

Трехмерное конечно-разностное моделирование волнового поля с учетом сферичности Земли

А.О. Верпаховская, В.Н. Пилипенко, 2020

Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 30 сентября 2020 г.

Трехмерное моделирование волнового поля дает возможность получить представление о распространении сейсмических волн в геологической среде разной степени сложности строения. При этом расположение источника колебаний может быть задано на любой глубине. Таким образом, трехмерное моделирование волнового поля можно применять при решении задач сейсмологии, связанных с природой напряжений внутри Земли, при исследованиях опасных явлений эндогенного происхождения, а также при изучении глубинного строения Земли, границ ее раздела и тектонических структур. Все известные методы численного моделирования волнового поля основаны на решении уравнения эластодинамики разными методами с заданными граничными и начальными условиями и подразделяются на осесимметричные и псевдоспектральные. Первые основаны на аппроксимации структурной модели как вращательно-симметричной вдоль вертикальной оси источника колебаний и решении уравнения эластодинамики в цилиндрических или сферических координатах, а вторые — на решении уравнения эластодинамики с использованием преобразования Фурье.

В Институте геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины разработан метод конечно-разностного моделирования волнового поля как в двумерном, так и трехмерном варианте. Выбор конечно-разностного метода для продолжения волнового поля объясняется его высокой устойчивостью и точностью, а также возможностью использовать при его применении широкий класс неоднородных моделей среды. Конечно-разностное моделирование основано на решении скалярного волнового уравнения с применением пространственно-временной сетки. При решении задач сейсмологии в случае трехмерного моделирования волнового поля необходимо учитывать сферичность Земли. Для этого в дифференциальном волновом уравнении предусмотрен переход с декартовой на сферическую систему координат. В статье рассмотрены теория и алгоритм разработанного трехмерного моделирования волнового поля конечно-разностным методом с учетом сферичности Земли. Эффективность метода показана на модельном примере.

Ключевые слова: сейсмология, моделирование волнового поля, конечно-разностный метод, учет сферичности Земли.

Введение. Моделирование волнового поля играет значительную роль при исследованиях глубинного строения Земли, поскольку дает возможность лучше понять характер зарегистрированного волнового поля в зависимости от тектонического строения района исследований. В то же время моделирование волнового поля может применяться при решении задач сейсмологии, позволяя исследовать природу возможных напряжений, возникающих в земных недрах, и прогнозировать появление опасных явлений эндогенного происхождения. При этом в данном случае необходимо учитывать сферичность Земли.

Методы численного моделирования движения сейсмических волн можно разделить на три группы: 1) доменные; 2) граничные и 3) гибридные. Движение упругих волн в

среде описывается уравнением эластодинамики или волновым уравнением [Бреховских, Гончаров, 1982]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0, \quad (1)$$

где ρ — плотность среды, в которой распространяются волны; \mathbf{u} — смещение частиц среды; λ и μ — коэффициенты Ламе, характеризующие модули упругости и сдвига среды. Решение такого уравнения при заданных граничных и начальных условиях показывает смещения частиц среды в продольных и поперечных волнах.

Доменные методы основаны на численной аппроксимации уравнения эластодинамики с заданными граничными и начальными условиями с использованием разного вида сеток, с помощью которых дискретизируется геологическая среда. В граничных методах дифференциальные уравнения и граничные условия преобразуются в граничные интегральные уравнения, содержащие неизвестные функции, которые затем дискретизируются и решаются с помощью различных численных методов. Гибридные методы основаны на комбинации разных доменных и граничных методов [Takenaka et al., 1998].

Все численные методы моделирования распространения сейсмических волн в сферической Земле относящиеся к доменным по подходу можно условно разделить на два основных типа: осесимметричные [Alterman et al., 1970; Igel, Weber, 1996; Thomas et al., 2000] и псевдоспектральные [Igel, Gudmundsson, 1997; Wang, Takenaka, 2010]. Осесимметричные методы моделирования трехмерных сейсмических волновых полей основаны на аппроксимации структурной модели как вращательно-симметричной вдоль вертикальной оси источника колебаний и решении уравнения эластодинамики в цилиндрических или сферических координатах. Псевдоспектральные методы основаны на использовании преобразования Фурье при решении уравнения эластодинамики. Все недостатки и преимущества существующих методов моделирования распространения сейсмических волн в сферической Земле рассмотрены в статье Тоюкуниси с соавторами [Toyokuni et al., 2012]. Авторы предложили «квазисферический подход» решения уравнения эластодинамики в сферических координатах в квазисферической области. Этот подход позволяет моделировать распространение сейсмических волн в двумерном срезе глобальной модели Земли с произвольной боковой неоднородностью, что позволяет сократить время вычислений и необходимый объем памяти до значений, требуемых при двумерном моделировании, но при этом учитывать полное распространение трехмерных волн.

В Институте геофизики на протяжении многих лет разрабатывается метод моделирования волнового поля, который основан на прямом продолжении волнового поля точечного источника конечно-разностным методом. Численно метод реализуется путем решения скалярного волнового уравнения с использованием специального вида разностных сеток [Пилипенко, Верпаховская, 2008; Верпаховская и др., 2013; Пилипенко и др., 2013]. Конечно-разностное продолжение волнового поля также используется при реализации процедуры миграции как в двумерном, так и трехмерном вариантах [Пилипенко, Верпаховская, 2008; Pylypenko et al., 2011; Верпаховская и др., 2015, 2016; Verpakhovska et al., 2018]. При этом для миграции используется обратное продолжение волнового поля от приемников, а при моделировании — прямое продолжение от источника. Выбор конечно-разностного метода для продолжения волнового поля объясняется его высокой устойчивостью и точностью, а также возможностью использовать при его применении широкий класс неоднородных моделей среды. Это позволяет получать более точный результат при моделировании волнового поля в геологической среде со сложным тектоническим строением.

Результаты применения метода, представленные в узлах регулярной пространственной сетки, удобны для интерполяции волнового поля в произвольных точках среды при

последующих практических приложениях. В статье [Пилипенко, Верпаховская, 2019] была исследована возможность применения конечно-разностного метода для кинематического моделирования трехмерного временного поля при решении задач сейсмологии. Динамическое моделирование необходимо для более полного представления о глубинном строении Земли, поэтому также необходимо при решении сейсмологических задач, связанных с глубинными тектоническими структурами и возможными разного рода эндогенными процессами. В настоящей статье показано решение задачи моделирования трехмерного волнового поля в случае, когда модель среды представляет собой некоторую часть сферической неоднородной по сейсмической скорости модели Земли. Такая постановка задачи связана с необходимостью учета сферической формы Земли при решении широкого класса исследовательских задач сейсмологии, основанных на использовании материалов наблюдений, выполненных на значительных расстояниях от источника колебаний.

