерпретації гравітаційних і аеромагнітних аномалій, розвинуті на підставі теорії гармонічних функцій і успішно використовувані у розвідувальній геофізиці, можуть бути мало ефективними при дослідженні глибинної регіональної структури Землі. Запропоновано нову постановку нелінійної граничної задачі для відновлення потенціалу притягування (або магнітного) в необмеженій замкнутій області за значеннями модуля його градієнта на границі області при умові близькості цього потенціалу до заданого. Рекомендовано спосіб розв'язку задачі у вигляді послідовності розв'язків задач Неймана для рівняння Лапласа, що визначає збурюючий потенціал.

The history of the problem investigation is briefly described. Gravity is characterized. It is proven that no accurate boundary conditions can be deduced for any linear classical problem of the potential theory (including the problem of Stox — Molodensky for the Laplace equation) from the potential gradient module values. It is shown that the error of the transformations of the potential gradient module anomalies as harmonic functions depends on the curvature of the equipotential surfaces of the field, the amplitude of the anomalies and the measure of the domain in which the transformation is made. It is stated that the methods of processing and interpreting gravity and aeromagnetic anomalies developed on the basis of the theory of harmonic functions and successfully used in exploration geophysics may appear to be ineffective in studying the deep regional structure of the Earth. To pass through the crisis we propose a new definition of a non-linear boundary problem of recovering the attraction (or magnetic) potential in an unbounded closed domain from the values of the module of its gradient at the boundary of the domain provided the potential is similar to the given one. A method is proposed to solve the problem in a succession of the solutions of the Neumann's problems for the Laplace equation which determines the disturbing potential.

Для решения важных теоретических и прикладных задач наук о Земле, возникающих при изучении ее фигуры, внутреннего ее строения, глубинных геодинамических процессов и т. п., а также задач, связанных с движением искусственных аппаратов в околоземном пространстве, требуется знать распределение значений потенциала силы тяжести, значений градиента этого потенциала или же значений модуля этого градиента. Такое распределение можно получить на основании фундаментальных свойств функций, описывающих гравитационное взаимодействие, и данных измерений. Свойства потенциала и его производных хорошо изучены. Создана общая теория для восстановления

потенциала в глобальной области по следам потенциала или следам его производных на границе области. К сожалению, мы не располагаем точными граничными данными для реализации классической схемы восстановления в глобальной области потенциала в виде решения одной из граничных задач Дирихле, Неймана или смешанной для уравнения Лапласа. В самом деле, до сей поры не найдено способа измерения гравитационного (или магнитного) потенциала, а измерения его производных на поверхности Земли слишком дорого стоят. В то же время накоплены в больших объемах данные гравиметрических и аеромагнитных наблюдений, представляющие собой значения

модуля градиента соответствующего потенциала. Поэтому в классических задачах эти данные могут быть использованы лишь в качестве приближенных граничных условий, что обеспечивает в конечном счете определение потенциала с гарантированной точностью только в локальной области достаточно малой меры. Попытки восстановления потенциала в глобальной области на этом пути обречены на неудачу. Связано это с тем, что решения соответствующих граничных задач определяются в каждой малой области с точностью до некоторой неопределенной постоянной, зависящей непосредственно от размеров и формы малой области. Поэтому для "склеивания" локальных решений отсутствуют какие-либо разумные критерии.

В статье предлагается один из способов восстановления потенциала притяжения в неограниченной замкнутой области по значениям модуля его градиента на границе области при условии близости потенциала к заданному.

История проблемы. Задача восстановления потенциала в глобальной области по тем или иным граничным данным возникла в связи с определением фигуры Земли и на протяжении длительного времени волновала умы выдающихся математиков. Первой в этом направлении была сформулирована смешанная граничная задача для уравнения Лапласа. Уже со времен И. Ньютона (1687 г.) стало ясно, что притяжение Земли зависит от ее общей формы. Эта зависимость конкретизировалась в трудах А. Клеро (1743 г.) по фигурам равновесия в виде сфероидов, которые и поныне составляют фундамент геодезической гравиметрии [1, 2]. По прошествии более ста лет проблемой заинтересовался Дж. Стокс [3] и нашел на основании решения определенной граничной задачи потенциала не только сжатие сфероида А. Клеро, но и определил локальные отклонения эквипотенциальной поверхности от базисного сфероида, которому соответствует нормальная сила тяжести. По-видимому, Дж. Стоксу принадлежит и вывод граничного условия задачи. Поэтому естественно называть ее задачей Стокса для уравнения Лапласа. Работа Дж. Стокса, несмотря на крупное достижение, оставалась не замеченной. Иначе как объяснить, что ее результаты повторены спустя много лет Г. Брунсом (в 1878 г.) и крупнейшим математиком конца прошлого и начала текущего столетий А. Пуанкаре (в 1901 г.) [4]. Проблему изучали также К. Гаусс и Ф. Бессель. В результате была сформулирована окончательно и для оп-

ределенного класса областей решена третья или смешанная граничная задача для уравнения Лапласа. Следует тут же заметить, что при выводе граничного условия этой проблемы, как задачи геодезической гравиметрии, игнорировалось несовпадение измеренных на земном рельефе значений силы тяжести с теми, которые применялись в качестве граничных. На это несовпадение обратил внимание еще А. Пуанкаре, однако из-за сложности вовсе не учитывал в своих рассуждениях. Начиная с 1945 г. М. С. Молоденский опубликовал цикл работ [5, 6], в которых глубоко проанализировал классическую постановку граничной задачи и переистолковал ее в новом свете, что способствовало преодолению принципиальных затруднений стоксовской теории. В рамках данного истолкования в отличие от классических требований граничное условие задачи задавалось не "на уровне моря", а непосредственно на физической поверхности Земли. Однако условие М. С. Молоденского оказалось также приближенным соотношением. Оно хотя и было хорошо приспособлено для вычисления потенциала в локальной области, но не гарантировало точность его определения в глобальной области.

Второй подход в задаче восстановления потенциала указал К. Юнг [7]. Рассматривая аномалии силы тяжести с точки зрения прикладной геофизики, т. е. аномалии, закартированные на небольших участках земной поверхности и обусловленные неглубоко расположенными источниками, он рекомендовал считать их в первом приближении значениями "вертикальной" составляющей притяжения возмущающего тела. Другими словами, он предлагал заменить граничные данные в виде значений модуля градиента потенциала значениями гармонической функции. И хотя при этом специально не оговаривалось, что погрешность от такой подмены будет расти вместе с размерами области, где сосредоточены аномалиеобразующие объекты, такое толкование гравитационных (и магнитных) аномалий в эпоху становления геофизических методов поиска и разведки полезных ископаемых открыло широчайшие возможности в разработке теории интерпретации данных наблюдений. Эти возможности связывались с досконально развитой к тому времени теорией гармонических и аналитических функций. И с тех пор граничные задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа заняли центральное место в разработке теории прямых и обратных задач грави-

магниторазведки. В рамках этих представлений сразу же появились основополагающие результаты. Среди них работы Б. В. Нумерова по "контактной поверхности" [8], П. С. Новикова по однозначному определению формы источника аномалии в классе финитных звездных тел [9], Л. Н. Сретенского по определению границы возмущающего тела, близкого к шару [10], А. А. Заморева [11 — 13], А. Н. Тихонова [14], Б. А. Андреева [15], И. М. Рапопорта [16] и др. В этих работах были поставлены и частично решены, а иногда только обозначены главнейшие проблемы теории интерпретации данных геофизических измерений, среди которых выделялись проблемы фильтрации и разделения суммарных полей на составляющие, обнаружения и локализации источников полей, разрешимости обратных задач потенциала, сформированных в виде соответствующих линейных или нелинейных уравнений. Поднятые А. А. Заморевым [11] проблемы обнаружения, разделения и локализации потенциальных полей развивались впоследствии многими исследователями [17, 18], среди которых М. Г. Сербуленко [19], В. Н. Страхов [20], М. А. Алексидзе и К. М. Картвелишвили [21], К. И. Соколовский [22], А. В. Черный и В. С. Гольцев [23] получили самые заметные результаты. С конца 50-х годов интенсивно изучались проблемы разрешимости обратных задач потенциала [24 — 26], а вскоре видные математики современности М. М. Лаврентьев [27, 28], В. К. Иванов [29] и А. Н. Тихонов [30] создали теорию решения условно-корректных задач методами регуляризации. В рамках этой теории крупных успехов в исследовании проблем существования, единственности и устойчивости решений обратных задач достигли А. И. Прилепко [31], В. Н. Страхов [20, 32 — 34], А. В. Цирульский [35, 36], В. Г. Чередниченко [37] и А. В. Черный [38]. Триумф теории увенчался широчайшим ее использованием в практике интерпретации геофизических данных, где успехи в разработке численных методов и алгоритмов решения задач сопутствовали В. Б. Гласко [39], В. И. Старостенко [40], С. М. Оганесяну [41], П. И. Балку [42], Е. Г. Булаху [43], Г. Я. Голлиздре [44], А. И. Кобрунову [45], И. Н. Корчагину [46] и др.

