

Математичне забезпечення інтерпретації поля ΔB_a регіональних магнітних аномалій

© В. М. Коваленко-Завойський, І. М. Іващенко, 2006

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла 25 жовтня 2005 р.

Представлено членом редколегії М. І. Орлюком

Предлагаются алгоритмы интерпретации поля ΔB_a региональных магнитных аномалий (РМА), включающие в себя интерполяцию нормального геомагнитного поля на сферической поверхности, решение прямой задачи магнитометрии в сферических координатах, линеаризацию функции ΔB_a относительно составляющих вектора аномального магнитного поля, что с достаточной точностью позволяет интерпретировать поле ΔB_a в линейной постановке обратной задачи относительно намагниченности источников РМА.

Algorithms for interpretation of ΔB_a field of regional magnetic anomalies (RMA) are proposed, which include interpolation of normal geomagnetic field on spherical surface, solution of direct problem of magnetometry in spherical coordinates, linearization of ΔB_a function in relation to components of the vector of anomalous magnetic field. It has been shown that linearization allows to give interpretation of ΔB_a in linear setting of inverse problem as to magnetization of RMA sources with sufficient accuracy.

Проблеми, пов'язані з інтерпретацією поля ΔB_a регіональних магнітних аномалій (РМА), обумовлені переважно такими причинами:

- 1) інформація про нормальне геомагнітне поле B_0 , обчислене у вузлах географічної сітки меридіанів і паралелей, часто недостатня для потрібної деталізації поля ΔB_a РМА;
- 2) поле ΔB_a є нелінійною функцією вектора аномального поля B_a ;
- 3) як правило, поле РМА прив'язують до географічних координат, що потребує задання моделі джерел РМА також у географічних координатах; крім того, до цього спонукають і розміри РМА, за яких дається взнаки сферичність Землі. Все це потребує розробки адекватної полю ΔB_a методики інтерпретації РМА.

У вітчизняній літературі перші роботи, присвячені розв'язанню прямих і обернених задач гравіметрії і магнітометрії у сферичних координатах, пов'язані з іменами В. І. Старостенка і А. Г. Манукяна [1 — 4]. У цій статті розв'язання прямої задачі магнітометрії у сферичних координатах відрізняється тим, що поле обчислено безпосередньо від магнітних мас, що виділяються на поверхні апроксимуючого елемента. Зважаючи на неминучу наближеність апроксимації джерел аномального поля і складність точного обчислення поля від сферичної поверхні моделей, за апроксимуючий елемент обрано плоский трикутник, поле якого виражається кінцевими математичними формулами. Ці та інші особливості алгоритму роблять програму розв'язання прямої задачі досить швидкісною і гнучкою за апроксимаційними можливостями.

Як відомо, поле ΔB_a є нелінійною функцією складових B_{ax} , B_{ay} , B_{az} вектора B_a аномального поля, що утруднює кількісну інтерпретацію РМА. У високих широтах, де $\Delta B_a \approx B_{az}$, ці труднощі обходять інтерпретацією поля ΔB_a як вертикальної складової B_{az} . Щодо середніх широт, де вертикальна складова сумірна з іншими складовими, підміна ΔB_a на B_{az} призводить до грубих помилок. У статті розширені можливості інтерпретації поля ΔB_a лінеаризацією функції ΔB_a (B_{ax} , B_{ay} , B_{az}). Це дає змогу обчислювати вектор намагніченості джерел РМА методами розв'язування системи лінійних рівнянь за будь-якого співвідношення складових вектора B_a , тобто на довільних широтах.

Особливість інтерпретації РМА у сферичних координатах полягає в тому, що одночасово доводиться користуватися геоцентричною і локальними системами координат (рис. 1).

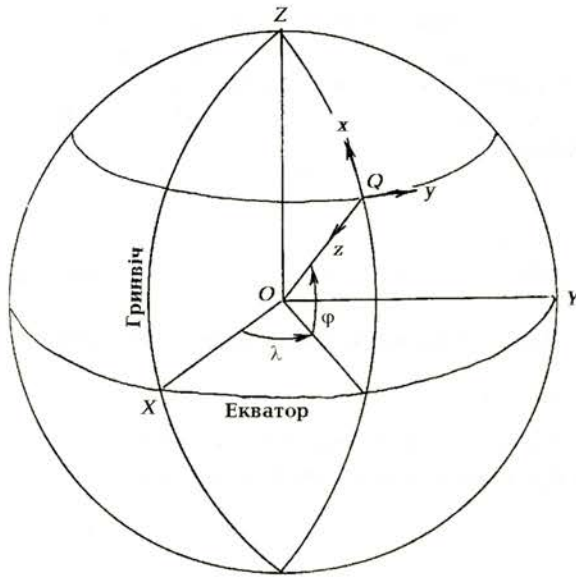


Рис. 1. Системи координат: O, X, Y, Z — геоцентрична; Q, x, y, z — локальна; O, R, φ, λ — географічна.

Геоцентрична декартова система O, X, Y, Z : точка O відповідає центру Землі; Z — спрямована від центра до Північного полюса; X — лінія перетину Гринвіцького меридіана з екватором; Y — обрана так, щоб система була правою.

Геоцентрична сферична (географічна) система O, R, φ, λ : початок O системи знаходиться у центрі Землі; радіус $R=R_0-z$, де R_0 — базовий (середній) радіус Землі, відносно якого задається глибина ($z \geq 0$) або висота ($z < 0$) точок моделі або поля; φ і λ — широта і довгота.

Локальна декартова система Q, x, y, z : положення центра Q задається географічними координатами R, φ, λ ; x спрямована по меридіану на північ; y — по паралелі на схід, z — вертикально вниз. У локальній системі задаються вектори намагніченості моделі і спостереженого r геомагнітного поля, а також видається на друк обчислене від моделі магнітне поле.

Математичне забезпечення інтерпретації РМА складається з комплексу алгоритмів і програм, призначених для використання поля ΔB_A як основного джерела інформації про РМА. Можливості програм продемонстровані на числових прикладах. Зокрема, програми придатні і для того випадку, коли аномалія задана якоюсь із складових B_{ax}, B_{ay} або B_{az} .

1. Алгоритм інтерполяції поля на поверхні сфери. Викладений нижче алгоритм придатний для інтерполяції поля, реперні значення якого задані у вузлах географічної сітки меридіанів і паралелей.