Дифференциальная постановка задачи трехмерного продолжения волнового поля с учетом сферичности Земли. Целью моделирования распространения сейсмических волн в сферической Земле является расчет волнового поля на некотором четырехугольном участке поверхности Земли Q (заданном в географических координатах) от эпицентра источника колебаний S , расположенного вне этого участка в точке с координатами $(r_{qs}, \theta_{qs}, \varphi_{qs})$, где $r_s = R - d_s$, R — радиус Земли, d_s — глубина точки возбуждения колебаний, θ_s — широта и φ_s — долгота для точки возбуждения.

Так как волновое поле от точечного источника имеет в трехмерном пространстве сферическое распространение, то естественно выполнять его расчет с использованием сферических координат. Поэтому орт географических координат $(r_q, \theta_q, \varphi_q)$ необходимо привести к сферическим координатам $(0 \leq r \leq R; 0 \leq \theta \leq \pi; -\pi \leq \varphi \leq \pi)$. Если в случае с радиусом и широтой переход тривиальный (восточная долгота считается положительной, а западная — отрицательной), то угол θ , соответствующий долготе, на северном полюсе принимает значение 0 , на экваторе $-\pi/2$ и на южном полюсе Земли $-\pi$.

Ориентируясь на точечный источник колебаний, сферическую систему координат по расчету волнового поля целесообразно задать таким образом, чтобы точка возбуждения колебаний находилась на полярной оси системы, а северный полюс соответствовал положению эпицентра точки возбуждения. На рис. 1, а показано изображение модели сферической Земли с расположенным на ее поверхности эпицентром S источника S_d и поворот модели Земли таким образом, чтобы полярный полюс соответствовал точке эпицентра S (рис. 1, б).

В локальной сферической системе координат r, θ, φ поведение скалярного волнового поля $u(r, \theta, \varphi, t)$ будет подчиняться дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{V^2(r, \theta, \varphi)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \psi(r, \theta, \varphi, t), \quad (2)$$

где t — время; $V(r, \theta, \varphi)$ — сейсмическая скорость упругих волн, переменная по всем пространственным координатам; $\psi(r, \theta, \varphi, t)$ — функция, определяющая волновое поле источника колебаний:

$$\psi(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r=r_s, \theta=\theta_s, \varphi=\varphi_s} = F(t); \quad \psi(r, \theta, \varphi, t) \Big|_{r \neq r_s, \theta \neq \theta_s, \varphi \neq \varphi_s} = 0. \quad (3)$$

Для определения волнового поля на поверхности Q предстоит выполнить разностный счет в некотором трехмерном секторе Земли (рис. 2), который начинается на полярной оси локальной системы координат и ограничивается пятью поверхностями (фигура SCDEGK) в этой системе координат:

$$r = R, r = r_{\min}, \varphi = \varphi_{\min}, \varphi = \varphi_{\max}, \theta = \theta_{\max},$$

где r_{\max} — предельная глубина области продолжения волнового поля, $\varphi_{\min}, \varphi_{\max}, \theta_{\max}$ — предельные сферические координаты локальной области, описывающей поверхность Q (поверхность ABCD на рис. 1, б).

В целом дифференциальная задача продолжения волнового поля выглядит следующим образом. Необходимо определить волновое поле $W(\theta, \varphi, t)$ в области поверхности Земли (поверхность ABCD на рис. 2) с локальными координатами $r = R, \varphi_{\min} < \varphi < \varphi_{\max}, 0 < \theta < \theta_{\max}$ при действии сигнала $\psi(r, \theta, \varphi, t)$ с учетом граничных данных, которые определяют нулевое волновое поле на границах области расчета, исключая область $r = R$:

$$u(r_{\min}, \theta, \varphi, t) = 0, u(r, 0, \varphi, t) \Big|_{r \neq R - d_s} = 0; u(r, \theta, \varphi_{\min}, t) = 0; u(r, \theta, \varphi_{\max}, t) = 0. \quad (4)$$

Конечно-разностная постановка трехмерного продолжения волнового поля с учетом сферичности Земли. Преобразуем дифференциальную задачу продолжения волнового поля, которая описывается системами уравнений (2)—(4), в конечно-разностную задачу расчета волнового поля.

Для удобства разностной аппроксимации уравнения (2) приведем его к виду

$$\frac{1}{r^2} \left(2r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{V^2(r, \theta, \varphi)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

При сведении дифференциальной задачи продолжения волнового поля к конечно-разностной необходимо заменить представление четырехмерного непрерывного пространства дискретным сеточным пространством с координатами сеточных узлов $(j, l,$

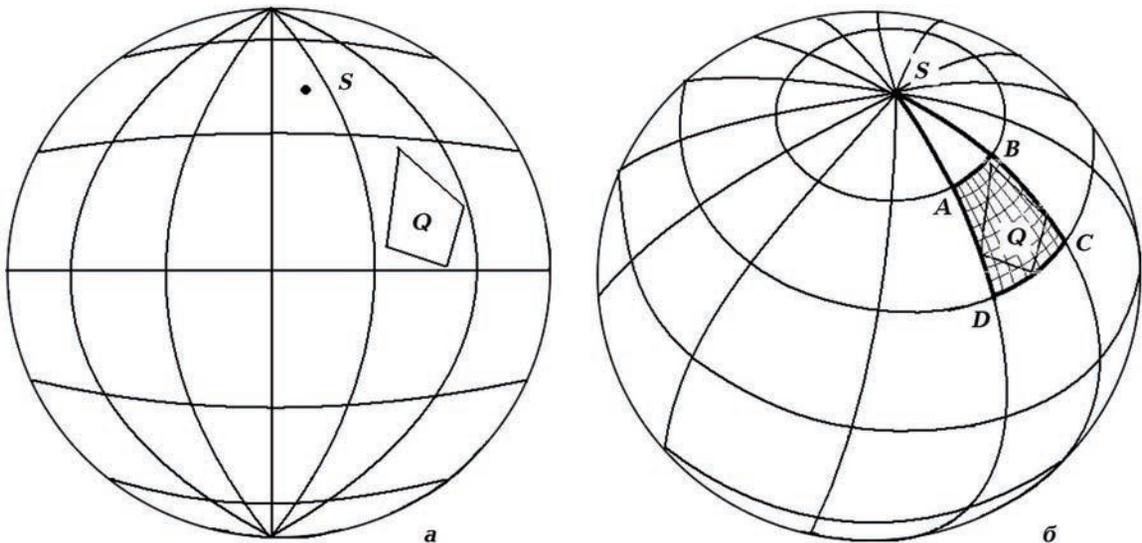


Рис. 1. Поворот модели Земли относительно источника колебаний S для моделирования волнового поля в области Q : а — модель Земли; б — повернутая модель с полярным центром в точке эпицентра и расчетной областью для моделирования волнового поля.

Fig. 1. Rotation of the Earth model relative to the source of the wavering S to model the wave field in the area Q : а — the Earth model; б — rotated model with a polar center at the epicenter point and a computational domain for modeling the wave field.