Увлечение современной теорией, построенной, главным образом, на базе линейных граничных задач потенциала, гармонических и аналитических функций с привлечением идей и методов функционального анализа и математического программирования, вычислительной

математики, теории вероятностей и математической статистики, было настолько сильным, что в крупном исследовании М. А. Алексидзе задачи редуцирования значений силы тяжести [47] осталось практически без внимания одно чрезвычайной важности замечание. Оно состояло в том, что аномалии силы тяжести, воспринимавшиеся всеми с выходом работы К. Юнга [7] как гармонические функции, такими по существу не являются. Поэтому аппроксимации с гарантированной точностью аномалий гармоническими функциями могут быть выполнены только в локальных, а не в глобальных областях. Отсюда, между прочим, уже следовало, что идеи и методы созданных теорий, несмотря на их привлекательное разнообразие и общность, дают возможность эффективно и с высокой точностью решать по заданным аномалиям ту или иную прикладную задачу исключительно в рамках областей достаточной малой меры. Исходя из этого принципа, М. А. Алексидзе предложил оригинальный подход к решению проблемы приближенного редуцирования силы тяжести в виде решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в специально построенной локальной области с приближенными граничными данными. Тем самым был указан один из возможных, хотя и не лучший, способ использования методов и алгоритмов разработанной теории при решении прикладных задач по гравиметрическим и аэромагнитным измерениям. Однако он не был воспринят широкой аудиторией геофизиков. Методы и алгоритмы гравиметрической и аэромагнитной разведки, ориентированные, в основном, на истолкование слабо интенсивных аномалий на небольших участках земной поверхности, связанных с неглубоко залегающими источниками, стали широко применяться с конца 50-х годов текущего столетия для изучения глубинных слоев и неоднородностей коры и мантии Земли. Вошли в моду, особенно в последнее время, построения различных глубинных разрезов по гравитационным, аэромагнитным и другим данным, значение которых не осознано еще до конца. Думается, что необоснованное перенесение постулатов теории из области гравиразведки в область изучения коры и мантии Земли, когда по аномалиям силы тяжести "обнаруживают" всякого рода неоднородности, расположенные на глубинах вплоть до 600 км, не только бесполезно, но и вредно. Вредно потому, что вводит в заблуждение огромную аудиторию исследователей недр Земли, которые принимают на веру любые

геофизические построения. Бесплезно потому, что добытые "сведения" методами теории линейных граничных задач потенциала из данных замеров модуля градиента потенциала могут значительно уклоняться от истинной структуры. Уклонение будет тем значительнее, чем больше размеры изучаемой области. Не исправит положение использование различного рода редукций типа так называемых "норм", поскольку для объединения даже пересекающихся между собой локальных областей отсутствуют какие-либо разумные критерии. В связи с этим представляются бессмысленными горячие дискуссии, нередко разгорающиеся вокруг тех или иных моделей глубинного строения какого-нибудь региона, выполненных специалистами различных школ и группировок. И тем не менее состояние дел не меняется. Кризисная ситуация, сложившаяся в результате несоответствия возможностей линейной аппроксимации аномалий, до сей поры не осознана не только интерпретаторами, но и теоретиками, которые вопреки исследованиям М. А. Алексидзе упорно не желают видеть "белые пятна" в проблемах использования аксиом и методов теории линейных граничных задач потенциала для истолкования аномалий модуля градиента потенциала.

Нелинейная граничная задача определения потенциала по значениям модуля его градиента, позитивное решение которой сняло бы все накопившиеся проблемы и затруднения, и поныне не занимает подобающего ей места среди насущных проблем современной теории интерпретации геофизических измерений. Как отмечалось, впервые ее обнаружил М. А. Алексидзе и дал приближенное ее решение. В его исследовании [47] задача формулировалась для точного уравнения в виде уравнения Лапласа и приближенных граничных данных в виде измеренных значений силы тяжести на ограниченном участке земного рельефа, составляющем одну из частей границы локальной области, для которой ставилась задача, и "угаданных" значений силы тяжести на других ограничивающих область гранях. Несколько лет спустя А. В. Черный предложил два других способа решения проблемы [38, 48 — 54]. Отправным пунктом одного из них был избран вывод линейного дифференциального уравнения [49], которому удовлетворяли в глобальной области значения модуля градиента потенциала и которое оказалось уравнением типа уравнения Клейна — Гордона с переменным коэффициентом, характеризующим кривизну поля.

Для этого уравнения рассмотрены способы определения его фундаментального решения [38 — 50], с помощью которого построены обобщенные потенциалы объемных масс, простого и двойного слоев. Интегральное представление потенциала двойного слоя использовано для решения граничной задачи типа задачи Дирихле для уравнения силы тяжести в глобальной области с данными на поверхности Ляпунова [38, 51]. К сожалению, предложенный способ оказался также приближенным вследствие того, что граничная задача изначально ставилась для приближенного уравнения и точных граничных данных. Дело в том, что переменный коэффициент уравнения силы тяжести, для которого построена теория, известен только своими первыми приближениями, характеризующими кривизны (нормальных) полей заданной конфигурации, в том числе полей с эквипотенциальными поверхностями в виде семейств концентрических сфер или конфокальных эллипсоидов. Эти приближения хотя и позволяют описать аномалии силы тяжести Земли с точностью более высокой, чем в классической схеме [52, 53], однако не дают возможности вычислять в глобальной области необходимые преобразования аномалий с любой наперед заданной точностью. Для преодоления этих затруднений был создан еще в работе [48] метод последовательного уточнения коэффициента уравнения, который впоследствии был развит как точный метод последовательного восстановления потенциала притяжения по значениям модуля его градиента при условии, что восстанавливаемый потенциал не слишком уклоняется от заданного. Этот второй способ решения проблемы конспективно изложен в работах [38, 48, 54] и пополняется в данном исследовании. Следующий шаг в изучении проблемы после предложений [48 — 52] сделал М. А. Алексидзе [21, 55], сформулировав окончательно внешнюю нелинейную задачу для уравнения Лапласа с граничными данными в виде модуля градиента потенциала и на примерах проиллюстрировав, что в общем случае она не имеет единственного решения. В свою очередь, А. В. Черный нашел впоследствии [38], что задача Алексидзе для уравнения Лапласа корректна на множествах истокообразно представимых функций в виде потенциалов простого слоя, распространенных на выпуклых поверхностях Ляпунова. Развитие исследований в этом направлении предполагается осветить в последующих статьях настоящего журнала.

Характеризация силы тяжести. Введение в теорию модуля градиента потенциала силы тяжести начнем с описания ее предметной модели и связанных с нею понятий. В качестве предметной выберем простейшую модель Земли в виде абсолютно твердого тела, близкого по форме к телу вращения, движущегося равномерно по своей орбите и вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью (без прецессии и нутации). Обозначим через G^- ограниченную область точек трехмерного евклидова пространства $R^{(3)}$, занятую массами Земли (за исключением масс ее неподвижной газовой оболочки), через G^+ — неограниченное дополнение этой области, свободное от каких бы то ни было гравитирующих объектов, а через ∂G — границу между многообразиями G^- и G^+ , отождествляемую с физической поверхностью Земли, так что $G^+ = R^{(3)} \setminus G^-$, $G^- = G^- \cup \partial G$. Меры каждого из подмножеств любой из областей G^- и G^+ (т. е. длины, углы, площади, объемы) в соответствии с принятой моделью Земли остаются все время неизменными. Поэтому в последующих рассмотрениях не принимаются во внимание никакие динамические эффекты, связанные со сравнительно медленными или быстрыми, периодическими или аperiodическими относительными перемещениями отдельных крупных или незначительных участков Земли, которые могут быть обусловлены то ли внутренними процессами, протекающими в недрах Земли, то ли процессами, имеющими место на ее поверхности, то ли ее движением в космическом пространстве.

Введем прямоугольную декартовую систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре Земли, оси Ox_1 и Ox_2 расположим произвольно в экваториальной ее плоскости, а ось Ox_3 направим по оси ее вращения. Точки пространства $R^{(3)}$ будем записывать малыми буквами, а их координаты — теми же буквами с индексами, причем для различия точек области G^- и ее дополнения G^+ первые обозначим греческими, а вторые — латинскими, т. е. $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi \in G^-$, $(x_1, x_2, x_3) = x \in G^+$. Элемент объема $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ в этой системе обозначений записывается в виде $d\xi$, а евклидово расстояние между точками x и ξ — в виде

$$|x - \xi| = \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - \xi_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Иногда векторные функции будем обозначать жирными буквами, а их модули (и скаляры) — светлыми.

Потенциал силы тяжести Земли при условии, что массы $M(\xi)$ обладают плотностью $\sigma(\xi)$, $\xi \in G^-$, можно записать, как известно, в виде

$$W(x) = f \int_{G^-} \frac{\sigma(\xi) d\xi}{|x - \xi|} + \Omega(x), \quad x \in R^{(3)}, \quad (1)$$

где

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2), & x \in G^-, \\ 0, & x \in G^+, \end{cases}$$

является потенциалом центробежной силы, $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$ — модуль вектора угловой скорости Земли, $f = (6672 \pm 4,1) \cdot 10^{-14} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ — гравитационная постоянная.

Известно, что потенциал силы тяжести $W(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(R^{(3)})$ непрерывных функций вместе со своими производными до второго порядка включительно, если плотность гравитирующих масс принадлежит классу $C^{(1)}(G^-)$. Впрочем, для того чтобы $W(x) \in C^{(2)}(R^{(3)})$, вовсе не обязательно предположение, что $\sigma(x) \in C^{(1)}(G^-)$. Функция $\sigma(x)$ и ее частные производные первого порядка могут претерпевать разрывы (первого рода) на конечном множестве кривых линий или даже поверхностей в G^- . Важным при этом является наличие у функции $\sigma(x)$ первых обобщенных производных. Однако для простоты рассмотрений ограничимся сейчас предположением, что плотность земных образований описывается функциями класса $C^{(1)}(G^-)$. Это требование не будем считать обременительным в связи с тем, что и при более естественных предположениях о свойствах плотности можно в рамках теории обобщенных функций получить обоснование тех же результатов. Попутно заметим, что зависимость дифференциальных свойств "внешнего" потенциала $W(x)$, $x \in G^+$, от плотности $\sigma(x)$, $x \in G^-$, более слабая, а именно, для бесконечной дифференцируемости внешнего потенциала достаточно, чтобы плотность была интегрируемой в области G^- функцией.