Задача інтерполяції полягає у обчисленні поля у точці Q , яка знаходиться всередині сферичного реперного чотирикутника, утвореного меридіанами і паралелями. Інтерполяція здійснюється трьома етапами: пошук чотирикутника, який містить точку Q ; уточнення положення точки Q в межах чотирикутника; обчислення поля у точці Q .

Пошук сферичного чотирикутника, якому належить точка поля $Q(\varphi, \lambda)$, здійснюється в рамках реперної сітки, що покриває одну або кілька РМА.

Для цього задають: φ_0 і λ_0 — координати лівого (західного) нижнього (південного) кута реперної сітки; $\Delta\varphi_0 \geq 0$ і $\Delta\lambda_0 \geq 0$ — кроки відповідно вздовж меридіана і паралелі. Координати лівого нижнього вузла кожного пробного вічка сітки обчислюють за формулами

$$\varphi_{0n} = \varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi_0, \quad n = 1, 2, \dots, N_0,$$

$$\lambda_{0k} = \lambda_0 + (k-1)\Delta\lambda_0, \quad k = 1, 2, \dots, K_0,$$

де N_0 і K_0 — відповідно число кроків по меридіану і паралелі.

Визначення координат вузлових точок здійснюють за допомогою двох циклів. У першому, зовнішньому, циклі (за індексом n) обчислюють різниці $(\varphi - \varphi_{0n})$ з нарощуванням n , доки не виконається нерівність $\varphi - \varphi_{0n} \geq 0$. Число n , за якого виконалася нерівність, визначає широту φ_{0n} , вище (північніше) якої знаходиться точка Q .

У другому, внутрішньому, циклі (за індексом k) обчислюють різниці $(\lambda - \lambda_{0k})$ з нарощуванням k , доки не виконається нерівність $(\lambda - \lambda_{0k}) \geq 0$. Число k , за якого виконалася нерівність, визначає довготу λ_{0k} , правіше (східніше) якої знаходиться точка Q .

Позначимо вершини сферичного прямокутника з точкою Q літерами $ABCD$ за рухом годинникової стрілки (рис. 2). Географічні координати цих вершин наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Координати вершин ABCD сферичного чотирикутника

A	$\varphi_A = \varphi_0 + (n-1)\Delta\varphi_0$	$\lambda_A = \lambda_0 + (k-1)\Delta\lambda_0$
B	$\varphi_B = \varphi_0 + n\Delta\varphi_0$	$\lambda_B = \lambda_A$
C	$\varphi_C = \varphi_B$	$\lambda_C = \lambda_0 + k\Delta\lambda_0$
D	$\varphi_D = \varphi_A$	$\varphi_D = \varphi_C$

Для уточнення положення точки Q чотирикутник поділено на два трикутники — ABC і CDA (рис. 2). Щоб визначити, в який з цих двох трикутників потрапляє точка Q, застосуємо ознаку

$$\frac{\varphi - \varphi_A}{\lambda - \lambda_A}$$

Якщо $\lambda - \lambda_A = 0$ або $\frac{\varphi - \varphi_A}{\lambda - \lambda_A} \geq \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\lambda_0}$, де $\Delta\varphi_0$ і $\Delta\lambda_0$

— сторони реперного чотирикутника, тоді точка Q належить трикутнику ABC; якщо ж $\frac{\varphi - \varphi_A}{\lambda - \lambda_A} < \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\lambda_0}$ — точка Q належить трикутнику CDA.

Для інтерполяції поля в межах трикутника припустимо, що точка Q знаходиться у трикутнику ABC і використаємо рівняння площини, що проходить через точки A, B, C [5]:

$$\begin{vmatrix} X - X_A & Y - Y_A & Z - Z_A \\ X_B - X_A & Y_B - Y_A & Z_B - Z_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A & Z_C - Z_A \end{vmatrix} = 0,$$

тобто сферичний трикутник апроксимується плоским. Якщо це рівняння переосмислити так, що координата Z є скалярним полем S, а інші координати — геоцентричними, то воно набирає вигляду

$$\begin{vmatrix} X - X_A & Y - Y_A & S - S_A \\ X_B - X_A & Y_B - Y_A & S_B - S_A \\ X_C - X_A & Y_C - Y_A & S_C - S_A \end{vmatrix} = 0.$$

Зауважимо, що під позначенням S може бути будь-яке поле, зокрема декартові складові B_{ax} , B_{ay} , B_{az} локальної системи або модуль вектора B.

Розв'язавши рівняння відносно S, одержимо формулу для обчислення інтерпольованого значення поля S у точці Q:

$$S = S_A - \frac{\Delta X(\Delta Y_B \Delta S_C - \Delta S_B \Delta Y_C) + \Delta Y(\Delta S_B \Delta X_C - \Delta X_B \Delta S_C)}{\Delta X_B \Delta Y_C - \Delta X_C \Delta Y_B},$$

де $\Delta X = X - X_A$, $\Delta X_B = X_B - X_A$, $\Delta X_C = X_C - X_A$, $\Delta Y = Y - Y_A$, $\Delta Y_B = Y_B - Y_A$, $\Delta Y_C = Y_C - Y_A$, $\Delta S_B = S_B - S_A$, $\Delta S_C = S_C - S_A$.

Оскільки точки A, B, C і Q задані у географічній системі координат R, φ , λ , то для використання розв'язку положення точок слід виразити у декартовій геоцентричній системі координат за формулами

$$X = R \cos \varphi \cos \lambda, \quad Y = R \cos \varphi \sin \lambda.$$

Рис. 2. Реперний прямокутник ABCD, утворений меридіанами і паралелями.

Якщо точка Q знаходиться у трикутнику CDA, замість точок A, B, C робимо заміну $C \rightarrow A$, $D \rightarrow B$, $A \rightarrow C$. Далі чотирикутник розбиваємо на трикутники BCD і BDA (рис. 2) і знову повторюємо обчислення за попереднім алгоритмом. Одержані два значення для однієї і тієї самої точки Q осереднюємо.

Точність інтерполяції залежить від неоднорідності поля, розміру реперного квадрата і положення точки Q в межах квадрата.