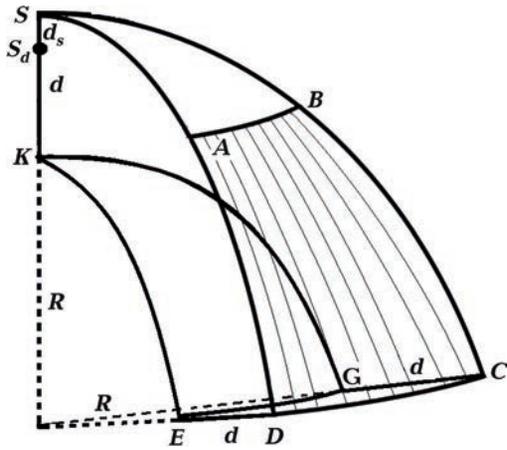


Рис. 2. Трехмерный сектор модели Земли, для которого выполняется трехмерное моделирование волнового поля: d_s — расстояние между источником колебаний S_d и его эпицентром S . Фигура SCDEGK ограничивает трехмерную область, где рассчитывается волновое поле.

Fig. 2. Three-dimensional sector of the Earth model for which three-dimensional modeling of the wave field is performed: d_s — the distance between the source of the wavering S_d and its epicenter S . Polygon SCDEGK limits the 3D area where the wavefield is calculated.

i, k), которые соответственно отвечают непрерывным сферическим координатам (r, θ, φ, t) . На рис. 3 показаны двумерные проекции расчетной сетки для поверхностей трехмерной фигуры (SCDEGK рис. 2): а) двумерная проекция сетки для поверхности r, θ ; б) проекция сетки для поверхности θ, φ ; в) проекция сетки для поверхности r, φ .

Сеточные шаги пространственно-временной сетки выбираем равными $\Delta r, \Delta \theta, \Delta \varphi, \Delta t$. Величины сеточных шагов должны быть согласованы с условиями качественной аппроксимации дифференциальной задачи продолжения волнового поля, а также устойчивости счета. Эти вопросы будут рассмотрены ниже.

Заменим дифференциальное уравнение (5) его конечно-разностным аналогом. С этой целью воспользуемся конечно-разностными аналогами дифференциальных операторов, представленных в уравнении (5). Для сокращения объема счета ограничимся неявной

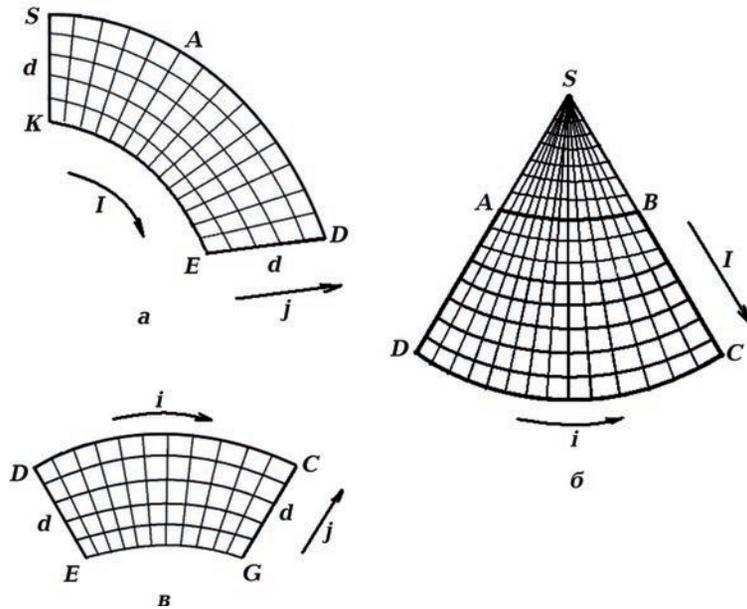


Рис. 3. Двумерные проекции расчетной сетки для поверхностей трехмерной фигуры, ограничивающей область расчета волнового поля (SCDEGK рис. 2).

Fig. 3. Two-dimensional projections of the computational grid for surfaces of a three-dimensional polygon, which limits the area of calculation of the wave field (SCDEGK, see Fig. 2).

аппроксимацией в уравнении (5) лишь относительно дифференциального оператора $\partial^2 u / \partial \varphi^2$, связанного с координатной осью φ . Другие конечно-разностные операторы будут ориентированы на явную схему решения конечно-разностного уравнения [Самарский, 1983].

Явные схемы счета требуют, как правило, значительно меньше объема счета, но их устойчивость напрямую зависит от размера шага сетки. В случае значительного изменения шага на различных участках сетки возникают проблемы с контролем устойчивости счета. При постоянном угловом сеточном шаге $\Delta\varphi$ ему соответствуют в разных частях сферической сетки различные пространственные отрезки дуги, поскольку разностный счет ведется непосредственно в области сферы, примыкающей к полярной оси. Эта проблема не имеет места для других шагов сетки. Шаги Δr и Δt постоянны, а шаг $\Delta\theta$ хотя и угловой, но при относительно большом удалении расчетной области от центра сферы этому шагу соответствуют мало изменяющиеся отрезки дуги.

Конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение (5), имеет вид

$$\begin{aligned} (E - \sigma L_{\varphi\varphi}) u_{i,j,l}^{k+1} = & \left[2E + \frac{V_{i,j,l}^2 \Delta t^2}{\Delta r^2} L_{rr} + \frac{2V_{i,j,l}^2 \Delta t^2}{r_j \Delta r} L_r + \frac{V_{i,j,l}^2 \Delta t^2}{r_j^2 \Delta \theta^2} L_{\theta\theta} + \frac{2V_{i,j,l}^2 \Delta t^2}{r_j^2 \operatorname{tg} \theta_l \Delta \theta} L_{\theta} - \right. \\ & \left. - \left(2\sigma - \frac{V_{i,j,l}^2 \Delta t^2}{r_j^2 \sin^2 \theta_l \Delta \varphi^2} \right) L_{\varphi\varphi} \right] u_{i,j,l}^k - (E - \sigma L_{\varphi\varphi}) u_{i,j,l}^{k-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$L_{\varphi\varphi} u_{i,j,l}^k = \frac{1}{\Delta \varphi^2} (u_{i+1,j,l}^k - 2u_{i,j,l}^k + u_{i-1,j,l}^k);$$

$$L_{rr} u_{i,j,l}^k = \frac{1}{\Delta r^2} (u_{i,j+1,l}^k - 2u_{i,j,l}^k + u_{i,j-1,l}^k);$$

$$L_{\theta\theta} u_{i,j,l}^k = \frac{1}{\Delta \theta^2} (u_{i,j,l+1}^k - 2u_{i,j,l}^k + u_{i,j,l-1}^k);$$

$$L_{\theta} u_{i,j,l}^k = \frac{1}{2\Delta \theta} (u_{i,j,l+1}^k - u_{i,j,l-1}^k); \quad L_{\varphi} u_{i,j,l}^k = \frac{1}{2\Delta \varphi} (u_{i+1,j,l}^k - u_{i-1,j,l}^k);$$

$$\sigma \leq \frac{1}{4} \left(\frac{V_{\max}^2 \Delta t}{r^2 \sin^2 \theta \Delta \varphi^2} \right).$$

Параметр σ необходим для достижения устойчивости неявного счета вдоль координаты φ .

