

## Вплив принципу мінімуму потенціальної енергії на розподіл густини і гравітаційної енергії Землі для моделі PREM

*М.М. Фис, А.А. Церклевич, 2021*

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна  
Надійшла 3 березня 2020 р.

Реалізація принципу мінімуму потенціальної енергії для моделей розподілу густини Землі є ключовою в дослідженнях з виявлення неоднорідного розподілу мас. Досягнення мінімуму гравітаційної енергії Землі еквівалентне наближенню внутрішньої будови до гідростатичного стану, а виконання цієї умови відбувається через варіацію густини. Тому з метою коректної геофізичної інтерпретації гравіметричних даних виникає необхідність узгодження моделі PREM (Preliminary Reference Earth Model) з гармонічними коефіцієнтами геопотенціалу та умовою мінімуму функціонала, що визначає гравітаційну енергію, і лише на цій основі доцільне оцінювання варіації густини в тектоносфері.

Запропоновано алгоритм зображення кусково-неперервної функції розподілу густини у сферичній моделі PREM многочленами Лежандра для обчислення розподілу густини, потенціалу та енергії в еліпсоїдальній планеті із використанням додаткової умови — мінімуму гравітаційної енергії. Застосування такого алгоритму дало змогу трансформувати сферично-симетричну модель PREM до гідростатично врівноваженого стану. Оцінювання перерозподілу густини та виявлення зон їх найбільшої зміни дають механізм для пояснення динамічних процесів усередині Землі.

В результаті набуття гідростатичного стану сферичною моделлю PREM отримано оцінювальні значення енергії в еліпсоїдальних прошарках Землі. Надлишок потенціальної енергії зосереджений у внутрішньому і зовнішньому ядрі Землі і становить майже 19%. Від'ємний баланс (надлишок) енергії відстежується також у корі планети. Загальне значення енергії  $E$  для референсної моделі PREM, яка розбита на еліпсоїдальні прошарки, становить  $2,3364 \cdot 10^{24}$  ГДж, а в модифікованій моделі PREM після корегування її за гідростатичну складову —  $2,2828 \cdot 10^{24}$  ГДж.

**Ключові слова:** потенціал планети, референсна модель PREM внутрішньої будови Землі, стоксові постійні, еліпсоїд, гравітаційна енергія.

**Вступ.** Проблеми вивчення внутрішньої будови Землі та інших планет належать до фундаментальних завдань у пізнанні утворення та еволюції тіл Сонячної системи. До їх вирішення підходять комплексно, комбінуючи дані, отримані експериментальними та теоретичними методами в різних сферах знань (астрономії, космогонії, космохімії і науках про Землю). Найважливішою фізичною характеристикою неоднорідності надр планети є густина, яка суттєво впливає на характеристики геофізичних полів і генерує гравітаційне поле. При моделюванні внутрішньої будови Землі спочатку розраховували планетарні сферично-симетричні моделі, в яких густина  $\delta(\rho)$  та інші параметри залежать тільки від радіуса. Огляд таких моделей з різною повнотою можна знайти, наприклад, у класичних монографіях [Гутенберг, 1963; Магницкий, 1965; Жарков, Трубицын и др., 1971; Стейси, 1972; Буллен, 1978] та ін. У подальшому виникла необхідність у формулюванні задачі побудови тривимірної планетарної та регіональних моделей розподілу густини у зовнішніх оболонках, які узгоджувалися б із гравітаційним полем та іншою геолого-геофізичною інформацією. Так, в останні роки все більше з'являється наукових

досліджень, в яких розглянуто нові методи інтерпретації геофізичних полів на основі побудови тривимірної моделі геологічного середовища, адекватної наявній апріорній інформації і спостережуваним геофізичним полям.

Використання методу побудови тривимірних моделей розподілу густини за параметрами гравітаційного поля за своєю суттю започатковує новий напрям «гравітаційної томографії» в дослідженні внутрішньої будови планет. І хоча обернена задача гравіметрії належить до некоректних задач (уперше на це звернув увагу акад. А.М. Тихонов [Тихонов, 1943; Лавренъев, 1962]), але сейсмічна інверсія визначення глобальної моделі Землі, такої як Preliminary Reference Earth Model (PREM) — попередня референсна земна модель [Dziewonski, Anderson, 1981] із сейсмічної томографії, також належить до геофізичних обернених задач [Мориц, 1994]. Спільним в цих задачах є визначення характеристик неоднорідної внутрішньої структури планети.