На території України неоднорідність поля є максимальною у південно-західній частині і мінімальною — у північно-східній. Щоб оцінити вплив неоднорідності поля на точність інтер-

поляції в межах всієї України, обрано два центра реперних квадратів. Один з них, з координатами $\varphi = 46^\circ$, $\lambda = 32^\circ$, знаходиться в центрі країни, там, де неоднорідність є проміжною між максимальною і мінімальною, а інший, з координатами $\varphi = 44^\circ$, $\lambda = 24^\circ$, — у межах максимальної неоднорідності. Навколо центрів задавали реперні квадрати з кутовою стороною 1, 2, 3, 4 градуси. Похибки обчислювали для модуля нормального поля в центрі реперних квадратів за формулою $|B_0| - |B_i|$, де $|B_0|$ — нормальне реперне поле, обчислене в центрі квадрата методом Гаусса; $|B_i|$ — інтерпольоване поле в центрі квадрата.

Результати обчислень подано в табл. 2. Як видно, похибки наростають із збільшенням розміру квадрата; крім того, там, де неоднорідність поля більша, і похибка більша. В межах всієї території України одноградусна реперна сітка забезпечує точність інтерполяції нормального поля не гірше ніж 2,5 нТл.

2. Обчислення поля моделі (пряма задача). В основу прямої задачі в географічних координатах покладено алгоритм, написаний у декартових координатах [6]. У новому варіанті системою декартових координат є геоцентрична система O, X, Y, Z . Проте всі вхідні дані і результати обчислень задають і одержують у декартових координатах x, y, z локальної системи координат. Геоцентрична декартова система є, так би мовити, внутрішньою системою, з якою інтерпретатор безпосередньо не має справи.

Модель джерела РМА може складатися з одного або кількох блоків, форма яких апроксимується плоскими трикутниками.

Апроксимація форми джерела РМА. На поверхню блока умовно натягають апроксимаційну сітку, лінії якої нагадують меридіани і паралелі у тому сенсі, що паралелі не перетинаються між собою, а меридіани збігаються у двох точках — полюсах (рис. 3). Якщо блок сферичний, сітка з полюсами у діаметрально протилежних точках перетворюється на сітку сферичної системи координат на зразок географічної. Густаність сітки обирають достатньою для апроксимації блока з потрібною деталісттю. Кожне чотирикутне вічко сітки розбивають на два трикутники.

Меридіани і паралелі блока нумерують за такими правилами: якщо на обраний полюс дивитися ззовні блока, то номер $m \in 1 \div M$ меридіана зростає за рухом годинникової стрілки, а номер $n \in 1 \div N$ паралелі — від глядача (рис. 3). Оскільки полюсів два, обраним може бути і другий полюс, але правило нумерації меридіанів і паралелей зберігається, тільки уже відносно другого полюса. Результат обчислень не залежить від вибору системи координат і вибору полюса. Полюс позначає одним індексом, який є номером відповідної паралелі. Так, на рис. 3 зображено блок з чотирма паралелями, де за перший полюс обрано верхню точку P_1 збігу меридіанів, за другий — точку P_4 , де 4 — кількість паралелей.

Числовий матеріал задають у вигляді матриці U_{mn} розміром $M \times N$; де перший індекс — номер меридіана, другий — номер паралелі:

Таблиця 2. Похибки інтерполяції модуля $|B_0|$ нормального поля в центрі реперних квадратів

Сторона квадрата, град	$ B_0 $ в центрі квадрата, нТл	Абсолютна похибка $\delta B_0 $, нТл	Відносна похибка $\delta B_0 / B_0 $, %
Координати центра $\varphi_0 = 44^\circ$, $\lambda_0 = 24^\circ$			
0		0,0	0,
1	47483,8	2,5	0,0054
2		10,2	0,0215
3		22,1	0,0465
4		39,2	0,0825
Координати центра $\varphi_0 = 46^\circ$, $\lambda_0 = 32^\circ$			
0		0,0	0,
1	48803,8	2,1	0,0043
2		8,2	0,0161
3		18,5	0,0379
4		33,0	0,0676

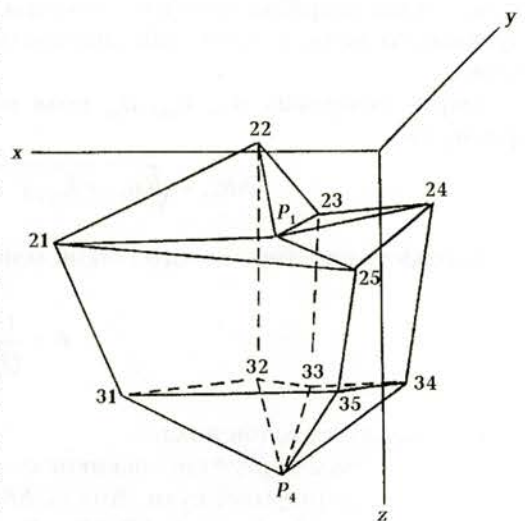


Рис. 3. Аксонометрична діаметрична проекція блока, окресленого сіткою апроксимуючих меридіанів і паралелей. Перша паралель знаходиться у полюсі P_1 , кінцева (четверта) — у полюсі P_4 . Вузли сітки оцифровані так, що перша цифра позначає номер паралелі (рядка матриці U_{mn}), друга — номер меридіана (стовпчика матриці).

$$(U_{mn}) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} & \dots & U_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \dots & U_{mn} & \dots & U_{mN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{M1} & U_{M2} & \dots & U_{Mn} & \dots & U_{MN} \end{pmatrix}.$$

Матриця являє собою вузли $U_{mn} = U_{mn}(z, \varphi, \lambda)$ замкненої апроксимаційної сітки, розрізаної по лінії першого меридіана і розпростертої на площині.

Організація числового матеріалу у вигляді матриці спрощує числовий опис блока, дає змогу автоматизувати вибір координат апроксимуючих трикутників і суттєво скорочує кількість повторів числового матеріалу блока; чим більша матриця U_{mn} , тим менша відносна кількість повторів, які зумовлені таким: координати z, φ, λ кожного члена останнього рядка матриці мають дорівнювати координатам першого рядка, тобто $U_{Mn} = U_{1n}$, ($n = 1 \div N$). Унаслідок цього число M рядків матриці на одиницю більше за число меридіанів апроксимуючої сітки. Повторюються також координати вузлів сітки у першому і останньому стовпчиках, які описують перший і другий полюси P сітки, тобто

$$U_{11} = U_{21} = U_{31} = \dots = U_{M1} \quad \text{і} \quad U_{1N} = U_{2N} = U_{3N} = \dots = U_{MN}.$$

Нарешті, повторюються координати точок дотику однойменних ліній сітки або якщо чотирикутне вічко сітки вироджується у трикутник чи лінію. Виродження чотирикутників у трикутники відбувається на полюсах сітки (рис. 3).