Каждый из конечно-разностных операторов в уравнении (6) обеспечивает аппроксимацию соответствующего дифференциального оператора с квадратичной точностью относительно сеточного шага. Это, в свою очередь, гарантирует общую сходимость решения уравнения (6) к решению уравнения (5) с квадратичной точностью. Таким образом, при устойчивом счете решение задачи продолжения волнового поля будет корректным.

Четырехмерный шаблон пространственно-временной сетки, который необходим для решения уравнения (6), представлен на рис. 4. Сеточный шаблон включает в себя 13 сеточных узлов.

Сгруппируем в уравнении (6) выражения, относящиеся к отдельным сеточным узлам шаблона:

$$\begin{aligned} \sigma u_{i-1, j, l}^{k+1} - (1 + 2\sigma) u_{i, j, l}^{k+1} + \sigma u_{i+1, j, l}^{k+1} = u_{i, j, l}^k \left[2 \left(-1 - 2\sigma + V_{i, j, l}^2 \Delta t^2 \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j^2 \Delta \theta_l^2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{r_j^2 \sin^2 \theta_l \Delta \varphi^2} \right) \right) \right] + u_{i, j, l-1}^k \frac{V_{i, j, l}^2 \Delta t^2}{r_j^2 \Delta \theta} \left(-\frac{1}{\Delta \theta} + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta_l} \right) + u_{i, j, l+1}^k \frac{V_{i, j, l}^2 \Delta t^2}{r_j^2 \Delta \theta} \left(-\frac{1}{\Delta \theta} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta_l} \right) + \\ + u_{i, j-1, l}^k \frac{V_{i, j, l}^2 \Delta t^2}{\Delta r} \left(-\frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{r_j} \right) + u_{i, j+1, l}^k \frac{V_{i, j, l}^2 \Delta t^2}{\Delta r} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{r_j} \right) + \left(2\sigma - \frac{V_{i, j, l}^2 \Delta t^2}{r_j^2 \sin^2 \theta_l \Delta \varphi^2} \right) \times \\ \times \left(u_{i+1, j, l}^k + u_{i-1, j, l}^k \right) + (1 + 2\sigma) u_{i, j, l}^{k-1} - \sigma \left(u_{i-1, j, l}^{k-1} + u_{i+1, j, l}^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В левой части уравнения (7) собраны значения волнового поля в узлах сетки на временном уровне $k+1$, где значения поля предстоит определить на одном временном шаге, а справа — волновое поле в узлах k и $k-1$, где значения волнового поля на этом временном шаге уже известны.

Определим окончательное выражение конечно-разностного уравнения, удобное для программной реализации:

$$\begin{aligned} -\sigma u_{i-1, j, l}^{k+1} - c u_{i, j, l}^k - \sigma u_{i+1, j, l}^{k+1} = - \left\{ \left(d + e V^2 \right) u_{i, j, l}^k + g V^2 u_{i, j, l-1}^k + m V^2 u_{i, j, l+1}^k + \right. \\ \left. + q V^2 u_{i, j-1, l}^k + w V^2 u_{i, j+1, l}^k + \left(2\sigma - p V^2 \right) \left(u_{i+1, j, l}^k + u_{i-1, j, l}^k \right) + (1 + 2\sigma) u_{i, j, l}^{k-1} - \right. \\ \left. - \sigma \left(u_{i-1, j, l}^{k-1} + u_{i+1, j, l}^{k-1} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} c = -2\sigma - 1; \quad d = -4\sigma - 2; \quad e = 2\Delta t^2 \left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_j^2 \Delta \theta^2} + \frac{1}{r_j^2 \sin^2 \theta_l \Delta \varphi^2} \right); \\ g = \frac{\Delta t^2}{r_j^2 \Delta \theta} \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta_l} - \frac{1}{\Delta \theta} \right); \quad m = \frac{\Delta t^2}{r_j^2 \Delta \theta} \left(-\frac{1}{2 \operatorname{tg} \theta_l} - \frac{1}{\Delta \theta} \right); \quad q = \frac{\Delta t^2}{\Delta r} \left(-\frac{1}{\Delta r} + \frac{1}{r_j} \right); \\ w = \frac{\Delta t^2}{\Delta r} \left(-\frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{r_j} \right); \quad p = \frac{\Delta t^2}{r_j^2 \sin^2 \theta_l \Delta \varphi^2}. \end{aligned}$$

Конечно-разностная задача продолжения волнового поля помимо уравнения (8) включает в себя перенесенные на сеточную область начальные и краевые условия, определяемые уравнениями (3) и (4).