Для описанной ситуации напряженность гравитационного поля определяется вектором

$$\mathbf{g}(x) = -\nabla W(x) = - \left\{ \frac{\partial W(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial W(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial W(x)}{\partial x_3} \right\},$$

ортогональным эквипотенциальной поверхности $\partial W_x : W(y) = c_x = \text{const}$, проходящей через точку $x \in R^{(3)}$. Направление

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\mathbf{g}(x)}{g(x)} = \left\{ \cos(n, x_1), \cos(n, x_2), \cos(n, x_3) \right\}$$

выбирается в качестве внутренней нормали к поверхности ∂W_x , а величина напряженности $\mathbf{g}(x)$, т. е. значение модуля градиента потенциала, задается в виде

$$g(x) = |\mathbf{g}(x)| = (\mathbf{g}(x), \mathbf{n}(x)) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(x)}{\partial n},$$

$$\frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = \cos(n, x_k) = \frac{\frac{\partial W(x)}{\partial x_k}}{\left\{ \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{1/2}}, \quad (2)$$

где $(\mathbf{g}(x), \mathbf{n}(x))$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{g}(x)$ и $\mathbf{n}(x)$ в $R^{(3)}$. Из представления (1) с принятыми ограничениями на плотность следуют фундаментальные соотношения:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_k^2} = \Delta W(x) = \begin{cases} -4\pi f\sigma(x) + 2\omega^2, & x \in G^-, \\ 0, & x \in G^+, \end{cases} \quad (3)$$

которые служат для однозначного определения потенциала (или его производных) в пространстве $R^{(3)}$ при наличии определенных граничных условий на поверхности ∂G гравитирующей области G . Для замыкания области определения дифференциального оператора (Пуассона или Лапласа соответственно) указывается его след на границе области в виде операторного уравнения:

$$B(W) = \alpha(x) W(x) + \beta(x) \frac{\partial W(x)}{\partial l} = \varphi(x),$$

$$x \in \partial G,$$

где $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x)$ — любое, отличное от касательного, направление в точке x границы ∂G ; $\varphi(x)$ — заданная функция. В зависимости от конкретного вида граничного оператора $B(W)$ различают три основных типа классических (линейных) граничных задач для уравнения Лапласа (или Пуассона) (3). При $\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = 0$ задача называется *задачей Дирихле*, при $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$, $\mathbf{l} = \mathbf{m}(x)$, где $\mathbf{m}(x)$ — нормаль к поверхности ∂G , — *задачей Неймана*, а при $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, не равных ну-

лю одновременно, — *задачей Пуанкаре* (или *задачей о наклонной производной*, а при $\mathbf{l} = \mathbf{m}(x)$ — *смешанной*). Если же $\beta(x) = 1$,

$$\alpha(x) = \gamma^{-1}(x) \frac{\partial \gamma(x)}{\partial \nu}, \quad \text{где } \gamma(x) = |-\nabla U(x)|$$

— нормальное значение силы тяжести, $\nu = \nu(x)$ — внутренняя нормаль к поверхности $\partial U_x: U(y) = C_x$ сфероида, проходящего через точку x и определяемого заданным нормальным потенциалом $U(x)$, то граничный оператор

$$B(T) = \frac{\partial \gamma(x)}{\partial \nu} \frac{T(x)}{\gamma(x)} + \frac{\partial T(x)}{\partial \nu} = \varphi(x), \quad x \in \partial G,$$

примет вид граничного условия *задачи Стокса* — *Мологенского* для уравнения Лапласа определения в G^+ возмущающего потенциала $T(x) = W(x) - U(x)$. Так или иначе, точные граничные условия в классических задачах восстановления потенциала формируются по следам потенциала или его производных. Но измерения потенциала или вектора-напряженности силы тяжести на физической поверхности Земли связаны с чрезвычайно большими техническими и экономическими трудностями, которые вряд ли можно будет преодолеть и в обозримом будущем. В то же время широко доступными являются сегодня гравиметрические данные. Однако с помощью гравиметров измеряются только приращения модуля градиента потенциала силы тяжести, а не значения какой-то определенной составляющей градиента потенциала, как это часто предполагается. В самом деле, при измерениях гравиметры устанавливаются в каждой точке x земной поверхности ∂G по уровню на эквипотенциальной поверхности $W(y) = C_x$, пересекающей ∂G в этой точке (рис. 1). При этом пространственная ориентация гравиметров никак не фиксируется и в результате остаются неизвестными наклоны приборов при их перемещении от пункта x к пункту y на ∂G . Наклоны приборов, обусловленные различной кривизной каждой из эквипотенциальных поверхностей $W(z) = C_x$ и $W(z) = C_y$, $C_x \neq C_y$, проходящих через указанные пункты и в общем случае непараллельных друг другу, могли бы быть охарактеризованы, скажем, приращением угла между нормальными $\mathbf{m}(x)$ и $\mathbf{n}(x)$ пересекающихся в точке x поверхностей ∂G и ∂W_x соответственно, или же непосредственными измерениями значений $\cos(n, x_k)$, $k = 1, 2, 3$. Но ни эти, ни какие бы то ни было аналогичные величины, определяющие на-

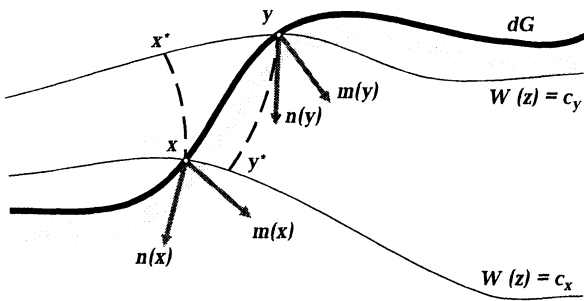


Рис. 1.

правление силы тяжести, не измеряются в точках земного рельефа в виду исключительной сложности таких наблюдений. Поэтому в результате наблюдений с гравиметрами получают одни лишь приращения абсолютных значений ускорения силы тяжести, соответствующие приращению модуля вектора $\mathbf{g}(x)$ между поверхностями ∂W_x и ∂W_y в точках x и y земного рельефа соответственно. Сами же значения модуля градиента потенциала не являются значениями гармонической функции. Это следует из представления (2) и зиждется на таком утверждении.

Лемма. Произведение двух функций $u(x)$ и $v(x)$, $x \in D$, класса $C^{(2)}(D)$ будет гармонической в области D функцией $w(x) = u(x)v(x)$, если каждая из этих функций гармоническая и их градиенты $\nabla u(x)$ и $\nabla v(x)$ ортогональны друг другу в D .

Доказательство получаем немедленно из равенства

$$\nabla^2 w(x) \equiv \Delta w(x) = v(x) \nabla^2 u(x) + 2(\nabla u(x), \nabla v(x)) + u(x) \nabla^2 v(x).$$

Следствие. Модуль градиента потенциала (силы тяжести) не удовлетворяет уравнению Лапласа ни в одной точке области G^+ .

В самом деле, хотя каждая из составляющих градиента $u(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial x_i}$ является гармонической в G^+ функцией, множители $v(x) = \cos(x_i, n)$, $i = 1, 2, 3$, заданные выражениями (2), уравнению Лапласа не удовлетворяют. В этом легко убедиться с помощью непосредственных вычислений. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_j, n) = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\cos(x_j, n)}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \cos(x_j, n) = \frac{1}{g} \frac{\partial^3 W}{\partial x_i^2 \partial x_j} -$$

$$-\frac{1}{g^2} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\cos(x_j, n)}{g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 -$$

$$-\frac{\cos(x_j, n)}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_j, n),$$

то с учетом соотношения (3) и очевидного равенства

$$\sum_{i=1}^3 \cos^2(x_i, n) = 1$$

получаем

$$\Delta \cos(x_j, n) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \cos(x_j, n) =$$

$$= -\frac{2}{g} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_j, n) + a^2(x) \cos(x_j, n),$$

где

$$a^2(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \cos(x_j, n) \right]^2 > 0. \quad (4)$$

Отсюда и на основании леммы вместе с представлением (2) заключаем, что модуль градиента потенциала не является гармонической функцией.

Отметим в рамках принятой модели еще одно характеристическое свойство модуля градиента потенциала силы тяжести.

Теорема 1. Если потенциал силы тяжести $W(x)$ порождается массами с плотностью $\sigma(x)$ класса $C^{(1)}(G^-)$, распределенными в области G^- , которая как абсолютно твердое тело, близкое к телу вращения, вращается вокруг своей оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью ω , то модуль градиента потенциала во всем евклидовом пространстве $R^{(3)}$ удовлетворяет следующему дифференциальному соотношению:

$$\Delta g(x) - a^2(x)g(x) = \begin{cases} -4\pi f |\nabla \sigma(x)|, & x \in G^-, \\ 0, & x \in G^+. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться известной формулой векторного анализа:

$$\nabla(\mathbf{g}, \mathbf{n}) = (\mathbf{g}, \nabla) \mathbf{n} + (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{g} +$$

$$+ [\mathbf{g}, \nabla \times \mathbf{n}] + [\mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{g}],$$

где прямыми скобками $[\cdot, \cdot]$ обозначено векторное произведение соответствующих векторов при дифференцировании представления $g(x)$ формулой (2).