Магнітна апроксимація джерел РМА. Намагніченість кожного блока вважається однорідною. Якщо магнітоактивне тіло намагнічене неоднорідно, його розбивають на блоки, які можна вважати однорідно намагніченими.

Для блоків, розташованих на значних відстанях один від одного, намагніченість може бути різною хоч би тому, що проявляється неоднорідність нормального геомагнітного поля. Якщо припустити, що намагніченість джерел РМА утворилася під дією сучасного геомагнітного поля, то вона також мусить мати той самий характер неоднорідності, що і намагнічувальне поле. Отже, потрібна прив'язка вектора намагніченості кожного блока до напрямку намагнічувального поля, в якому він знаходиться. За точку прив'язки обирають приблизно центр блока.

Окрім складових B_{Mx}, B_{My}, B_{Mz} поля моделі в локальній системі обчислюють поле ΔB_M за формулою

$$\Delta B_M = \sqrt{(B_{0x} + B_{Mx})^2 + (B_{0y} + B_{My})^2 + (B_{0z} + B_{Mz})^2} - |B_0|. \quad (1)$$

Близкість спостереженого і обчисленого полів оцінюють за допомогою функціоналу

$$F = \frac{1}{Q} \sqrt{\sum_{q=1}^Q (\Delta B_a - \Delta B_M)^2 q}, \quad (2)$$

де Q — кількість точок поля.

Якщо аномалія представлена якоюсь складовою, наприклад B_{az} , функціонал визначають за цією самою формулою, куди замість ΔB_a і ΔB_M підставляють складові B_{az} і B_{Mz} .

3. Лінеаризація функції $\Delta B_a (B_{ax}, B_{ay}, B_{az})$. Лінеаризацію функції ΔB_a з метою спрощення інтерпретації запропонували Ю. П. Тафеев [7], О. А. Логачев, В. П. Захаров [8]. Проте це було зроблено не у досить загальній формі, спрямованій лише на інтерпретацію поля ΔB_a як складову B_{az} . Тому перш ніж лінеаризувати функцію ΔB_a відносно складових намагніченості, лінеаризуємо її спочатку відносно складових B_{ax}, B_{ay}, B_{az} . Як уже зазначалося, поле РМА, переважно, описують величиною

$$\Delta B_a = |B| - |B_0| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} - \sqrt{B_{0x}^2 + B_{0y}^2 + B_{0z}^2} =$$

$$= \sqrt{(B_{0x} + B_{ax})^2 + (B_{0y} + B_{ay})^2 + (B_{0z} + B_{az})^2} - |B_0|, \quad (3)$$

де $|B|$ — модуль спостереженого поля; $|B_0|$ — модуль нормального поля; B_{0i}, B_{ai} ($i=x, y, z$) — складові нормального і аномального поля.

Розкладемо функцію (3) в ряд Тейлора і, користуючись тим, що для РМА $|B_a| \ll |B_0|$, відкинемо нелінійні члени ряду. В результаті одержимо наближену формулу

$$\begin{aligned} \Delta B'_a &= \frac{B_{0x}}{|B_0|} B_{ax} + \frac{B_{0y}}{|B_0|} B_{ay} + \frac{B_{0z}}{|B_0|} B_{az} = \\ &= t_x B_{ax} + t_y B_{ay} + t_z B_{az}, \end{aligned} \quad (4)$$

де введено позначення $t_i = B_{0i}/|B_0|$.

З формули (4) видно, що наближена величина $\Delta B'_a$ є скалярним добутком векторів t і B_a . Це дає змогу подати величину $\Delta B'_a$ у формі, інваріантній відносно системи координат:

$$\Delta B'_a = |t| |B_a| \cos \alpha = |B_a| \cos \alpha, \quad (5)$$

де α — кут між векторами t і B_a .

Оцінимо величину різниці $\Delta B_a - \Delta B'_a$, яка характеризує точність наближеної формули (5). Припустимо, що модуль $|B_0| = 50000$ нТл (для широт України). Тоді відношенням модулів $|B_a|/|B_0|$ відповідають різниці $\Delta B_a - \Delta B'_a$, наведені у четвертій колонці табл. 3. З останньої колонки видно, що зі зменшенням величини на порядок, різниця зменшується на два порядки, причому максимум похибки досягається при $\alpha = 90^\circ$ і спадає до нуля при $\alpha = 0^\circ$ і 180° .

Оскільки на території України амплітуди РМА менші за 500 нТл, тобто відношення менші за 0,01, їм відповідають максимальні різниці, менші за 2,5 нТл.

Таблиця 3. Порівняння величин ΔB_a і $\Delta B'_a$ (нТл), обчислених за точною (3) і наближеною (5) формулами за умови, що модуль $|B_0| = 50000$ нТл

α , град	ΔB_a	$\Delta B'_a$	$\Delta B_a - \Delta B'_a$
$ B_a / B_0 = 0,1$			
0	5000,	5000,	,0000
30	4388,	4330,	,5749
60	2678,	2500,	,178,3
90	249,4	-,0000	,249,4
120	-2303,	-2500,	,197,0
150	-4262,	-4330,	,68,37
180	-5000,	-5000,	,0000
$ B_a / B_0 = 0,01$			
0	500,0	500,0	,0000
30	433,6	433,0	,6186
60	251,9	250,0	,1866
90	2,500	-,0000	,2,500
120	-248,1	-250,0	,1884
150	-432,4	-433,0	,6314
180	-500,0	-500,0	,0000
$ B_a / B_0 = 0,001$			
0	50,00	50,00	,0000
30	43,31	43,30	,0058
60	25,02	25,00	,0187
90	2,500	-,0000	,0250
120	-24,98	-25,00	,0188
150	-43,29	-43,30	,0067

Враховуючи, що похибки у визначенні РМА переважно більші за 2,5 нТл [9], можна відзначити, що наближена формула (5) досить точно описує поле ΔB_a РМА для всієї території України.