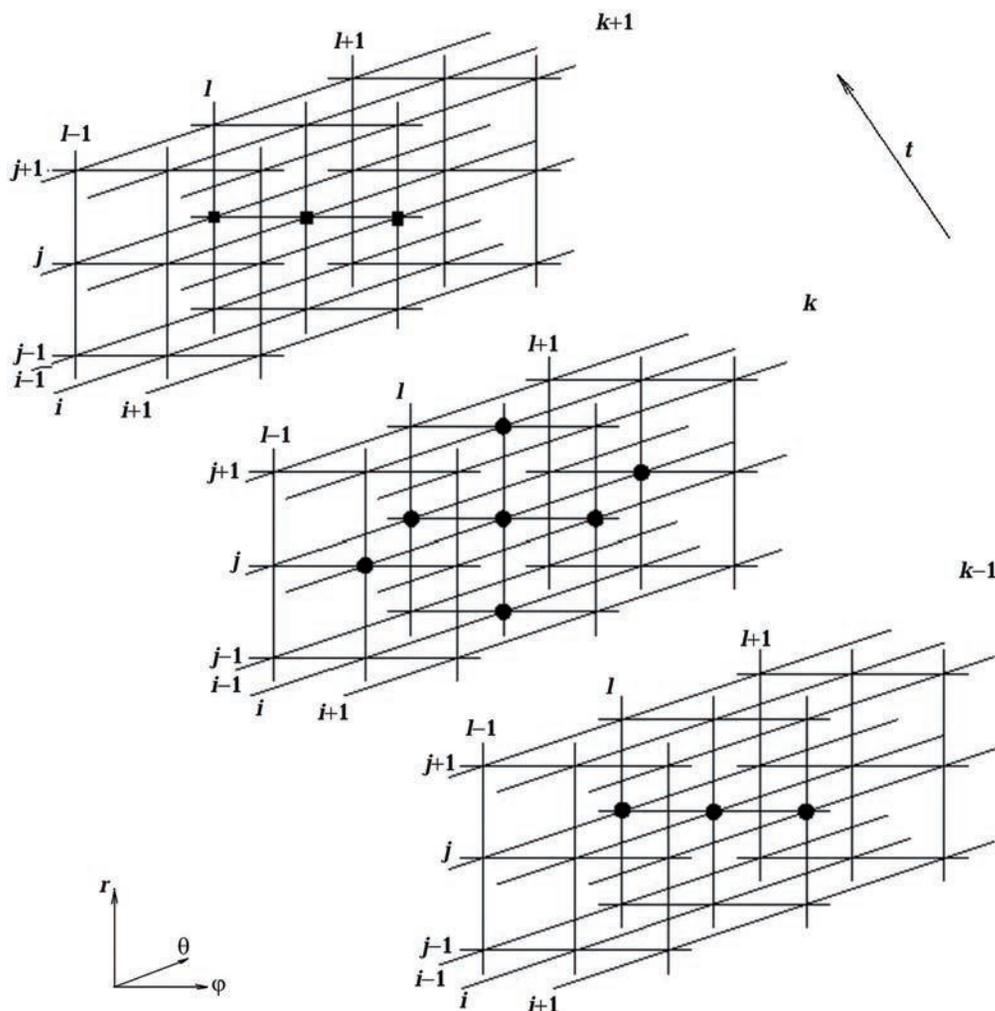


Рис. 4. Четырехмерный шаблон пространственно-временной сетки для расчета трехмерного волнового поля, включающий в себя 13 сеточных узлов: j, l, i, k — сеточные координаты, соответствующие осям координат (r, θ, φ, t) , кружки — узлы сетки, где волновое поле определено, квадраты — узлы сетки, где волновое поле определяется.

Fig. 4. Four-dimensional template of the space-time grid for calculating a three-dimensional wavefield including 13 grid nodes: j, l, i, k — grid coordinates corresponding to coordinate axes (r, θ, φ, t) , circles — grid nodes where the wavefield is defined, squares — grid nodes where the wave field is calculated.

Трансформация системы координат при подготовке конечно-разностной сферической сетки продолжения трехмерного волнового поля. Для организации расчета волнового поля точечного источника для сферической модели Земли возникает необходимость определения локальной сферической системы координат, которая предусматривает, что точечный источник колебаний располагается на полярной линии сферы.

Предположим, что мы уже перешли от географических координат к сферическим:

$$0 \leq r \leq R; \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Повернем сферическую систему координат на угол φ_0 и угол θ_0 для совмещения эпицентра точки колебаний с верхним полюсом сферы.

Предварительно выполним простой поворот вдоль оси φ на угол φ_0 : $\varphi'' = \varphi - \varphi_0$, а

затем осуществим поворот по направлению к оси θ , используя декартовую систему координат, для которой

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}; \quad x = r \sin \theta \cos (\varphi - \varphi_0); \quad y = r \sin \theta \sin (\varphi - \varphi_0);$$

$$z = r \cos \theta.$$

Повернем систему координат x, y на отрицательный угол θ_0 и получим новую систему координат x', y' :

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta_0 - z \sin \theta_0; \\ y' = y; \\ z' = x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0. \end{cases}$$

После преобразований получим в новой системе сферические координаты:

$$\begin{cases} \varphi' = \operatorname{arctg} \frac{\sin \theta \sin (\varphi - \varphi_0)}{\sin \theta \cos (\varphi - \varphi_0) \cos \theta_0 - \cos \theta \sin \theta_0}; \\ \theta' = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(\sin \theta \cos (\varphi - \varphi_0) \cos \theta_0 - \cos \theta \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta \sin^2 (\varphi - \varphi_0)}}{\sin \theta \cos (\varphi - \varphi_0) + \cos \theta \cos \theta_0}. \end{cases} \quad (9)$$

Координата r при данных преобразованиях не изменяется.

В системе координат r, φ', θ' точка возбуждения колебаний l имеет координаты: $r = R - d, \theta' = 0$. Локальная сферическая система координат r, φ', θ' используется непосредственно для выполнения сеточного разбиения пространства, как это было изложено выше.

Алгоритм трехмерного конечно-разностного моделирования волнового поля с учетом сферичности Земли. Алгоритм моделирования предполагает выполнение последовательного решения ряда вычислительных процедур, обеспечивающих, в конечном счете, определение сейсмического волнового поля в некоторой ограниченной четырехугольной области земной поверхности от заданного точечного источника колебаний с известным законом распределения скорости во времени.

На рис. 5 приведена блок-схема алгоритма по определению волнового поля точечного источника в трехмерной неоднородной среде с учетом сферичности Земли.

Остановимся на основных положениях предлагаемого алгоритма.

Ввод исходных данных. В качестве исходного элемента входных данных для моделирования волнового поля следует рассматривать трехмерную матрицу, описывающую поведение скоростной функции в области, где предстоит разностный счет. Эта область должна полностью покрывать как тот участок поверхности Земли, для которого будет выполняться определение волнового поля, так и позицию источника колебаний. Таким образом, в исходные параметры входят географические координаты четырех углов участка поверхности Земли, где предстоит определять волновое поле. Кроме того, в число исходных данных включаются значения сеточных шагов $\Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta r$, а также максимальная глубина сеточной области, которая должна быть достаточной для исключения влияния на расчетное волновое поле нижней границы сетки. К исходным данным также от-

носятся информация о максимальном времени для расчетного поля времени, а также шаг по временной оси на результативных сейсмических трассах. Сведения об основном периоде сигнала и параметре его демпфирования также относятся к необходимой входной информации.

Трансформация входных параметров к локальной сферической системе координат. Исходя из поданной входной информации о положении источника колебаний, максимальной глубине и положении точек участка, для которого определяется волновое поле, устанавливаются положение и размеры трехмерной расчетной области. Для приведения координат области к локальной сферической системе координат используются выражения, описанные выше.

Расчет параметров пространственно-временной сетки. На основе установленного размера области продолжения волнового поля и входных данных о размерах сеточных шагов определяется число узлов трехмерной пространственной сетки по r , θ и φ .

Согласно исходной скоростной модели необходимо установить максимальную скорость в расчетной области V_{\max} и вычислить также минимальное значение для радиуса $r_{\min} = R - d_{\max}$, где d_{\max} — размер сетки по радиусу.

На основании этих данных, а также информации о размерах сеточных шагов необходимо определить максимально возможный временной шаг сетки:

$$dt \leq \frac{dr * d\theta * r_{\min}}{V_{\max} \sqrt{dr^2 + d\theta^2 r_{\min}^2}}$$

Это неравенство позволяет обеспечить устойчивость явной разностной схемы счета по координатным осям сетки r и θ [Самарский, Гулин, 1973].

Пересчет исходной скоростной модели на пространственную трехмерную сетку. Пересчет трехмерной таблицы скорости на трехмерную разностную сетку является завершающей стадией в подготовке собственно разностного продолжения волнового поля. При пересчете, как и в случае трансформации координат расчетного участка поверхности сферы, используются формулы перехода географических координат к локальным сферическим координатам.