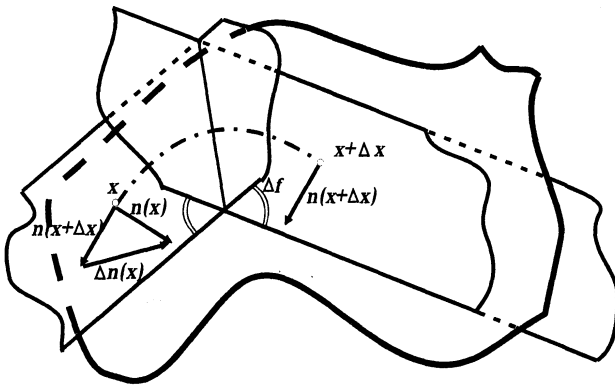


Рис. 2

Следствие. Если плотность тяготеющих масс принадлежит классу $C^{(1)}(G^-)$ (или объединению $\bigcup_{i=1}^n C^{(1)}(G_i^-)$, $\bigcup_{i=1}^n G_i^- = G^-$), то при переходе из области G^- в область G^+ (или при пересечении других границ, разделяющих области G_i^- , на которых плотность $\sigma_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, земных образований изменяется скачком) не только вторые, но и первые производные модуля градиента потенциала силы тяжести претерпевают разрывы непрерывности, в то время как сами значения модуля остаются непрерывными, а их особые точки на границах имеют вид "угловых", "возврата", "самопересечения" и т. п.

Доказательство следует из фундаментального соотношения (3) и других известных свойств потенциала и его производных [56].

Приведем геометрическую интерпретацию функции $a^2(x)$ в дифференциальном соотношении теоремы 1, которая задается равенством (4). Для этого рассмотрим на эквипотенциальной поверхности две близко расположенные точки x и $x + \Delta x$ (рис. 2). Предположим, что эти точки не являются особыми для поверхности, т. е. хотя бы одна из производных $\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$, в этих точках отлична от

нуля. Тогда в них можно восстановить единичные внутренние нормали $\mathbf{n}(x)$ и $\mathbf{n}(x + \Delta x)$ и провести через их основания касательные плоскости к выбранной поверхности. Взаимное расположение касательных плоскостей будем характеризовать величиной двугранного угла $\Delta\varphi$ и положением прямой их пересечения. Очевидно, эта прямая в пределе будет ортогональной к вектору $d\mathbf{n}(x)$. Сосредоточивая внимание на параметре $\Delta\varphi$, отметим, что он равен углу между нормальями $\mathbf{n}(x)$ и

$\mathbf{n}(x + \Delta x)$, причем $d\varphi = |d\mathbf{n}(x)|$. В свою очередь,

$$d\mathbf{n}(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{n}(x)}{\partial x_i} dx_i$$

или

$$d\mathbf{n}(x) = (\text{Grad } \mathbf{n}(x))^* dx, \quad (5)$$

где

$$d\mathbf{n}(x) = (dn_1(x), dn_2(x), dn_3(x))^*,$$

$$dx = (dx_1, dx_2, dx_3)^*,$$

$$(\text{Grad } \mathbf{n}(x))^* =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \cos(x_1, n)}{\partial x_1} & \frac{\partial \cos(x_1, n)}{\partial x_2} & \frac{\partial \cos(x_1, n)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \cos(x_2, n)}{\partial x_1} & \frac{\partial \cos(x_2, n)}{\partial x_2} & \frac{\partial \cos(x_2, n)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \cos(x_3, n)}{\partial x_1} & \frac{\partial \cos(x_3, n)}{\partial x_2} & \frac{\partial \cos(x_3, n)}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Тензор

$$\frac{d\mathbf{n}(x)}{dx} = (\text{Grad } \mathbf{x}(x))^*,$$

который обычно называют производной вектора (единичной нормали) $\mathbf{n}(x)$ по вектору-смещению $d\mathbf{x}$, характеризует собой скорость вращения единичного вектора $\mathbf{n}(x)$ при его перемещении по поверхности ∂W_x в бесконечно близкую точку подобно тому, как обычная производная функции одного аргумента определяет скорость изменения функции с ростом аргумента. Отсюда, учитывая связь угла $\Delta\varphi$ с приращением $\Delta\mathbf{n}(x)$, находим

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{|d\mathbf{n}(x)|}{dx} = \|\text{Grad } \mathbf{n}(x)\|_c = a(x),$$

поскольку евклидовы нормы матриц тензоров $(\text{Grad } \mathbf{n}(x))^*$ и $\text{Grad } \mathbf{n}(x)$ тождественно равны друг другу. Таким образом, функция $a^2(x)$ описывает квадрат скорости вращения единичного вектора нормали $\mathbf{n}(x)$ к эквипотенциальной поверхности $W(y) = C_x$ и характеризует собой кривизну линий на этой поверхности. Действительно, поскольку обе точки x и $x + \Delta x$ принадлежат одной и той же поверхности, то из трех компонент вектора $d\mathbf{x}$ только две являются линейно независимыми. Это следует из теоремы о существовании неявной функции, согласно которой, если, на-

пример, $\frac{\partial W(x)}{\partial x_3} \neq 0$, то

$$dx_3(x) = \frac{\partial x_3(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_3(x)}{\partial x_2} dx_2$$

и, следовательно, смещение $d\mathbf{n}(x)$ осуществляется вдоль определенной кривой на поверхности $W(y) = C_x$. Можно показать, что квадрат угла между касательными плоскостями, оцениваемый величиной $|d\mathbf{n}(x)|^2$, может быть выражен через гауссову и среднюю кривизны, а также через первую и вторую квадратичные формы поверхности. В связи с этим функцию $a^2(x)$ можно считать одной из фундаментальных геометрических характеристик самой поверхности $W(y) = C_x$, проходящей через фиксированную точку x евклидова пространства $R^{(3)}$, а для всех точек $x \in R^{(3)}$, т. е. для семейства эквипотенциальных поверхностей, заполняющих все пространство, она определяет целиком и полностью характер потенциального поля. Если бы функция $a^2(x)$, $x \in R^{(3)}$, была бы известна, то соотношение теоремы 1 можно было бы принять в качестве линейного дифференциального уравнения силы тяжести и для этого уравнения с граничными данными в виде значений силы тяжести $g(x)$, $x \in \partial D$, поставить и решить задачу Дирихле для любой замкнутой области $\bar{D} = D \cup \partial D$. Тем самым был бы получен необходимый аппарат для преобразования значений модуля градиента потенциала, возникающих в прикладных задачах теории фигуры Земли и истолкования аномалий силы тяжести (или аэромагнитных измерений). Однако информация об этой функции ограничена, а это сразу же существенно сужает возможности данного способа преобразования $g(x)$. В арсенал информации об $a^2(x)$ отнесем, прежде всего, сведения физического характера. Известно, что относительные изменения силы тяжести на земной поверхности почти не превосходят 0,006 доли от максимального значения модуля ускорения силы тяжести (что составляет примерно 5000—6000 мГал.). Это свидетельствует не только о том, что Земля мало уклоняется от шара, но также и о том, что расположение масс внутри Земли обладает почти сферической симметрией. В связи с этим непосредственно из представления (4) и известных оценок для потенциала силы тяжести, его первых и вторых производных в окрестности бесконечно удаленной точки, которые суть

$$|W(x)| = o(|x|^{-1}), \quad \left| \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \right| = o(|x|^{-2}),$$

$$\left| \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| = o(|x|^{-3}); \quad i, j = 1, 2, 3,$$

следует, что для функции $a^2(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$a^2(x) = o(|x|^{-2}). \quad (6)$$

Для того чтобы уточнить эту оценку в окрестности области G^- , занятой массами Земли, примем в качестве нулевого $a_0^2(x)$ и первого $a_1^2(x)$ приближений к функции $a^2(x)$ такие приближения, которые описывают кривизны семейств эквипотенциальных поверхностей соответственно в виде концентрических сфер и конфокальных сжатых эллипсоидов вращения (сжатых сфероидов). Для семейства концентрических сфер радиуса r с базисом

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_0^2, \quad r_0 < r,$$

внутренняя нормаль $\nu(x; r_x)$ в точке $x \in R^{(3)}$ к сфере радиуса r_x определяется, очевидно, выражением

$$\nu(x; r_x) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

поэтому

$$a_0^2(x) = \begin{cases} 2|x|^{-2}, & |x| > r_0, \\ 2r_0^{-2}, & |x| \leq r_0. \end{cases}$$

Для семейства сжатых конфокальных эллипсоидов вращения, малые оси которых совпадают с осью (вращения) Ox_3 , базис задается эллипсоидом

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1, \quad l^2 = a^2 - b^2 > 0,$$

а индивидуализация сфероидов семейства производится с помощью параметров $a_\xi = a(\xi) > a$ и $b_\xi = b(\xi) > b$ точки $\xi \in R^{(3)}$, через которую проходит данный сфероид. При этом параметры сфероида и его внутренняя нормаль $\nu(x; a_\xi, b_\xi)$ определяются в виде

$$a_\xi^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 + l^2 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 - l^2 \right)^2 - 4l^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \right\},$$

$$b_{\xi}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 - l^2 + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 + l^2 \right)^2 - 4l^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \right\},$$

$$v(x; a_{\xi}, b_{\xi}) = \frac{(b_{\xi}^2 x_1, b_{\xi}^2 x_2, a_{\xi}^2 x_3)}{\sqrt{b_{\xi}^4(x_1^2 + x_2^2) + a_{\xi}^4 x_3^2}},$$

а соответствующая семейству функция $a_1^2(x)$ задается выражением

$$a_1^2(x) = \begin{cases} \frac{b_{\xi}^4}{b_{\xi}^4(x_1^2 + x_2^2) + a_{\xi}^4 x_3^2} \times \left[1 + \frac{a_{\xi}^4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{b_{\xi}^4(x_1^2 + x_2^2) + a_{\xi}^4 x_3^2} \right], & a_{\xi} > a, b_{\xi} > b, \\ \frac{b^4}{b^4(x_1^2 + x_2^2) + a^4 x_3^2} \times \left[1 + \frac{a^4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{b^4(x_1^2 + x_2^2) + a^4 x_3^2} \right], & a_{\xi} \leq a, b_{\xi} \leq b. \end{cases}$$

Интересно сопоставить между собой приближения $a_0^2(x)$ и $a_1^2(x)$. В силу конечности величины $l^2 = a^2 - b^2$ ясно, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |a_0^2(x) - a_1^2(x)| = 0,$$

откуда с учетом оценки (6) следует, что при стремлении к бесконечно удаленной точке не только выписанные, но и все последующие в совокупности возможные приближения функции $a^2(x)$, как и сама функция, становятся неотличимыми от $a_0^2(x)$.