Перейдемо до інших особливостей формули (4). У високих широтах аномалії ΔB_a часто інтерпретують як вертикальну складову B_{az} . Формула (4) дає змогу обґрунтувати це дуже просто: у високих широтах вектор нормального поля майже вертикальний, тому складові t_x і t_y близькі до нуля, тоді як $t_z \approx 1$. Підставивши ці значення у формулу (4), одержимо $\Delta B'_a \approx B_{az}$. У низьких широтах поле ΔB_a можна інтерпретувати як складову B_{ax} . Справді, у низьких широтах $t_x \approx 1$, а t_y і t_z близькі до нуля, тому $\Delta B'_a \approx B_{ax}$. З формули (4) стає очевидною ще одна особливість поля ΔB_a . Припустимо, що намагніченість джерела РМА створена сучасним геомагнітним полем. Тоді складові B_{0i} і B_{ai} пов'язані між собою так, що зміна знака складових B_{0i} приводить до зміни знака і складових B_{ai} . Оскільки у формулі (4) ці складові перемножуються, знак їхнього добутку не змінюється. Отже, якщо намагніченість створена сучасним геомагнітним полем, тоді функція $\Delta B'_a$, а отже і ΔB_a , є парною відносно зміни знака складових B_{0i} .

Зазуважимо, що таке припущення про намагніченість джерел РМА, з огляду на уявлення про рівноважний стан намагніченості земної кори, було обґрунтоване з фізичної позиції ще у 1969 р. [10] і підтверджується усією подальшою практикою інтерпретації РМА [11 — 15]. Продемонструємо згадані особливості поля ΔB_a на прикладі блоків з горизонтальними розмірами $\Delta\varphi = 2^\circ$, $\Delta\lambda = 2^\circ$ і вертикальним розміром $\Delta z = 35$ км. Для ілюстрації залежності величини ΔB_a від напрямку поля B_0 блоки були розміщені вздовж меридіана з довготою 295° на широтах 64° , 0° , і -64° , на глибині верхньої кромки 5 км. Намагніченість блоків спрямована по нормальному полю епохи 2005 року, а модулі намагніченості пропорційні модулям нормального поля в центральних точках блоків і дорівнюють: $|I| (64^\circ) = 5,7$; $|I| (0^\circ) = 2,9$; $|I| (-64^\circ) = 3,9$ А/м. Оскільки демонстрація залежності поля ΔB_a від B_0 здійснена на теоретичному прикладі, зазначимо, що аналогом ΔB_a є поле ΔB_M , яке обчислюють розв'язуванням прямої задачі, а аналогом I , очевидно, є формула

$$\Delta B'_M = \frac{B_{0x}}{|B_0|} B_{Mx} + \frac{B_{0y}}{|B_0|} B_{My} + \frac{B_{0z}}{|B_0|} B_{Mz} = I_i B_{Mi}. \quad (6)$$

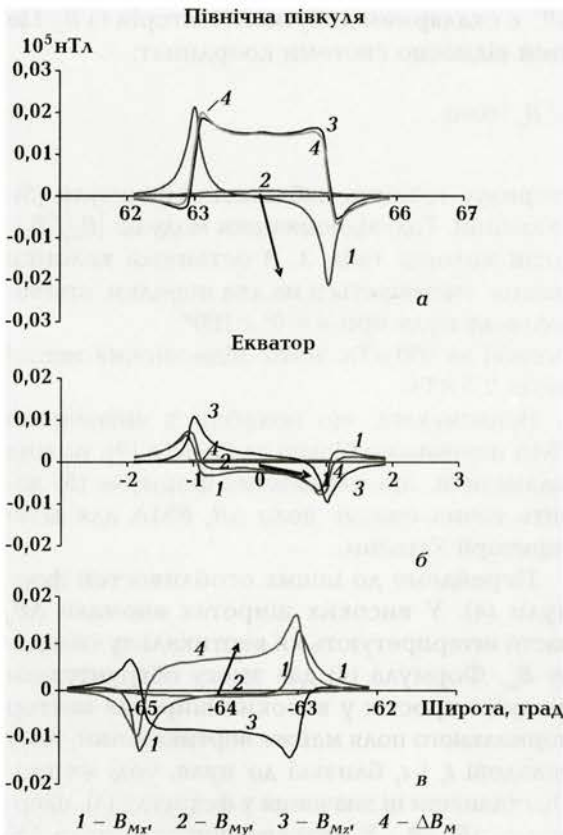


Рис. 4. Графіки складових B_{Mx} , B_{My} , B_{Mz} і ΔB_M аномального поля над блоками з центром на широтах 64° (а), 0° (б), -64° (в). Стрілкою в умовному масштабі показано напрямок нормального поля над блоками. Намагніченість блоків спрямована по нормальному полю і пропорційна модулю поля на певній широті.

чина досить точно описує функцію ΔB_M у вигляді лінійної форми відносно складових аномального поля. Формула (6) є першим кроком до лінеаризації величини ΔB_M відносно складових намагніченості моделі. Другий крок можна здійснити досить точно завдяки тому, що намагніченість джерела РМА переважно менша 5 А/м, що дає змогу знехтувати розмагнічувальним полем моделі.

Визначимо спочатку лінійні форми для складових поля B_M одного блока, зваживши на описані у розд. 2 правила апроксимації блока трикутниками.

Густина σ магнітних мас на площині трикутника дорівнює

Графіки складових B_{Mx} , B_{My} , B_{Mz} і ΔB_M поля блоків і вектори нормального (намагнічувального) поля B_0 зображені вздовж меридіонального профіля, що проходить через центри блоків (рис. 4). Незважаючи на те що над блоками а і в нормальне поле не строго вертикальне, а над блоком б не строго горизонтальне, очікувані особливості поля ΔB_a досить переконливо проявилися на теоретичних графіках ΔB_M і у формулі (6). Так, на широті 64° (рис. 4, а) крива ΔB_M ближче всього до кривої B_{Mz} , яка у формулі (6) множиться на домінуючу складову B_{0z} ; на широті 0° (рис. 4, б) крива ΔB_M ближче всього до кривої B_{Mx} , яка множиться на домінуючу складову B_{0x} ; на широті -64° (рис. 4, в) поле $\Delta B_M \approx B_{Mz}$, тобто також відповідає домінуючій складовій B_{0z} , але з протилежним знаком. На графіку це проявилось у тому, що крива ΔB_M є дзеркально симетричною складовій B_{Mz} . Отже, якщо джерела РМА намагнічені сучасним полем, знак величини ΔB_a має не змінюватися з переходом з півночі на південь, незважаючи на те що складова B_{0z} , а отже і намагніченість I_z , змінює знак.