Сеточное описание скоростной модели в точности совпадает с числом пространственных узлов сетки, включая задаваемые в исходных данных дополнительные узлы, необходимые для исключения влияния краевых участков сеточной области.

Определение сигнала в узле сетки, соответствующего положению источника. На протяжении всего расчетного времени в точке, соответствующей положению ис-



Рис. 5. Блок-схема алгоритма определения трехмерного волнового поля на заданном участке поверхности Земли.

Fig. 5. Block diagram of an algorithm for determining a three-dimensional wave field on the selected area of the Earth's surface.

точника и расположенной на локальной полярной оси, инициируется затухающий колебательный сигнал (импульс Берлаге):

$$u = A * t * e^{t/\text{rec}} * \sin\left(2\pi t/\text{rec}\right),$$

где A — постоянная величина, t — время, rec — постоянная, определяющая степень затухания сигнала во времени.

Разностное решение волнового уравнения на сетке. Продолжение волнового поля выполняется во времени посредством пошагового решения уравнения (7) при соблюдении начальных и краевых условий (3) и (4). Для определения значений волнового поля на временном уровне $k+1$ при каждом фиксированном значении l (ось θ) и j (ось r) выполняется решение трехдиагональной системы линейных уравнений относительно значений поля в последовательности узлов i (ось ϕ). Для решения этой задачи используется метод прогонки [Годунов, Рябенский, 1977].

В процессе счета вычисляемые значения поля на сетке в узлах j (ось r), принадлежащих дневной поверхности, запоминаются в качестве выходной информации, определяющей волновое поле в зоне его поиска.

Трансформация расчетного волнового поля к системе географических координат.

При достижении максимального расчетного времени, заданного в исходных данных, необходимо выполнить трансформацию расчетного волнового поля, полученного в виде временных срезов, к формату сейсмических трасс. Для заполнения паспортов трасс определяется позиция каждой индивидуальной трассы путем перехода от локальной сферической системы координат к географической системе с помощью системы уравнений (9). В результате этой процедуры завершается формирование куба сейсмической информации, определяющего волновое поле точечного источника в заданной прямоугольной области при условии сферичности Земли.

Модельный пример. Для проверки теоретических положений разработанного алгоритма была составлена опытная версия программы, реализующей основные его шаги. Ряд выполненных при применении программы расчетов подтвердил работоспособность предложенного конечно-разностного подхода к решению задачи определения трехмерного волнового поля для сферической модели Земли. Рассмотрим модельный пример более подробно.

Для модельного примера расчет волнового поля выполнялся с использованием скоростного куба среды, содержащего скачок скорости на глубине 30 км с 8000 до 10 800 м/с, а также дополнительную границу раздела на глубине 150 км, которая соответствует нижней границе расчетной сетки.

В результате выполненных вычислений был получен куб смоделированного волнового поля, имеющего размеры 500×223 трасс и длиной записи в 4 с, который приведен на рис. 6, а, а на рис. 6, б, в показаны два сечения этого куба. На волновом поле хорошо прослеживаются как прямые волны, так и отраженные, рефрагированные и кратные волны от скоростной границы заданной модели среды. Таким образом, модельный пример позволил подтвердить правомерность составленного алгоритма, работоспособность разработанной на его основе опытной программы, а также ее эффективность при воссоздании трехмерного волнового поля в сферической Земле.

Выводы. Разработанный способ расчета трехмерного волнового поля точечного источника с учетом сферичности Земли основан на применении конечно-разностного решения волнового уравнения. При этом метод численно реализован путем конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения с использованием четырехмерной пространственно-временной сетки с 13-точечным шаблоном. Для оптимизации счета продолжение волнового поля предложено выполнять на отдельном секторе сфе-

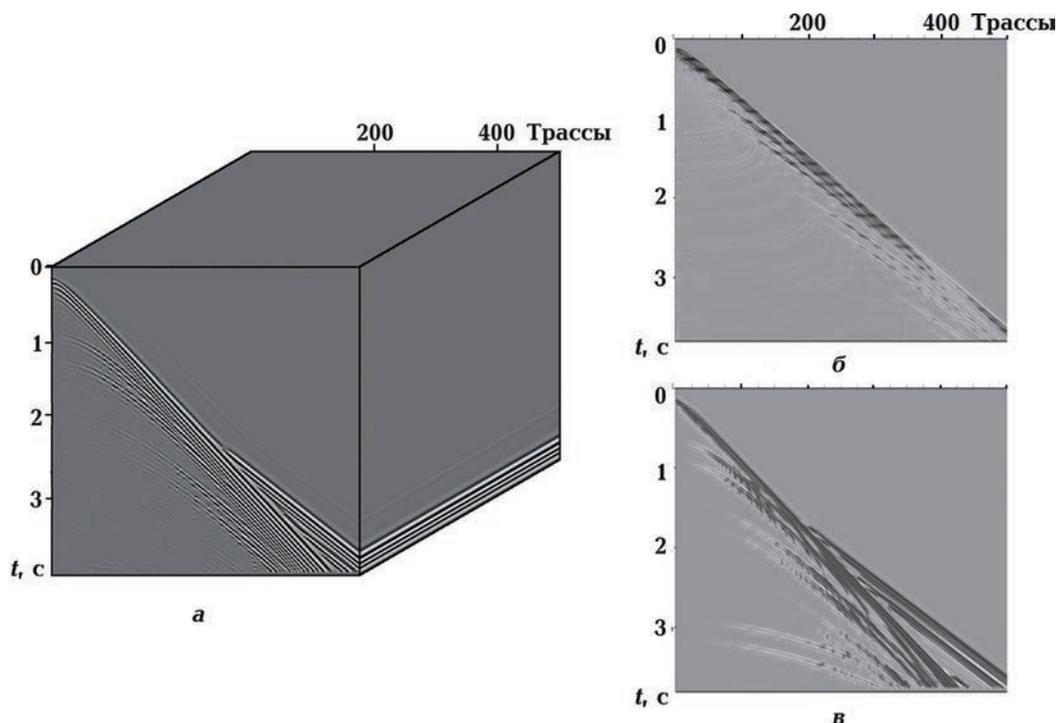


Рис. 6. Смоделированное волновое поле: *a* — общий куб выбранного участка, *б, в* — два среза куба.

Fig. 6. Three-dimensional wavefield modeling result: *a* — common cube of the selected area; *б, в* — two cube sections.

рической сетки в локальной системе координат, соответствующей положению точки возбуждения колебаний.

Составлен алгоритм по расчету трехмерного волнового поля с учетом сферичности Земли, содержащий как ряд подготовительных процедур и трансформаций, так и цикл разностного счета и завершающего этапа формирования выходной информации в куб смоделированного волнового поля.

На основе алгоритма разработана опытная версия программы трехмерного моделирования волнового поля для проверки основных положений предложенного подхода. Применение программы на модельном примере позволило экспериментально подтвердить эффективность расчета распространения сейсмических волн от точечного источника в трехмерной сферической Земле.