Обратим, наконец, внимание на то, что приближения $a_0^2(x)$ и $a_1^2(x)$ вместе с оценкой (6) не зависят от величины напряженности поля и связаны только с геометрией его эквипотенциальных поверхностей. Это дает основание для индуктивного предположения о том, что все возможные приближения вместе с предельной функцией $a^2(x)$ не зависят от $g(x)$, чем обосновываются принятые названия для дифференциальных соотношений с коэффициентами $a_k^2(x)$, $k = 0, 1, \dots$ О практическом их использовании речь уже шла [49 — 53].

В заключение этого пункта сконцентрируем внимание на том, что на основании данных $g(x)$, $x \in \partial G$, нельзя сконструировать точные граничные данные ни для одной из линейных классических задач теории потенциала, в том числе и для задач Стокса — Молоденского для уравнения Лапласа или Дирихле для уравнения силы тяжести. В первом случае для уравнения в глобальной области можно сформулировать лишь приближенные граничные условия, во втором — составить только приближенное линейное уравнение (с приближениями $a_0^2(x)$ и $a_1^2(x)$ его коэффициента) для точных граничных данных. В обоих случаях нельзя получить в глобальной области решения задачи с высокой точностью и поэтому поиск его выдвигается в разряд первоочередных проблем теории.

Оценка уклонения решений задачи Дирихле для уравнения аномалий силы тяжести и для уравнения Лапласа. Рассмотрим, как будут отличаться друг от друга функции $u(y)$ и $v(y)$ в некоторой окрестности $G(x)$ точки $x \in G^+$ в метрике пространства непрерывных функций $C(G(x))$, если они получены продолжением граничных значений аномалий силы тяжести $\tau(y)$, $y \in \partial G(x)$, в виде решений соответствующих задач Дирихле для уравнения аномалий силы тяжести:

$$\Delta u(y) - a^2(y)u(y) = 0, \quad y \in G(x) \cup G^+,$$

$$u(y) = \tau(y), \quad y \in \partial G(x), \quad (7)$$

и уравнения Лапласа:

$$\Delta v(y) = 0, \quad y \in G(x) \cup G^+,$$

$$v(y) = \tau(y), \quad y \in \partial G(x). \quad (8)$$

Здесь, как и в статье [52], под уравнением аномалий силы тяжести подразумевается линейное дифференциальное соотношение теоремы 1 с коэффициентом $a_1^2(x)$, а под аномалиями силы тяжести — разность

$$\tau(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial v(x)} = \frac{\partial W(x)}{\partial n(x)} \frac{\partial n(x)}{\partial v(x)} - \frac{\partial U(x)}{\partial v(x)},$$

представляющая собой нормальную производную возмущающего потенциала $T(x)$, отражающего отклонение реального потенциала силы тяжести $W(x)$ от нормального $U(x)$. В качестве нормального принимается потенциал $U(x)$ некоторой области G_0^- достаточно простой геометрии, не слишком уклоняющейся от области G^- и вращающейся вместе с ней вокруг одной и той же оси с постоянной угло-

вой скоростью, выполненной массами, равными массам в G^- и распределенными в G_0^- в отличие от распределения в G^- "правильно" в каком-то смысле. Близость областей G_0^- и G^- характеризуется близостью их границ ∂G_0 и ∂G , которая, в свою очередь, определяется конкретной мерой уклонения поверхности ∂G_0 от земного рельефа ∂G . В данном случае, ∂G_0 — сжатый сфероид, $\mathbf{v}(x)$ — внутренняя нормаль к сфероиду в точке x , правильное распределение масс в G_0^- — одна из известных плотностных моделей Земли [57]. Здесь же отметим, что данное определение аномалий отличается от классического прежде всего тем, что в классической схеме аномалии определяются уклонениями реального поля силы тяжести Земли от некоторого его осреднения. Последнее принимается в качестве определенной аппроксимации поля сфероид с неизвестным распределением масс внутри него. А отсутствие информации о распределении нормальных масс чрезвычайно затрудняет интерпретацию гравитационных аномалий. Придерживаясь принятой схемы, обозначим через $\vartheta(x)$ угол между нормалью и $\mathbf{v}(x)$ в точке x (который обычно называют уклонением отвеса). Тогда, очевидно, $\cos \vartheta(x) = (\mathbf{n}(x), \mathbf{v}(x))$ и аномалии

$$\tau(x) = g(x) - \gamma(x) - 2g(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2},$$

где $\gamma(x)$ — нормальное значение силы тяжести, отвечающее известному распределению масс внутри сфероид ∂G_0 . Если нормальный сфероид и распределение в нем масс выбраны удачно, то можно ожидать, что уклонение отвеса (в районах со "спокойным" рельефом) не будет превышать 60", в связи с чем оценка сверху последнего слагаемого в определении аномалии едва ли будет больше величины $2g(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2} < 0,05$ мГал, $x \in \partial G$. Поэтому аномалии будем считать заданными в виде разности:

$$\tau(x) = g(x) - \gamma(x), \quad x \in \partial G,$$

по начертанию совпадающей с классическим определением аномалии, но отличающейся от него существенно тем, что нормальные значения силы тяжести теперь тесно связываются с конкретным — *правильным* — распределением масс в G_0^- .

Выяснив необходимые характеристики граничных данных, скажем несколько слов о задаче (8), в которой для описания аномалий в локальной области $G(x)$ используется уравне-

ние Лапласа. Непосредственно из сопоставления задач (7) и (8) видим, что они неразличимы при $a^2(y) = 0$, $y \in G(x)$. А из определения (4) ясно, что равенство нулю коэффициента уравнения аномалии силы тяжести возможно только в такой идеальной ситуации, когда векторы единичных нормалей $\mathbf{n}(x)$, определяющие направление вектора напряженности поля, в произвольных точках x пространства R^3 параллельны между собой. В рамках принятой модели Земли некоторое приближение к такой идеализации имеем в областях достаточно малой меры, где в каждой из них направление "полного" вектора силы тяжести можно считать постоянным, а относительные флуктуации силы тяжести от среднего ее значения — небольшими.

В круге принятых ограничений для решения поставленной вначале этого пункта задачи можно предложить два способа. Один из них состоит в том, что для отыскания отклонения $\varepsilon(y) = u(y) - v(y)$, $y \in G(x)$, друг от друга решений $u(y)$ и $v(y)$ задач (7) и (8) с одними и теми же граничными условиями можем, очевидно, сформулировать следующую граничную задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon(y) &= a^2(y) u(y), \quad y \in G(x), \\ \varepsilon(y) &= 0, \quad y \in \partial G(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Другой способ, который зиждется на преобразовании (5), состоит в оценке разности

$$\varepsilon(x, y) = \frac{\partial T(y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial T(y)}{\partial v(x)} \quad (10)$$

для фиксированной точки x и пробегающей область $G(x)$ точки y . Эта разность, очевидно, представляет собой отклонение в точке $y \in G(x)$ аномалии $\tau(y)$ от значения гармонической функции $\frac{\partial T(y)}{\partial v(x)}$ как "вертикальной" (по направлению $\mathbf{v}(x)$ к поверхности $\partial U_x : U(z) = C_x$ в точке x) составляющей возмущающего потенциала.

Реализуя первый способ, заменим задачу для уравнения Пуассона соответствующей граничной задачей для уравнения Лапласа. Это можно сделать на основании того, что задача Дирихле для уравнения Пуассона всегда имеет частное решение $\varepsilon_0(y)$ в виде потенциала объемных масс с плотностью, равной в данном случае $-a^2(y)u(y)$, $y \in G(x)$, т. е. решение

$$\varepsilon_0(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{G(x)} \frac{a^2(\eta)u(\eta)}{|y-\eta|} d\eta, \quad y \in \overline{G(x)}.$$

Теперь подстановкой $\varepsilon_1(y) = \varepsilon(y) - \varepsilon_0(y)$, $y \in G(x)$, от задачи (9) перейдем к задаче

$$\Delta \varepsilon_1(y) = 0, \quad y \in G(x),$$

$$\varepsilon_1(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{G(x)} \frac{a^2(\eta) u(\eta)}{|y - \eta|} d\eta, \quad y \in \partial G(x).$$

Отсюда следует решение поставленной ранее задачи, так как функция $\varepsilon_1(y)$ в области $G(x)$ гармоническая и ее экстремальные значения достигаются на границе $\partial G(x)$. В метрике пространства непрерывных функций $C(G(x))$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \max_{y \in \overline{G(x)}} |\varepsilon_1(y)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{y \in \partial G(x)} \left| \int_{G(x)} \frac{a^2(\eta) u(\eta)}{|y - \eta|} d\eta \right|. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, с помощью первого способа выяснилось, что погрешность продолженных аномалий силы тяжести, возникающая в результате замены субгармонической функции функцией гармонической, зависит от кривизны эквипотенциальных поверхностей поля, величины аномалий и меры той локальной области, в которую осуществляется продолжение.