Для визначення тривимірного розподілу густини з використанням коефіцієнтів гравітаційного поля планети логічно спиратись на базові сферично-симетричні (або еліптичні) моделі розподілу густини вздовж радіуса. На цьому етапі моделювання внутрішньої будови Землі за референсну модель беруть модель PREM [Dziewonski, Anderson, 1981]. В основі сучасних моделей нового покоління лежать дані сейсмотомографії, вони істотно відрізняються від даних традиційної параметричної моделі. В них змінюються кількість геосфер, а також положення меж поділу геосфер. Загалом, тенденція вивчення внутрішньої будови Землі йде у напрямі ще більшої деталізації. Однак перерахунок даних структурної сейсмології в моделі розподілу густини Землі є проблематичним і однозначно не вирішеним. Залишається також питання, наскільки допустимо використовувати єдину одновимірну референсну модель Землі при реконструкції внутрішньої структури Землі під континентами і під океанами, платформами і складчастими зонами та іншими найбільшими геотектонічними утвореннями. Погодження побудов, виконаних на базі регіональних одновимірних референсних моделей, також потребує подальших досліджень. У цьому сенсі найраціональнішими можна вважати підходи, засновані на методології побудови моделей розподілу густини, які включали би взаємозв'язану ієрархічну систему моделей Землі різного рівня, а саме: планетарну, регіональну і локальну моделі розподілу густини, що задовольняли б насамперед гравітаційні дані [Козленко та ін., 1979; Козленко, 1984; Церклевич, 2005]. Безумовно, такі моделі мають базуватися на принципах відповідності внутрішнього середовища апріорним і теоретичним даним, зокрема інформації еволюційного розвитку Землі.

В еволюції планети важливу роль відіграє принцип мінімізації гравітаційної енергії, що «змушує» переміщатися маси в надрах, де можуть відбуватися фазові переходи, і наближатися до стану гідростатичної рівноваги [Шен, 1977; Мориц, 1994; Кузнецов, 2007]. Дія принципу мінімізації гравітаційної енергії приводить до гравітаційної диференціації речовини планети. Переміщення речовини планети в радіальному напрямку в процесі перетворення однорідної моделі в багатошарову автоматично, за дотримання сталої величини моменту імпульсу, супроводжується переміщенням маси в зворотному напрямку. Тому з метою коректної геофізичної інтерпретації гравіметричних даних виникає необхідність узгодження моделі PREM з гармонічними коефіцієнтами геопотенціалу та умовою мінімуму функціонала, що визначає гравітаційну енергію, і тільки на цій основі доцільно оцінювати варіації густини в тектоносфері. Оцінювання перерозподілу густини та виявлення зон їх найбільшої зміни дають можливість знайти механізм для пояснення динамічних процесів усередині Землі.

**Загальна постановка задачі.** Для чіткішого розуміння постановки задачі введемо поняття моделі розподілу густини, яка узгоджена з параметрами зовнішнього гравітаційного поля, і назвемо її моделлю гравітаційного розподілу густини [Козленко та ін., 1979; Церклевич, 2005]. Розглянемо розподіл густини всередині планети, що обертається

ся. Подібний розподіл густини не залежить від азимутальної координати  $\lambda$ , тобто має вигляд  $\delta(\rho, \vartheta)$ . Для такої моделі вважають, що гармонічні коефіцієнти (стоксові сталі) гравітаційного поля, крім  $C_{2m,2k}$ , дорівнюють нулю. Для гіпотези гідростатичного стану планети визначальним фактором є умова мінімуму гравітаційної енергії  $E$ , оскільки в гравітаційному полі перерозподіл мас відбувається під дією цієї умови. При цьому функції розподілу мас планети мають бути такими, що максимально узгоджують цей розподіл з існуючим гравітаційним полем небесного тіла із зафіксованою формою фігури.

Зазначимо, що пошуком зазначених функцій тою чи іншою мірою впродовж століть займалась плеяда вчених, починаючи від досліджень Ісаака Ньютона [Ньютон, 1989] до сучасних [Чандрасекхар, 1973; Мещеряков, 1991; Мориц, 1994; Кондратьев, 2007 та ін.]. Об'єкт вивчення — як фігура Землі, так і внутрішній розподіл густини та потенційна гравітаційна енергія  $E$ . Приміром, у монографії [Мориц, 1994] показано, що мінімум  $E$  досягається для однорідної кулі. Однак надзвичайно важливим є розгляд цього питання в астрономічному аспекті. Адже саме обертання небесного тіла трактують як обертання ідеального рідкого тіла. Не останню роль відіграє уточнення умов, за яких планета перебуває в стані гідростатичної рівноваги або в стані відхилення від нього, що дає змогу вивчити динамічні зміни всередині Землі. Тому будь-який поступ в означеному дослідженні дає нові можливості у розв'язанні прикладних задач у галузях астрономії, геодезії, геофізики та геології.