Представленный метод конечно-разностного моделирования волнового поля может применяться при решении задач сейсмологии, позволяя исследовать природу возможных напряжений, возникающих в земных недрах, и таким образом прогнозировать появление опасных явлений эндогенного происхождения.

Список литературы

- Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). Москва: Наука, 1982. 336 с.
- Верпаховская А.О., Сидоренко Г.Д., Пилипенко В.Н., Пилипенко Е.В. Миграция исходных сейсмограмм и моделирование волнового поля с распараллеливанием процесса вычислений на кластере. *Геоинформатика*. 2013. № 3. С. 1—12.
- Верпаховская А.О., Пилипенко В.Н., Будкевич В.Б. 3D конечно-разностная миграция поля преломленных волн. *Геофиз. журн.* 2015. Т. 37. № 3. С. 50—65. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i3.2015.111102>.
- Верпаховская А.О., Пилипенко В.Н., Пилипенко Е.В. Конечно-разностная миграция в трехмерном варианте с распараллеливанием процесса вычислений. *Геоинформатика*. 2016. № 4. С. 29—38.
- Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. Москва: Наука, 1977. 440 с.
- Пилипенко В.Н., Верпаховская А.О. Исследование особенностей миграционных преобразований поля преломленных волн с использованием 2D и 3D конечно-разностного моделирования сейсмограмм. *Геофиз. журн.* 2008. Т. 30. № 1. С. 84—96.
- Пилипенко В.Н., Верпаховская А.О., Пилипенко Е.В., Сидоренко Г.Д. Кластерные вычисления для реализации процедур миграции исходных сейсмограмм и моделирования волнового поля. *Conference Proceedings, 12th EAGE International Conference on Geoinformatics — Theoretical and Applied Aspects, May 2013*. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20142419>.
- Пилипенко В.Н., Верпаховская А.О. Трехмерное моделирование временного поля лучевым и конечно-разностным методами для решения задач сейсмологии. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 5. С. 3—26. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i5.2019.183636>.
- Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1983. 616 с.
- Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. Москва: Наука, 1973. 416 с.
- Alterman, Z.S., Aboudi, J., & Karal, F.C. (1970). Pulse propagation in a laterally heterogeneous solid elastic sphere. *Geophysical Journal International*, 21(3), 243—260. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1970.tb01790.x>.
- Igel, H., & Gudmundsson, O. (1997). Frequency-dependent effects on travel times and waveforms of long-period S and SS waves. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 104(1-3), 229—246. [https://doi.org/10.1016/S0031-9201\(97\)00051-4](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(97)00051-4).
- Igel, H., & Weber, M. (1996). P-SV wave propagation in the Earth's mantle using finite-differences: Application to heterogeneous lowermost mantle structure. *Geophysical Research Letters*, 23(5), 415—418. <https://doi.org/10.1029/96GL00422>.
- Pylypenko, V.N., Verpakhovska, O.O., Starostenko, V.I., & Pavlenkova, N.I. (2011). Wave images of the crustal structure from refraction and wide-angle reflection migrations along the DOBRE profile (Dnieper-Donets paleorift). *Tectonophysics*, 508(1-4), 96—105. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2010.11.009>.
- Takenaka, H., Furumura, T., & Fujiwara, H. (1998). Recent developments in numerical methods for ground motion simulation. In K. Irikura, K. Kudo, H. Okada, & T. Sasatani (Eds.), *The Effects of Surface Geology on Seismic Motion* (pp. 91—101). Rotterdam: Balkema.
- Thomas, Ch., Igel, H., Weber, M., & Scherbaum, F. (2000). Acoustic simulation of P-wave propa-

gation in a heterogeneous spherical Earth: numerical method and application to precursor waves to PKPdf. *Geophysical Journal International*, 141(2), 307—320. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00079.x>.

Toyokuni, G., Takenaka, H., & Kanao, M. (2012). Quasi-axisymmetric finite-difference method for realistic modeling of regional and global seismic wavefield — review and application. In M. Kanao, (Ed.), *Seismic Waves: Research and Analysis* (pp. 85—112). IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/32422>.

Verpakhovska, A., Pylypenko, V., Yegorova, T., & Murovskaya, A. (2018). Seismic image of the crust on the PANCAKE profile across the UKRAINIAN CARPATHIANS from the migration method. *Journal of Geodynamics*, 121, 76—87. <https://doi.org/10.1016/j.jog.2018.07.006>.

Wang, Y., & Takenaka, H. (2010). A scheme to treat the singularity in global seismic wavefield simulation using pseudospectral method with staggered grids. *Earthquake Science*, 23(2), 121—127. <https://doi.org/10.1007/s11589-010-0001-x>.

Three dimensional finite-differential simulation of the wave field taking sphericity of the Earth into account

A. O. Verpakhovskaya, V. N. Pilipenko, 2020

S. I. Subbotin Institute of Geophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

Three dimensional modeling of the wave field makes possible to obtain a concept on distribution of seismic waves in geological medium with different complexity of its structure. The location of the source of fluctuations may be defined in this case at any depth. Therefore, three dimensional modeling of the wave field may be used while solving the problems of seismology related to the nature of strains in the Earth's interior, while studying the dangerous phenomena of endogenous origin as well as in the case of studies of the deep structure of the Earth, the boundaries of its division and its tectonic structures.

All existing methods of numerical simulation of the wave field are based on the solving the equation of elastodynamics with the help of different methods defined by interfacial and initial conditions and are subdivided into axial-symmetrical and pseudo-spectral. The first ones are based on approximation of structural model as a rotary-symmetrical along the vertical axis of the source of fluctuations and solving of the equation of elastodynamics in cylindric or spheric coordinates and in the second ones while solving the equation of elastodynamics Fourier transformation is used.

At the Institute of Geophysics named after S. I. Subbotin NAS of Ukraine a method of finite-differential simulation of the wave field has been elaborated both in two-dimensional and three-dimensional variants. The choice of finite-differential method for proceeding of the wave field is explained by its high stability and accuracy as well as with possibility of its application to the wide class of heterogenous models of the medium. Finite-differential modeling is based on the solving of the scalar equation with application of the spacio-temporal net. While solving the problems of seismology in the case of three-dimensional modeling of the wave field we are to take sphericity of the Earth into account. For this purpose in the differential wave equation a transition from Cartesian to spherical coordinate system has been provided. The theory and algorithm of the elaborated three-dimensional modeling of the wave field with finite differential method taking into account sphericity of the Earth has been considered in the paper with demonstration on the model example.

Key words: seismology, modeling of the wave field, finite-differential method, keeping sphericity of the Earth into account.