Перейдем теперь к оценке разности (10), переписав ее в более удобном для исследования виде:

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T(y)}{\partial x_k} \delta v_k = (\nabla T(y), \delta v(x)),$$

где $\delta v = (\delta v_1, \delta v_2, \delta v_3)^*$ — вектор с компонентами $\delta v_k = \cos(x_k, v_y) - \cos(x_k, v_x)$, $v_x = v(x)$. Представив его в виде преобразования (5) вектора-смещения $\delta x = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)^*$, получим с учетом неравенства Коши — Буяковского следующее выражение для оценки в метрике $C(G(x))$ погрешности $\varepsilon(x, y)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \max_{y \in G(x)} |(\nabla T(y), (\text{Grad } v(x))^* \delta x)| \leq \\ &\leq \frac{\tau_0}{a} \sqrt{1 + \frac{a^4}{b^4}} \|\delta x\|_c, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \|\nabla T(y)\|_{C(G(x))}, \|\text{Grad } v(x)\|_{C(G(x))} = \\ &= \max_{y \in \overline{G(x)}} \sqrt{a_1^2(y)} \leq \frac{1}{a} \sqrt{1 + \frac{a^4}{b^4}}, \end{aligned}$$

a, b — большая и малая полуоси сфероиды ∂U_x , проходящего через точку x . Полученная оценка не противоречит оценке (11). Действительно, в оценке (12) погрешность продолженных как гармонические функции аномалий силы тяжести зависит также от кривизны эквипотенциальных поверхностей поля, величины аномалии и размеров области, в которую продолжаются аномалии.

Полученные соотношения можно использовать для оценки точности различных трансформаций гравитационных аномалий, выполняемых по правилам преобразования поля гармонических функций. Проиллюстрируем это на примерах. Пусть требуется найти погрешность трансформации аномалии $\tau(y)$, $y \in \partial G(x)$, связанной с вычислением параметров строения среды приповерхностного слоя Земли толщиной не более 200 км в ограниченной области $G(x)$. отождествляя указанные трансформации с продолжением поля в локальную область $G(x)$ и принимая для оценки погрешности зависимость (11), выберем в качестве локальной области для простоты последующих выкладок усеченный двумя сферическими поверхностями круглый конус с вершиной в центре Земли, меньшее и большее (по площади) основания которого отстоят от центра на расстояниях R и R_1 соответственно. Будем считать, что ось конуса проходит через точку x на меньшем основании усеченного конуса $G(x)$, а верхнее его основание совпадает с земной поверхностью ∂G и $|x| + 200 = R_1$, где R_1 — среднее значение радиуса Земли, равное 6 371,1 км. Направив ось Ox_3 по высоте конуса, совместим ее с полярной осью сферической системы координат и определим

$$\xi_1 = \rho \sin \alpha \cos \beta, \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \varphi < \pi,$$

$$\xi_2 = \rho \sin \alpha \sin \beta, \quad x_2 = 0, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi,$$

$$\xi_3 = \rho \cos \alpha, \quad x_3 = R, \quad R \leq \rho \leq R_1,$$

причем параметр φ будем менять в пределах от $0^\circ 30'$ до 10° , что примерно будет соответствовать изменению диаметра большого основания конуса от 110 до 2 200 км. Если в окрестности $G(x)$ точки x амплитуда τ_0 аномалии составляет

$$\tau_0 = \left| \max_{y \in \overline{G(x)}} \tau(y) - \min_{y \in \overline{G(x)}} \tau(y) \right|,$$

то, выбирая для оценки функции $a^2(y)$, $y \in G(x)$, приближение $a_0^2(y)$, после несложных вычислений найдем

$$\frac{\varepsilon}{\tau_0} \leq 2 \left| 1 - \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} - r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} + \ln \frac{r(\sqrt{1 - \cos \varphi} + \sqrt{r})}{\sqrt{1 - \cos \varphi}} \times \right. \\ \left. \times \frac{r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} - 1}{r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} + 1} - \cos \varphi \ln \frac{r + \sqrt{1 - 2r \cos \varphi + r^2} - \cos \varphi}{1 + \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} - \cos \varphi} \right|,$$

где $r = R_1/R$. Для избранного набора локальных областей $G(x)$ параметр ε/τ_0 колеблется в пределах $0,478516 \cdot 10^{-3} \leq \varepsilon/\tau_0 \leq 0,290601 \times 10^{-1}$. Отсюда при известной амплитуде аномалии легко определяется погрешность отклонения в $G(x)$ субгармонической функции от функции гармонической. С сожалением приходится констатировать, что данные об амплитудах аномалий практически отсутствуют. В самом деле, мы располагаем приближенной информацией о возможных колебаниях аномалий только на земном рельефе ∂G , тогда как для вычисления погрешности ε необходимы сведения об отклонениях реального гравитационного поля от поля конкретного сфероида (с определенным распределением в нем масс Земли) не столько на ∂G в окрестности точки x , сколько на границе усеченного конуса и, конечно же главным образом, на его нижнем основании, где колебания поля экстремальны. Поэтому для представления о возможных колебаниях погрешности приходится прибегать к правдоподобной гипотезе о том, что амплитуды аномалий в локальных областях типа рассматриваемых вряд ли будут меньше 10 000 мГал (по оценкам нормального градиента поля). В соответствии с этим погрешность будет колебаться в пределах $4,78 \leq \varepsilon \leq 290,6$ (мГал). Если же требуется оценить погрешность ε продолженных аномалий $\tau(x)$, $x \in \partial G$, как гармонические функции в область $G(x) \cap G^+$, то при условии, что амплитуды τ_0 продолжаемых аномалий не превосходят 150 мГал, а локальные области $G(x)$ выбираются в виде усеченных конусов с параметрами $0^\circ 30' \leq \varphi \leq 10^\circ$; $0 \leq \beta \leq 360^\circ$; $6371,1 \leq \rho \leq 6571,1$ (км), нижние основания которых совмещаются с земным рельефом, по формуле (11) получим $0,07 \leq \varepsilon \leq 6,3$ (мГал). В то же время по формуле (12) с учетом того, что диаметры $\|\delta x\|$

нижних оснований рассматриваемого семейства усеченных конусов колеблются в пределах $110 \leq \|\delta x\| \leq 2200$ (км), а параметры сфероида, аппроксимирующего поверхность ∂G , равны $a = 6378,2$ км, $b = 6356,9$ км, будем иметь $3,67 \leq \varepsilon \leq 73,41$ (мГал). Расхождение в оценках погрешности одной и той же трансформации аномалий $\tau(x)$ в локальной области $G(x) \cap G^+$, полученных по формулам (11) и (12), можно объяснить тем, что в этих оценках вместо функции $a^2(\eta)$, характеризующей кривизну реального поля в каждой точке η области $G(x)$, зависящую, очевидно, не только от особенностей регионального поля, но и от особенностей данной аномалии, используются ее далекие приближения $a_0^2(\eta)$ и $a_1^2(\eta)$, характеризующие кривизны регионального поля в виде концентрических сфер и конфокальных сфероидов соответственно. Действительно, так как область малой меры $G(x)$ находится вблизи локальных и на почтительном расстоянии от региональных особенностей поля, то в соответствии с соотношением (6) будем иметь

$$\max_{\eta \in G(x)} a_i^2(\eta) < \max_{\eta \in G(x)} a^2(\eta), \quad i = 0, 1. \quad (13)$$

Отсюда, между прочим, уже следует, что обе оценки погрешности являются заниженными. А то, что оценка погрешности по формуле (11) существенно меньше оценки по формуле (12), связано не столько с указанной причиной, сколько с ее следствием: в первой формуле используются приближения $a_i^2(\eta)$, в то время как во второй — $\sqrt{a_i^2(\eta)}$, $\eta \in G(x) \cap G^+$. Легко подсчитать, что для выбранного вида областей $a_0^2(\eta) \leq a_1^2(\eta) \leq 0,49603961 \cdot 10^{-7}$, тогда как $\sqrt{a_0^2(\eta)} < \sqrt{a_1^2(a, 0, 0)} = \sqrt{a_1^2(0, a, 0)} = 0,22247155 \cdot 10^{-3}$, поэтому различия в оценках по формулам (11) и (12), в которых вместо функции используются далекие ее приближения $a_i^2(\eta)$, вполне объяснимы. В свою очередь, обнаруженное различие оценок погрешности трансформации аномалий силы тяжести по правилам преобразования гармонических функций вместе с неравенством (13) дают основание для предположения, что и оценка погрешности трансформации аномалии, связанной с определением параметров среды (из первого примера), также занижена, по-видимому, на порядок. Как бы там ни было, рассмотренные примеры убеждают, что погрешности замены функции $u(\eta)$, удовлетворяющей в локальной области $G(x)$ уравнению аномалий силы тяжести, функцией $v(\eta)$, гармонической

в той же области, могут достигать в зависимости от вида трансформации неопустимых величин. Положение дел усугубляется еще и тем, что оценки погрешностей той или иной трансформации в каждой из локальных, даже пересекающихся между собой, областей $G(x)$ и $G(y)$, не дают возможности оценить общую погрешность трансформации в объединении $G(x) \cup G(y)$, если $x \neq y \in R^{(3)}$. Действительно, если в точке x уклонение отвеса $\vartheta(x)$ равно $60''$, а в точке $y - \vartheta(y) = 0$, то "истинная" аномалия $\delta g(x)$ в точке x , определяемая в виде модуля разности градиентов реального и нормального потенциалов, будет равна

$$\delta g(x) = |\mathbf{g}(x) - \gamma(x)| = \left(4\gamma^2(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2} + 4\gamma(x)\tau(x) \sin^2 \frac{\vartheta(x)}{2} + \tau^2(x)^{1/2} \right),$$

а в точке y , очевидно, $\delta g(y) = \tau(y)$. Поэтому при переходе от локальной области $G(x)$ к такой же области $G(y)$ истинная аномалия будет отличаться от классической на величину

$$\delta g(x) = 2\gamma(x) \sin \frac{\vartheta(x)}{2} \approx 285,25 \text{ мГал},$$

если даже классическая аномалия $\tau(x)$ равна нулю в обеих точках x и y из $R^{(3)}$. Ясно, что преобразование поля $\tau(\eta)$ в каждой из областей $G(x)$ и $G(y)$ при $\tau(x) = \tau(y) = 0$ и $x \neq y$ по правилам трансформирования гармонических функций не дает возможности обнаружить истинную аномалию, достигающую величин, соизмеримых со значениями преобразуемых аномалий даже в регионах со спокойным рельефом. Вот почему область применения методов обработки и интерпретации аномалий силы тяжести (как и аэромагнитных аномалий), развитых на базе теории гармонических и аналитических функций, ограничивается в основном рамками разведочной геофизики и не может без дополнительных разработок расширяться до изучения глубинной региональной структуры Земли. В связи с этим вопрос о том, следует или не следует учитывать природу аномалий $\tau(x)$, $x \in \partial G$, при их трансформациях, направленных на исследование глубинных характеристик Земли, альтернативы не имеет, и задача о восстановлении потенциала по значениям модуля его градиента выдвигается в число актуальнейших проблем геофизики.