Збереження знака аномалії ΔB_a з переходом з півночі на південь є непрямом ознакою справедливості згаданого припущення про намагніченість джерел РМА сучасним полем.

4 Лінеаризація функції $\Delta B_M(I_x, I_y, I_z)$. Цінність формули (6) не лише у прозорості характеру залежності функції ΔB_M від складових вектора B_M ; більш вагомим є те, що при $\Delta B_M / |B_0| < 0,01$ вели-

$$\sigma = n_x I_x + n_y I_y + n_z I_z = n_i I_i \quad (i = x, y, z),$$

де n_i — складові зовнішньої нормалі до площини апроксимуючого трикутника. (Тут і далі для скорочення виразів використано правило, згідно з яким знак суми не пишемо, якщо координатний індекс повторюється двічі у множниках одного доданка суми; знак суми використано лише для некоординатних індексів.)

Поле трикутника з густиною σ магнітних мас дорівнює

$$B_{Mi} = \sigma h_i = n_j I_j h_i = h_i n_j I_j = A_{ij} I_j \quad (i, j = x, y, z),$$

де h_i — поле трикутника з одиничною густиною магнітних мас; $A_{ij} = h_i n_j$ — коефіцієнти лінійної форми поля трикутника, які залежать від координат U вершин трикутника і точки Q поля.

Формули для обчислення h_i поля тут не наведено, з ними можна ознайомитися у статті [6]. Для двох трикутників, які апроксимують одне вічко сітки, одержуємо:

$$B_{Mi} = B_{Mi}^{(1)} + B_{Mi}^{(2)} = (A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)}) I_j = D_{ij} I_j,$$

де D_{ij} — коефіцієнт, що залежить уже від координат чотирьох вершин вічка. Намагніченість I_j винесено за дужки, оскільки блок намагнічений однорідно.

Якщо блок апроксимовано сіткою з M меридіанів і N паралелей, кількість вічок (коефіцієнтів D_{ij}) дорівнює $(M-1) \times (N-1)$. Отже, поле від усього однорідно намагніченого блока дорівнює

$$B_M = \left(\sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} D_{ij}^{(m,n)} \right) I_j = G_{ij} \cdot I_j, \quad (7)$$

де $G_{ij} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} D_{ij}^{(m,n)}$.

Остання формула дає змогу здійснити другий крок лінеаризації функції ΔB_M відносно намагніченості.

Підставивши вираз (7) у формулу (6), одержуємо шукану лінійну форму для одного блока і однієї точки поля:

$$\begin{aligned} \Delta B'_M = t_i G_{ij} I_j = & (t_x G_{xx} + t_y G_{yx} + t_z G_{zx}) I_x + (t_x G_{xy} + t_y G_{yy} + t_z G_{zy}) I_y + \\ & + (t_x G_{xz} + t_y G_{yz} + t_z G_{zz}) I_z = C_j I_j, \end{aligned} \quad (8)$$

де введено позначення $C_j = t_i G_{ij}$.

Лінійна форма для моделі з K блоків має вигляд

$$\Delta B'_M = \sum_{k=1}^K \Delta B_M^{(k)} = \sum_{k=1}^K C_j^{(k)} I_j^{(k)}.$$

Різні блоки можуть мати різну намагніченість, тому складові $I_j^{(k)}$ не винесені за знак суми.

5. Обчислення намагніченості моделі (обернена задача). Лінійна форма (8) відкриває можливості для інтерпретації поля ΔB_a за допомогою розв'язування лінійних рівнянь.

Складемо спочатку систему рівнянь для випадку, коли джерело РМА апроксимоване одним блоком ($k=1$). Нагадаємо, що коефіцієнти $C_j^{(k)}$ у формулі (8) залежать не лише від координат блока, а й від координат точки поля q , тобто $C_j^{(k)} = C_j^{(k,q)}$, де q — індекс точки поля.

Згідно з тим, що $\Delta B'_M \approx \Delta B_a$, з формули (8) одержуємо систему наближених рівнянь для складових намагніченості блока:

$$C_j^{(k,q)} I_j \approx \Delta B_a^{(q)}, \quad q = 1 \div Q, \quad (9)$$

де q — номер точки поля.

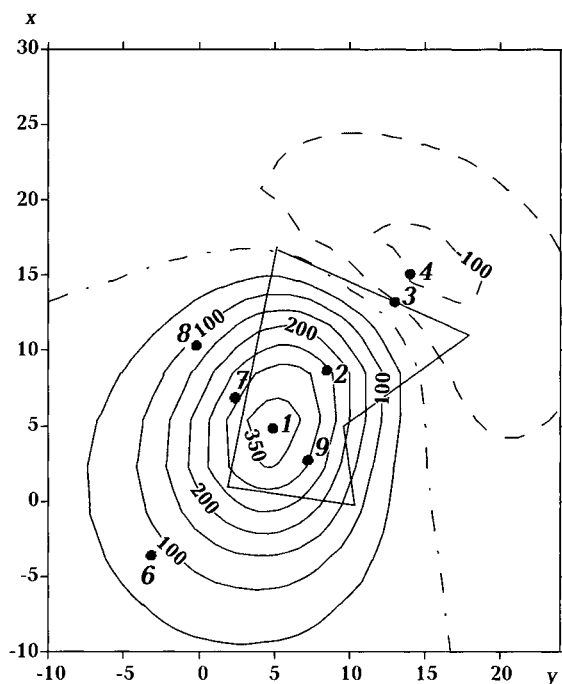


Рис. 5. Поле ΔB_M над одноблочною моделлю, обчислене за намагніченості $I_x=2$, $I_y=3$, $I_z=3$ А/м; п'ятикутник — верхня кромка блока, зображеного на рис. 3; ізолінії: суцільні — позитивні; штрихові — негативні, штрихпунктирні — нульова.