References

- Brekhovskikh, L.M., & Goncharov, V.V. (1982). *Introduction to continuum mechanics (applied to the theory of waves)*. Moscow: Nauka, 336 p. (in Russian).
- Verpakhovskaya, A.O., Sidorenko, G.D., Pilipenko, V.N., & Pilipenko, E.V. (2013). A finite-difference method of pre-stack migration procedures and modeling of the wave field with parallelizing of calculation on cluster. *Geoinformatika*, (3), 1—12 (in Russian).
- Verpakhovskaya, A.O., Pilipenko, V.N., & Budkevich, V.B. (2015). 3D finite-difference migration of the field of refracted waves. *Geofizicheskiy zhurnal*, 37(3), 50—65. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v37i3.2015.111102> (in Russian).
- Verpakhovskaya, A.O., Pilipenko, V.N., & Pilipenko, E.V. (2016). 3D finite-difference migration with parallelization of computing process. *Geoinformatika*, (4), 29—38 (in Russian).
- Godunov, S.K., & Ryabenkiy, V.S. (1977). *Difference schemes*. Moscow: Nauka, 440 p. (in Russian).
- Pilipenko, V.N., & Verpakhovskaya, A.O. (2008). Study of the features of migration transformations of the refracted wave field using 2D and 3D finite-difference modeling of seismograms. *Geofizicheskiy zhurnal*, 30(1), 84—96 (in Russian).
- Pilipenko, V.N., Verpakhovskaya, A.O., Pilipenko, E.V., & Sidorenko, G.D. (2013). Cluster computations for the implementation of procedures for the migration of source seismograms and wavefield modeling. *Conference Proceedings, 12th EAGE International Conference on Geoinformatics — Theoretical and Applied Aspects, May 2013*. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20142419> (in Russian).
- Pilipenko, V.N., & Verpakhovskaya, A.O. (2019). Three-dimensional modeling of temporal field by radial and finite-differential methods for solving the problems of seismology. *Geofizicheskiy zhurnal*, 41(5), 3—26. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i5.2019.183636> (in Russian).
- Samarskiy, A.A. (1983). *The theory of difference schemes*. Moscow: Nauka, 616 p. (in Russian).
- Samarskiy, A.A., & Gulin, A.V. (1973). *Stability of difference schemes*. Moscow: Nauka, 416 p. (in Russian).
- Alterman, Z.S., Aboudi, J., & Karal, F.C. (1970). Pulse propagation in a laterally heterogeneous solid elastic sphere. *Geophysical Journal International*, 21(3), 243—260. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1970.tb01790.x>.
- Igel, H., & Gudmundsson, O. (1997). Frequency-dependent effects on travel times and waveforms of long-period S and SS waves. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 104(1-3), 229—246. [https://doi.org/10.1016/S0031-9201\(97\)00051-4](https://doi.org/10.1016/S0031-9201(97)00051-4).
- Igel, H., & Weber, M. (1996). P-SV wave propagation in the Earth's mantle using finite-differences: Application to heterogeneous lowermost mantle structure. *Geophysical Research Letters*, 23(5), 415—418. <https://doi.org/10.1029/96GL00422>.
- Pylypenko, V.N., Verpakhovska, O.O., Starostenko, V.I., & Pavlenkova, N.I. (2011). Wave images of the crustal structure from refraction and wide-angle reflection migrations along the DOBRE profile (Dnieper-Donets paleorift). *Tectonophysics*, 508(1-4), 96—105. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2010.11.009>.
- Takenaka, H., Furumura, T., & Fujiwara, H. (1998). Recent developments in numerical methods for ground motion simulation. In K. Irikura, K. Kudo, H. Okada, & T. Sasatani (Eds.), *The Effects of Surface Geology on Seismic Motion* (pp. 91—101). Rotterdam: Balkema.

- Thomas, Ch., Igel, H., Weber, M., & Scherbaum, F. (2000). Acoustic simulation of *P*-wave propagation in a heterogeneous spherical Earth: numerical method and application to precursor waves to PKPdf. *Geophysical Journal International*, 141(2), 307—320. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00079.x>.
- Toyokuni, G., Takenaka, H., & Kanao, M. (2012). Quasi-axisymmetric finite-difference method for realistic modeling of regional and global seismic wavefield — review and application. In M. Kanao, (Ed.), *Seismic Waves: Research and Analysis* (pp. 85—112). IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/32422>.
- Verpakhovska, A., Pylypenko, V., Yegorova, T., & Murovskaya, A. (2018). Seismic image of the crust on the PANCAKE profile across the UKRAINIAN CARPATHIANS from the migration method. *Journal of Geodynamics*, 121, 76—87. <https://doi.org/10.1016/j.jog.2018.07.006>.
- Wang, Y., & Takenaka, H. (2010). A scheme to treat the singularity in global seismic wavefield simulation using pseudospectral method with staggered grids. *Earthquake Science*, 23(2), 121—127. <https://doi.org/10.1007/s11589-010-0001-x>.

Тривимірне скінченно-різницеве моделювання хвильового поля з урахуванням сферичності Землі

А.О. Верпаховська, В.М. Пилипенко, 2020

Інститут геофізики ім. С.І. Суботіна НАН України, Київ, Україна

Тривимірне моделювання хвильового поля дає змогу отримати уявлення про поширення сейсмічних хвиль у геологічному середовищі різного ступеня складності будови. При цьому розташування джерела коливань може бути задано на будь-якій глибині. Таким чином, тривимірне моделювання хвильового поля можна застосовувати при розв'язанні задач сейсмології, пов'язаних з природою напружень всередині Землі, під час досліджень небезпечних явищ ендегенного походження, а також вивчення глибинної будови Землі, меж її поділу і тектонічних структур.

Всі існуючі методи чисельного моделювання хвильового поля засновані на розв'язанні рівняння еластодинаміки різними методами із заданими граничними і початковими умовами. Їх поділяють на осесиметричні і псевдоспектральні. Перше засноване на апроксимації структурної моделі як обертально-симетричної уздовж вертикальної осі джерела коливань і розв'язанні рівняння еластодинаміки в циліндричних або сферичних координатах, а друге — на розв'язанні рівняння еластодинаміки з використанням перетворення Фур'є.

В Інституті геофізики ім. С.І. Суботіна НАН України розроблено метод скінченно-різницевого моделювання хвильового поля як у двовимірному, так і тривимірному варіанті. Вибір скінченно-різницевого методу для продовження хвильового поля пояснюється його високою стійкістю і точністю, а також можливістю використовувати при його застосуванні широкий клас неоднорідних моделей середовища. Скінченно-різницеве моделювання ґрунтується на розв'язанні скалярного хвильового рівняння із застосуванням просторово-часової сітки. При розв'язанні задач сейсмології в разі тривимірного моделювання хвильового поля необхідно враховувати сферичність Землі. Для цього в диференціальному хвильовому рівнянні передбачено перехід з декартової на сферичну систему координат. У статті розглянуто теорію і алгоритм розробленого тривимірного моделювання хвильового поля скінченно-різницевим методом з урахуванням сферичності Землі, ефективність якого показана на модельному прикладі.

Ключові слова: сейсмологія, моделювання хвильового поля, скінченно-різницевий метод, урахування сферичності Землі.