Досить обґрунтовані аргументи на користь зв'язку між гідростатичним станом та розподілом енергії наведені в статті [Кузнецов, 2007], де динамічні процеси пояснюються перерозподілом мас за умови мінімізації гравітаційної енергії. На підставі цього принципу подано аргументи, що пояснюють зростання функції розподілу густини від поверхні до центру планети. Тому уявляються доцільними дослідження нових і вже побудованих моделей густини на предмет їх гідростатичності (або мінімуму енергії) та можливості їх адаптації до виконання цих умов. Такий підхід, наприклад, був розглянутий Л. Шеном [Шен, 1977] і реалізований на основі варіаційного обчислення та принципів теорії управління.

На сьогодні як земну референсну модель розподілу густини взято модель PREM [Dziewonski, Anderson, 1981] — попередню референсну модель Землі (рис. 1), яка побудована на базі інформації про швидкості проходження сейсмічних хвиль. Проте модель репрезентує доволі ідеалізовану форму розподілу густини, тому її не можна вважати універсальною, оскільки вона майже не враховує дані щодо гравітаційного поля Землі (за винятком маси та полярного моменту інерції планети). Параметри гравітаційного потенціалу Землі засвідчують неоднорідності розподілу мас. Отже, це має бути відображено при побудові функцій розподілу густини в тілі Землі, зокрема і для гідростатично врівноваженого стану. Частково ця умова може бути врахована апроксимацією поверхні планети еліпсоїдом при уточненні моделі PREM (у подальшому розглянуто лише двовісний еліпсоїд).

Постає питання перевірки подібної моделі на предмет її наближення до гідростатичного стану; у такому разі її можна застосовувати для оцінювання відхилення розподілу мас від гідростатичного стану та інтерпретації динамічних процесів усередині Землі. У зв'язку з цим виникає необхідність визначення потенціалу, а далі й гравітаційної енергії всередині кулі та еліпсоїда.

Отже, наведена вище аргументація визначила спрямованість роботи: формулювання задачі та її розв'язок, який дає змогу наблизити розподіл густини в моделі PREM до стану гідростатичності Землі за рахунок впливу принципу мінімуму гравітаційної енергії.

**Формулювання задачі і методика побудови моделі.** Розглянемо одновимірний розподіл густини в моделі PREM  $\delta^0(\rho)$ , який є кусково-неперервною функцією. Потрібно знайти розподіл густини