Определение потенциала притяжения. Задача, которую предстоит рассмотреть, формулируется следующим образом: *определить потенциал притяжения $V(x)$ телом G^- в заданной точке x области G^+ по значениям модуля его градиента $q(x)$, заданным в любой точке x границы ∂G области и принадлежащим классу $C(\partial G)$. Другими словами, требуется найти в неограниченной области G^+ регулярное решение $V(x)$ уравнения Лапласа, принадлежащее классу $C^{(2)}(G^+) \cap C^{(1)}(\overline{G^+})$ и удовлетворяющее граничному условию $q(x) = |-\nabla V(x)|$, $x \in \partial G$, т. е. требуется решить следующую нелинейную задачу:*

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= 0, \quad x \in G^+, \\ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_k} \right)^2 &= q^2(x), \quad x \in \partial G, \quad (14) \\ V(x) &\rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Намереваясь использовать для решения задачи эффективные методы теории потенциала, уточним некоторые сопутствующие понятия и определения. Прежде всего будем считать заданным нормальный потенциал:

$$U(x) = f \int_{G_0^-} \frac{\sigma_0(\xi) d\xi}{|x - \xi|} + \Omega(x), \quad (15)$$

нормальный потенциал притяжения $\Phi(x) = U(x) - \Omega(x)$ которого развивается массами Земли, распределенными по объему G_0^- с известной плотностью $\sigma_0(\xi)$, $\xi \in G_0^-$, а потенциал $\Omega(x)$ центробежной силы задается таким же, каким он был в выражении (1) для потенциала силы тяжести. В связи с этим заданным оказывается и семейство нормальных эквипотенциальных поверхностей $\partial U_x : U(x) = C_x$, параметризованное точкой x пространства $R^{(3)}$, а также семейство внутренних (направленных из области G^+ в область G^-) нормалей $\mathbf{v}(x) = \{\cos(\mathbf{v}, x_k)\}$ к поверхности ∂U_k в точке x совместно с нормальными значениями силы тяжести $\gamma(x) = |-\nabla U(x)|$. Заданным считается и уравнение поверхности Земли $\partial G : F(x)$. Причем для удовлетворения грядущим требованиям разрешимости задачи избранным методом необходимо, чтобы поверхность ∂G была многообразием Ляпунова [56] или, что то же самое, чтобы она описывалась функцией класса $C^{(1,\alpha)}(G^-)$, $0 < \alpha \leq 1$, с непрерывными по Гельдеру (степени α) в области G^- первыми производными. Тогда заданными окажутся внутренние (по отноше-

нию к области G^-) нормали $m(x)$ с компонентами

$$\cos(x_k, m) = \frac{\frac{\partial F(x)}{\partial x_k}}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\right)^2}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

к поверхности ∂G в любой ее точке x и величина

$$\cos(v, m) = \sum_{k=1}^3 \cos(v, x_k) \cos(x_k, m).$$

Если бы на поверхности Земли помимо значений модуля градиента потенциала силы тяжести $g(x)$ и нормали $\mathbf{m}(x)$ к ∂G измерялось также и направление градиента $\mathbf{n}(x) = \{\cos(n, x_k)\}$, то нелинейную граничную задачу (14) можно было бы переформулировать к виду линейной задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= 0, \quad x \in G^+, \\ \frac{\partial V(x)}{\partial m(x)} &= \varphi(x), \quad x \in \partial G, \end{aligned} \quad (16)$$

$$V(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\partial W(x)}{\partial m(x)} - \frac{\partial \Omega(x)}{\partial m(x)} = \\ &= g(x) \cos(n, m) - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \cos(n, x_k) x_k, \\ \cos(n, m) &= \sum_{k=1}^3 \cos(n, x_k) \cos(x_k, m). \end{aligned}$$

Однако, как уже подчеркивалось неоднократно, направление $\mathbf{n}(x)$ градиента потенциала нам неизвестно и от указанного способа решения задачи остаются только наводящие соображения для построения определенного итерационного процесса восстановления потенциала притяжения.

Прежде чем углубиться в его детали, охарактеризуем положение дел с граничными данными задачи. В рамках принятой модели значения силы тяжести обусловлены не только притяжением масс Земли, но и ее вращением вокруг своей оси, поэтому из выражения (1) найдем

$$g(x) = q(x) \times$$

$$\times \left(1 + 2\omega^2 \frac{x_1 \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}}{q^2(x)} + \omega^4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{q^2(x)} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Так как второе и третье в скобках слагаемые оцениваются, очевидно, числами

$$\left| 2\omega^2 \frac{x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}}{q^2(x)} \right| < 690,9593 \cdot 10^{-5},$$

$$\omega^4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{q^2(x)} < 1,193562 \cdot 10^{-5},$$

а отношение третьего слагаемого ко второму не превосходит

$$\left| \frac{\omega^2(x_1^2 + x_2^2)}{2 \left(x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right)} \right| < 1,727398 \cdot 10^{-5},$$

то для значений модуля градиента потенциала притяжения из представления (17) получим с относительной точностью до величин порядка 10^{-6} , следующее выражение:

$$q(x) = g(x) - \omega^2 (x_1 \cos(x_1, e) + x_2 \cos(x_2, e)), \quad x \in \partial G, \quad (18)$$

где неизвестные компоненты $\cos(x_k, e)$ единичной нормали $\mathbf{e}(x)$ к поверхности $\partial V_x: V(y) = C_x$ описываются выражениями, аналогичными формулам (2), в которых вместо потенциала силы тяжести должен использоваться потенциал притяжения.

И, наконец, предположим, что распределение плотности $\sigma_0(x)$, $x \in G_0^-$, и область G_0^- выбраны настолько удачно, что модуль градиента нормального потенциала притяжения $\chi(x) = |-\nabla\Phi(x)|$ незначительно (в принятой метрике) отличается от значений $g(x)$, $x \in \partial G$, а возмущающий потенциал $T(x)$, определяемый в виде

$$T(x) = W(x) - U(x) = V(x) - \Phi(x),$$

составляет небольшую долю потенциала притяжения. Тогда потенциал притяжения $V(x)$, $x \in G^+$, можно восстановить взаимкнутой об-

ласти G^+ с помощью последовательных приближений:

$$V^{(i)}(x) = V^{(0)}(x) + T^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, \dots, \infty;$$

$$V^{(0)}(x) = \Phi(x), \quad T^{(0)}(x) = 0; \quad (19)$$

$$e_0(x) = v(x),$$

каждое из которых находится аналогично решению граничной задачи (16) следующим образом. Вначале по определенным на предыдущем i -м шаге процесса приближениям $\cos(x_k, e_i)$ направляющих косинусов нормали $e(x)$ вычисляем на границе ∂G в соответствии с формулой (18) следующее $(i+1)$ -е приближение силы притяжения:

$$q^{(i+1)}(x) = g(x) - \omega^2 \sum_{k=1}^2 x_k \cos(x_k, e_i),$$

$$x \in \partial G,$$

и значения функций

$$\cos(e_i, m) = \sum_{k=1}^3 \cos(e_i, x_k) \cos(x_k, m),$$

$$x \in \partial G,$$

$$\varphi^{(i+1)}(x) = q^{(i+1)}(x) \cos(e_i, m) - \chi(x) \cos(v, m),$$

$$x \in \partial G.$$

Далее с этими данными решаем внешнюю задачу Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta T^{(i+1)}(x) = 0, \quad x \in G^+,$$

$$\frac{\partial T^{(i+1)}(x)}{\partial m(x)} = \varphi^{(i+1)}(x), \quad x \in \partial G, \quad (20)$$

$$T^{(i+1)}(x) \rightarrow 0, \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Попутно заметим, что данная задача имеет единственное решение. Этот результат известен с начала века и убедиться в его справедливости довольно просто. В самом деле, если бы задача имела не одно, а, скажем, два решения $T_1^{(i+1)}(x)$ и $T_2^{(i+1)}(x)$, то, обращаясь к известной формуле Грина [56]:

$$\int_{G^+} v(x) \Delta u(x) dx =$$

$$= - \sum_{k=1}^3 \int_{G^+} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} dx + \int_{\partial G} v(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} ds_x,$$

и полагая $v(x) = u(x) = T_1^{(i+1)}(x) - T_2^{(i+1)}(x)$ с учетом того, что оба решения определены гра-

ничными данными $\varphi^{(i+1)}(x)$, $x \in \partial G$, приходим к заключению, что $\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0$, $x \in G^+$, $k = 1, 2, 3$. Данное условие вместе с требованием $u(\infty) = 0$ обеспечивает единственность.