Т а б л и ц я 5. Результати обчислення намагніченості одноблочної моделі за різних напрямків нормального поля і намагніченості

Рис. 6	Точка поля	Поле, нТл		Намагніченість, А/м		Відносна похибка, %
		ΔB_M	B_{0x} B_{0y} B_{0z}	Точна $I_x^{(1)}$ $I_y^{(1)}$ $I_z^{(1)}$	обчислена I_x I_y I_z	
а	3	45,07	20 000	2,	1,936	-3,2
	6	43,47	0	0,	-0,003	0,0
	8	14,92	50 000	5,	4,872	-2,56
б	3	2325	53 852	5,3852	5,38	-0,096
	6	-138,8	0	0,	0,01	0,0
	8	-104,2	0	0,	-0,003	0,0
в	3	-48,49	20 000	2,	1,897	-5,15
	6	137,95	0	0,	-0,009	0,0
	8	262,19	-50 000	-5,	-5,047	-0,94

чок поля: (2, 3, 4), (7, 1, 9), (4, 6, 9), зображених на рис. 5 на фоні ізоліній поля ΔB_M слабонамагнітного блока.

За результатами обчислень можна дійти таких висновків:

- за значень поля $\Delta B_M > 1000$ нТл (сильномагнітна модель) похибка обчислення намагніченості сягає 30 %, а при $\Delta B_M < 1000$ нТл (слабонамагнітна модель), характерних для РМА, відносна похибка не перевищує перших відсотків;

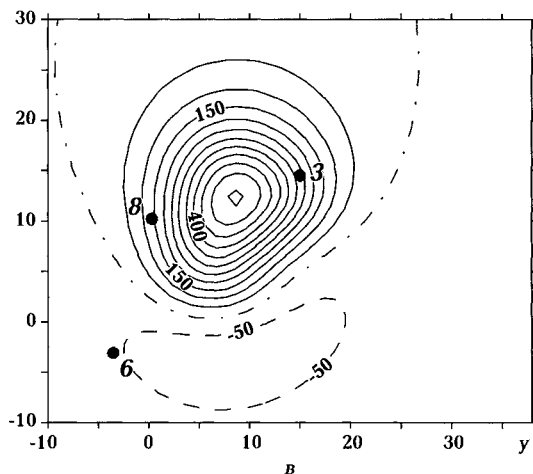
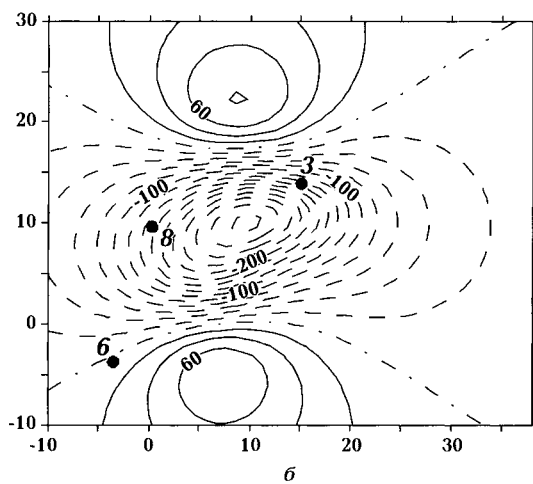
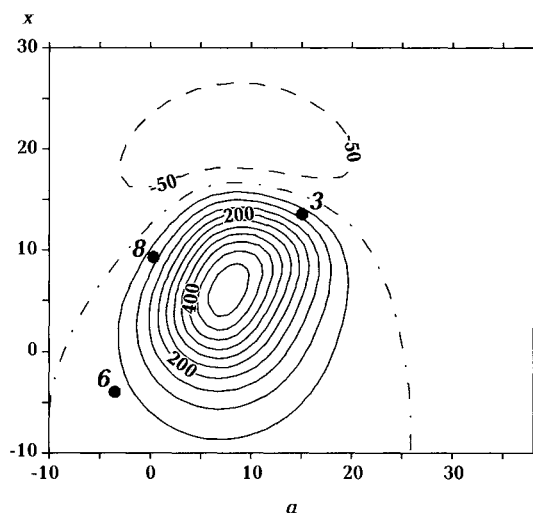


Рис. 6. Поля ΔB_M над одноблочною моделлю, обчислені за різних значень нормального поля B_0 і намагніченості I , наведених в табл. 5; п'ятикутник — верхня кромка блока, зображеного на рис. 3

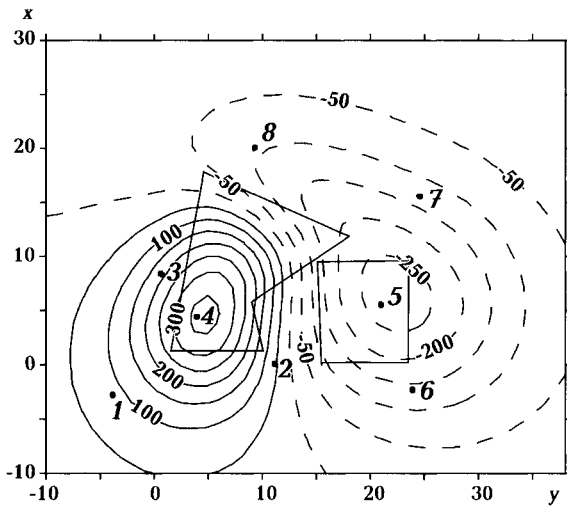


Рис. 7. Поле ΔB_M , обчислене від двоблочної моделі, обчислене при значеннях B_0 і I , наведених в табл. 6. Значення поля в оцифрованих точках використані для складання системи рівнянь (11). П'ятикутник — верхня кромка блока 1, чотирикутник — верхня кромка блока 2.