Решение задачи будем искать в виде потенциала простого слоя:

$$T^{(i+1)}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{\delta^{(i+1)}(\xi)}{|x - \xi|} ds_\xi, \quad x \in G^+, \quad (21)$$

масс, распределенных по поверхности ∂G с непрерывной плотностью $\delta^{(i+1)}(x)$, $x \in \partial G$. Неизвестную плотность определим из граничного условия, которое приводит в соответствии с известной теоремой скачка [56] к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\delta^{(i+1)}(x) + \int_{\partial G} k(x, \xi) \delta^{(i+1)}(\xi) ds_\xi = \varphi^{(i+1)}(x),$$

$$x \in \partial G, \quad (22)$$

где ядро интегрального оператора уравнения дается выражением

$$k(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial m(x)} \frac{1}{|x - \xi|} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(u, m)}{|x - \xi|^2},$$

$$\cos(u, m) = \sum_{k=1}^3 \frac{x_k - \xi_k}{|x - \xi|} \cos(\xi_k, m),$$

$$u = x - \xi \in R^{(3)}.$$

В результате решения уравнения (22) вычисляем с использованием представления (21) приближения производных потенциала притяжения:

$$\partial_k V^{(i+1)}(x) = \frac{\partial V^{(i+1)}(x)}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial T^{(i+1)}(x)}{\partial x_k}, \quad (23)$$

где

$$\frac{\partial T^{(i+1)}(x)}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{x_k - \xi_k}{|x - \xi|^3} \delta^{(i+1)}(\xi) d\xi,$$

что дает возможность определить последующие приближения граничных значений функций

$$\cos(e_{i+1}, x_k) = \frac{\partial_k V^{(i+1)}(x)}{q^{(i+1)}(x)}, \quad x \in \partial G,$$

$$q^{(i+2)}(x) = g(x) - \omega^2 \sum_{k=1}^2 x_k \cos(x_k, e_{i+1}),$$

$$x \in \partial G, \quad (24)$$

$$\varphi^{(i+2)}(x) = q^{(i+2)}(x) \cos(e_{i+1}, m) -$$

$$- \chi(x) \cos(v, m),$$

$$x \in \partial G.$$

Определив приближения (24), переходим снова к решению граничной задачи (20)—(22) со сменой индекса $(i+1)$ -го приближения на $(i+2)$ -е. Это приведет к определению следующего в схеме (19) приближения $V^{(i+2)}(x)$ потенциала притяжения и т. д. и т. п.

Предложенный способ решения нелинейной граничной задачи (14) можно уточнить, если вместо приближений граничной функции $q(x)$, конструируемых на основе представления (18), использовать ее приближения, исходя из изображения

$$q(x) = g(x) \times$$

$$\left(1 + 2\omega^2 \frac{x_1 \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}}{q^2(x)} + \omega^4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{q^2(x)} \right)^{-1/2}$$

следующего из точной зависимости (17). В этой схеме приближения $V^{(i)}(x)$ потенциала притяжения $V(x)$ должны, по-видимому, сходиться быстрее.

Рассмотренные схемы восстановления потенциала притяжения нуждаются в строгом обосновании. Нам необходимо привести убедительные соображения не только в отношении разрешимости граничной задачи (21)—(22), которой заменена корректная в математическом плане задача (20), но и доказать сходимость последовательности решений линейных граничных задач (22), а также сходимость самих приближений $V^{(i)}(x)$ к потенциалу притяжения $V(x)$, $x \in \overline{G^+}$, являющемуся решением нелинейной граничной задачи (14). Все эти вопросы будут освещаться в последующих статьях.

Список литературы

1. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. — М.: Геодезиздат, 1961. — 256 с.
2. Игельсон Н. И. Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 424 с.
3. Стокс Дж. О силе тяжести на земной поверхности // Статьи о силе тяжести и фигуре Земли. — М.: Геодезиздат, 1961. — С. 11—44.
4. Пуанкаре А. Измерение силы тяжести и геодезия // Статьи о силе тяжести и фигуре Земли. — М.: Геодезиздат, 1961. — С. 103—135.
5. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии // Тр. ЦНИИГАиК. — М.: Геодезиздат, 1945. — Вып. 42. — С. 10—61.
6. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигура Земли // Тр. ЦНИИГАиК. — М.: Геодезиздат, 1960. — Вып. 131. — 290 с.
7. Юнг К. Гравиметрические методы прикладной геофизики // Прикл. геофизика. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — Вып. 1. — С. 53—204.
8. Нумеров Б. В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // Докл. АН СССР. — 1930. — № 21. — С. 569—574.
9. Новиков П. С. О единственности решения обратной задачи потенциала // Там же. — 1938. — № 3. — С. 165—168.
10. Сретенский Л. Н. Об одной обратной задаче теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1938. — № 5-6. — С. 551—570.
11. Замолев А. А. Об определении производных гравитационного потенциала и соотношений между моментами возмущающих масс по производной, заданной на плоскости // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. — 1939. — № 3. — С. 275—285.
12. Замолев А. А. Исследование двумерной обратной задачи потенциала // Там же. — 1941. — № 4-5. — С. 487—500.
13. Замолев А. А. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Там же. — 1942. — № 1-2. — С. 48—54.
14. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. — 1943. — № 39, № 5. — С. 195—198.
15. Андриев Б. А., Клушин И. Г. Геологическое истолкование гравитационных аномалий. — Л.: Недра, 1965. — 496 с.
16. Рапопорт И. М. Об одной задаче теории потенциала // Укр. матем. журн. — 1950. — 2, № 2. — С. 38—55.
17. Справочник геофизика. Гравиразведка. — М.: Недра, 1981. — 400 с.
18. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. — Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1966. — 560 с.
19. Сербуленко М. Г. Линейные методы разделения потенциальных полей // Приложение некоторых методов математики к интерпретации геофизических данных. — Новосибирск: Наука, 1967. — С. 5—75.
20. Страхов В. Н. Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — М.: 1972 — 78 с.

21. Алексидзе М. А., Гелашвили М. С., Картвелишвили К. М. Исследование некоторых вопросов трансформации потенциальных полей. — Тбилиси: Мецниереба, 1972. — 284 с.
22. Соколовский К. И. Экстремальный метод разделения и экстраполяции потенциальных полей // Теория и методика геофизических исследований. — Киев: Наук. думка, 1974. — С. 19—29.
23. Черный А. В., Гольцев В. Г. О восстановлении производных гармонических функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, по приближенно заданным их значениям в регулярной сети точек вещественной оси. Ч. 1—5 // Геофиз. журн. — 1979. — 1, № 2. — С. 48—56. — 1980. — 2, № 1. — С. 38—47. — 1982. — 4, № 6. — С. 78—86. — 1985. — 7, № 3. — С. 80—88.
24. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. математ. — 1956. — 20, № 6. — С. 819—842.
25. Иванов В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному // Там же. — 1956. — 20, № 6. — С. 793—818.
26. Иванов В. К. Распределение особенностей потенциала и пространственный аналог теоремы Поляна // Математ. сб. — 1956. — 40 (82), № 3. — С. 319—338.
27. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. — 92 с.
28. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980. — 288 с.
29. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. Н. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
30. Тихонов А. Н., Арсенин В. Н. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
31. Прилепко Л. И. К теории обратных задач обобщенных потенциалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1968. — 32 с.
32. Страхов В. Н. Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значения для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1976. — № 3. — С. 54—68.
33. Страхов В. Н. Эквивалентность в обратной задаче гравиметрии и возможность ее практического использования при интерпретации гравитационных аномалий. Ч. 1-2 // Там же. — 1980, № 2. — С. 44—64; — № 9. — С. 36—69.
34. Страхов В. Н. Об устойчивых методах решения линейных задач геофизики. Ч. 1-2 // Там же. — 1990, № 7. — С. 3—27; — № 8. — С. 37—64.
35. Цирульский А. В., Никонова Ф. И., Федорова Н. В. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с использованием эквивалентных семейств решений. — Свердловск: Изд. УНЦ Ин-та геофизики АН СССР, 1980. — 136 с.
36. Цирульский А. В. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. — 96 с.
37. Чередниченко В. Г. Плоские обратные задачи теории потенциала: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — М. 1983. — 18 с.
38. Черный А. В. Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1992. — 34 с.
39. Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 112 с.
40. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. — Киев: Наук. думка, 1978. — 223 с.
41. Оганесян С. М. Теория и численные методы решения трехмерных задач гравиметрии: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1987. — 36 с.
42. Балк П. И. Детерменистские модели интерпретации гравитационных полей: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1989. — 34 с.
43. Булах Е. Г. Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий. — Киев: Наук. думка, 1973. — 112 с.
44. Голыздра Г. Я. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения земной коры. — М.: Недра, 1988. — 212 с.
45. Кобрунов А. И. Экстремальные классы в задачах гравиметрии и их использование для построения плотностных моделей геологических сред: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1985. — 49 с.
46. Корчагин И. Н. Методы автоматизированного подбора и их использование при интерпретации геофизических данных: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1994. — 48 с.
47. Алексидзе М. А. Редукция силы тяжести. — Тбилиси: Мецниереба, 1965. — 256 с.
48. Черный А. В. О редуцировании значений силы тяжести: Автореф. дис. ... канд. геол.-мин. наук. — Новосибирск, 1970. — 20 с.
49. Черный А. В. Об уравнении силы тяжести // Докл. АН УССР. Сер. Б.—1970.—№ 2.—С.145—148.
50. Черный А. В. Конструкция главного фундаментального решения уравнения силы тяжести // Там же. — № 3. — С. 237—239.
51. Черный А. В. Редуцирование значений силы тяжести с земного рельефа на некоторую внешнюю поверхность // Там же. — № 6. — С. 519—521.
52. Черный А. В. О вычислении аномалий силы тяжести // Там же. — № 8. — С. 708—710.
53. Черный А. В. Описание гравитационных аномалий // Там же. — 1982. — № 4. — С. 18—21.
54. Чорний А. В. Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісн. Київ. ун-ту. Геологія. — 1995. — Вип. 13. — С. 72—80.
55. Алексидзе М. А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 412 с.
56. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 512 с.
57. Картвелишвили К. М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. — М.: Наука, 1982. — 94 с.