Таблиця 6. Результати обчислення намагніченості $I^{(1)}$ та $I^{(2)}$ двоблочної моделі

Блок, k	Точка поля на рис. 7	Поле, нТл		Намагніченість, А/м		Відносна похибка, % $(I_x - I_x^{(k)})/I_x^{(k)}$ $(I_y - I_y^{(k)})/I_y^{(k)}$ $(I_z - I_z^{(k)})/I_z^{(k)}$
		ΔB_M	B_{0x} B_{0y} B_{0z}	точна $I_x^{(k)}$ $I_y^{(k)}$ $I_z^{(k)}$	обчислена I_x I_y I_z	
1	1	92,594	20 000	2,	2,03	1,5
	2	66,406		3,	2,99	-0,3
	4	362,14		3,	3,00	0,0
2	5	-276,74	40 000	2,	1,99	-0,5
	6	-144,16		1,	0,97	-3,0
	7	-103,38		-3,	3,00	0,0

Південній півкулі. Продемонструємо це на такому прикладі. Поле ΔB_M (рис. 6) обчислене над одним і тим самим блоком у трьох напрямках нормального поля, які репрезентують зміну векторів B_0 і I з переходом з півночі на південь. Відповідні рис. 6 значення нормального поля і намагніченості наведено у табл. 5 під позначками $a - c$. Як видно, поле ΔB_M на рис. 6, b дзеркально симетричне полю на рис. 6, a відносно геомагнітного екватора, а на екваторі (рис. 6, b), де $\Delta B_M = B_{Mx}$, дзеркальна симетрія проявилася в межах однієї аномалії. (У ближчому розгляданні симетрія не строга, що зумовлено відсутністю дзеркальної симетрії форми блока.) На всіх трьох картах координати точок 3, 6, 8 поля, обраних для складання системи рівнянь, однакові.

За даними табл. 5 зміна напрямку нормального поля помітно не позначилася на точності обчислення намагніченості блока. Звідси можна зробити висновок, що за допомогою системи рівнянь (9) за полем ΔB_M можна досить точно визначати намагніченість джерел РМА на всіх широтах земної кулі.

Наступним прикладом є розв'язки, одержані для двоблочної моделі з системи рівнянь (11). Форма першого блока зображена на рис. 3, форма другого являє собою горизонтальний прямокутний паралелепіпед розміром $10 \times 10 \times 20$ км, верхня кромка якого знаходиться на глибині

• при $\Delta B_M < 1000$ нТл розв'язки оберненої задачі практично інваріантні відносно вибору точок поля.

Звертає увагу стійкість розв'язків. Так, незважаючи на те, що точки 7, 1, 9 розташовані досить близько до епіцентра аномалії, внаслідок чого задача погано обумовлена, вектор намагніченості обчислений досить точно. Висока стійкість розв'язків має практичне значення для слабких аномалій, оскільки захаращеність периферії аномалії полями сусідніх тіл змушує згущувати точки, обрані для складання системи (9), біля епіцентра аномалії.

Водночас слід зазначити, що точність безпосередньо не залежить від намагніченості джерела, а згідно з формулою (5) пов'язана з інтенсивністю аномального поля. Справді, навіть за сильної намагніченості джерела можна відступити від епіцентра аномалії настільки, щоб аномальне поле було досить слабким. Унаслідок цього зростає точність лінійної форми, а отже, і рівнянь (9).

У попередньому прикладі напрямки нормального поля і намагніченості був зафіксований, змінювався лише модуль намагніченості.

Розглянемо ближче випадок, коли поле і намагніченість змінюються, причому так, що вектори B_0 і I весь час збігаються за напрямком, що, як відзначалось, є досить поширеним явищем. Унаслідок цього з переходом від Північної до Південної півкулі знак аномалії ΔB_M не змінюється, що утруднює оцінку напрямку намагніченості. Запропонований аналітичний спосіб дає змогу визначити намагніченість джерел як у Північній, так і в

10 км. Взаємоположення проєкцій верхніх кромок блоків на горизонтальну поверхню зображено на карті поля ΔV_M (рис. 7). Задана намагніченість блоків і результати її обчислення по полю ΔV_M представлені в табл. 6. Хоча кількість невідомих порівняно з одноблочною моделлю зростає від 3 до 6, точність розв'язків практично не змінилася; збереглася також інваріантність розв'язків щодо зміни комбінації точок поля.

Таким чином, намагніченість джерел РМА можна обчислювати за допомогою системи лінійних рівнянь, незважаючи на те, що вільні члени ΔV_M , а отже і ΔV_A , є нелінійними функціями намагніченості.

Список літератури

1. Манукян А. Г. Решение трехмерной задачи магнитометрии на сфере: Тез. докл. науч.-техн. конф. мол. геофизиков Закавказья. — Ленинакан, 1975. — С. 27—28.
2. Старостенко В. И., Манукян А. Г., Заворотько А. Н. Построение плотностных моделей крупных структур планет // Докл. АН УССР. Сер. Б. — 1983. — № 5. — С. 21—24.
3. Старостенко В. И., Манукян А. Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1983. — № 12. — С. 34—50.
4. Манукян А. Г., Старостенко В. И. Решение прямой задачи магнитометрии на шарообразной Земле // Докл. АН УССР. Сер. Б. — 1984. — № 5. — С. 11—17.
5. Градштейн И. Н., Семенгяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, — 1964. — 608 с.
6. Завойский В. Н. Вычисление магнитных полей анизотропных трехмерных тел в задачах магниторазведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1978. — № 1. — С. 76—85.
7. Тафеев Ю. П. О расчетах магнитного поля ΔT // Геофизическая разведка рудных месторождений. — М.: Госгеолиздат, 1953. — С. 76—81.
8. Логачев А. А., Захаров В. П. Магниторазведка. — Л.: Недра. — 1979. — 351 с.
9. Крутиховская З. А., Пашкевич И. К., Силина И. М. Магнитная модель и структура земной коры Украинского щита. — Киев: Наук. думка, 1982. — 215 с.
10. Завойский В. М. Величина Q как показатель равноважного stanu породы в геомагнитном поле // Доп. АН УРСР. Сер. Б. — 1969. — № 8. — С. 720—721.
11. Пашкевич И. К., Марковский В. С., Орлюк М. И., Кутюва А. П., Таращан С. А. Петрологическое истолкование природы региональной компоненты аномального поля // Геофиз. журн. — 1986. — 8, № 2. — С. 26—36.
12. Пашкевич И. К., Марковский В. С., Орлюк М. И., Елисеєва С. В., Мозговая А. П., Таращан С. А. Магнитная модель литосферы Европы. — Киев: Наук. думка. — 1990. — 167 с.
13. Петромагнитная модель литосферы / Отв. ред. Д. М. Печерский. — Киев: Наук. думка. — 1994. — 176 с.
14. Орлюк М. И. Пространственные и пространственно-временные магнитные модели разноранговых структур литосферы континентального типа // Геофиз. журн. — 2000. — 22, № 6. — С. 148—165.
15. Гордиенко В. В. Магнитные модели земной коры территории Украины. — Киев: «Знание». — 2000. — 92 с.