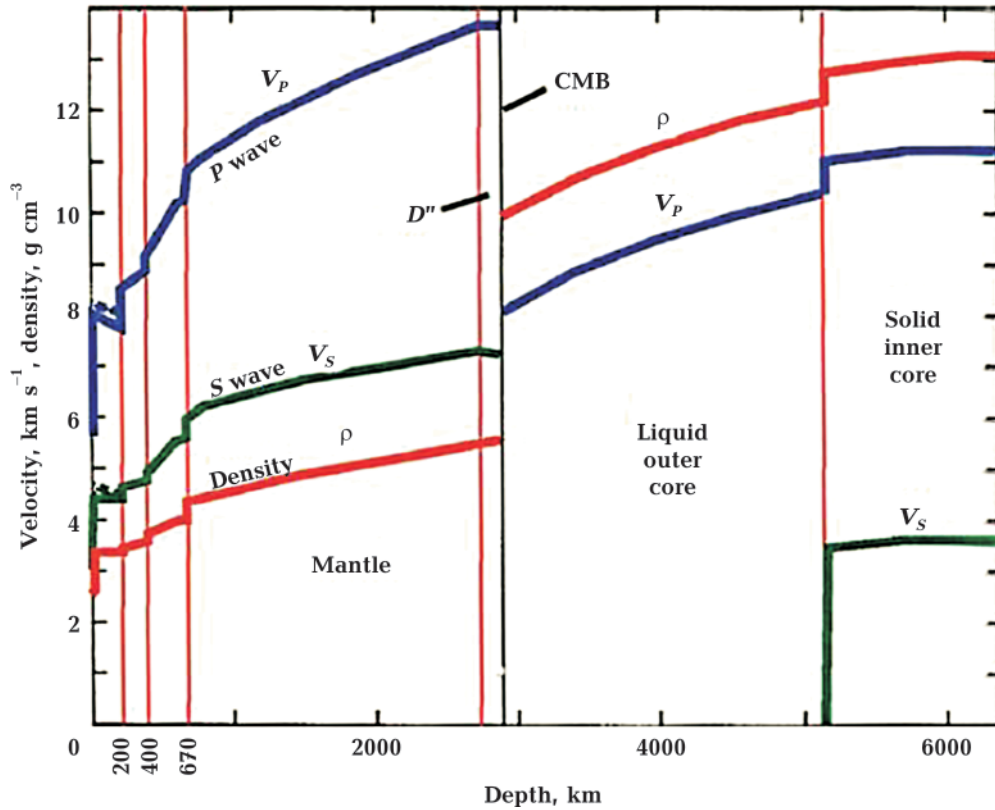


Рис. 1. Попередня еталонна модель Землі (PREM) [Dziewonski, Anderson, 1981].

Fig. 1. Preliminary Reference Earth Model (PREM) [Dziewonski, Anderson, 1981].

$$\delta(\rho) = \delta^0(\rho) + \tilde{\delta}(\rho), \quad (1)$$

де  $\tilde{\delta}(\rho)$  — варіації одновимірного розподілу густини, що визначаються з додаткових умов, які реалізують мінімум гравітаційної енергії та враховують гравітаційне поле Землі (умовно назвемо «гідростатичною складовою» розподілу густини). Для цього функцію  $\tilde{\delta}(\rho)$  ( $-1 \leq \rho \leq 1$ ) подамо у вигляді розкладу за многочленами Лежандра парних порядків [Фис та ін., 2010]:

$$\tilde{\delta}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} P_{2n}(\rho), \quad (2)$$

де

$$P_n(\rho) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\rho^2 - 1)^n}{d\rho^n} \text{ — многочлени Лежандра,} \quad (3)$$

$$r_{2n} = (4n + 1) \int_0^1 \tilde{\delta}(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho \text{ — коефіцієнти розкладу.} \quad (4)$$

Отже, рівність (1) можна записати так:

$$\delta(\rho) = \delta^0(\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} P_{2n}(\rho), \quad (5)$$

а функції (3) — відповідно, у вигляді

$$P_{2n}(\rho) = \sum_{l=0}^n d_{2n}^l \rho^{2l}.$$

Потенціал притягання можна записати у вигляді

$$U = G \int_{\tau} \frac{\delta(\rho)}{r} d\tau = G \int_{\tau} \frac{\delta^0(\rho)}{r} d\tau + G \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = U^0 + \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} U_{2n},$$

і тоді потенціальну енергію можна визначити з виразу

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \left( U^0 + \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} U_{2n} \right) \times \left( \delta^0(\rho) + \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} P_{2n}(\rho) \right) d\tau =$$

$$-\frac{1}{2} \left( \int_{\tau} U^0 \delta^0(\rho) d\tau + \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} \int_{\tau} \delta^0(\rho) U_{2n} d\tau + \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} \int_{\tau} U^0 P_{2n} d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{2m} r_{2n} \int_{\tau} U_{2m} P_{2n} d\tau \right)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n} \int_{\tau} U^0 P_{2n} d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_{2m} r_{2n} \int_{\tau} U_{2m} P_{2n} d\tau. \quad (6)$$

З урахуванням (6) запишемо функцію Лагранжа, яка реалізує поставлену задачу:

$$F(r_1, r_2, \dots, r_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = E + \int_{\tau} \left( \delta^0(\rho) - \sum_{k=1}^m r_k P_{2k}(\rho) \right)^2 d\tau + \sum_{l=1}^m \lambda_l \left( C_{2l,0} - \sum_{t=0}^{\infty} r_t d_{2l,2t} \right), \quad (7)$$

де  $\lambda_i$  — множники Лагранжа;  $C_{2n,0}$  — стоксові сталі гравітаційного поля Землі.

Мінімум функції (7) досягається за умови

$$\frac{dE}{dr_n} = \int_{\tau} \left( \delta^0(\rho) (U_{2n} - 2P_{2n}) + U^0 P_{2n} \right) d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} r_{2m} \int_{\tau} (U_{2m} P_{2n} + U_{2n} P_{2m} + P_{2m} P_{2n}) d\tau + \sum_{l=1}^n \lambda_l r_l = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

яку при обмеженні підсумовування до  $N$  можна записати в розгорнутому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 \int_{\tau} 2(U_0 P_0 + P_0^2) d\tau + \dots + r_n \int_{\tau} (U_0 P_{2N} + U_{2N} P_0 + 2P_0 P_{2N}) d\tau + \sum_{l=1}^n \lambda_l d_{l,t} = \\ = \int_{\tau} (\delta^0(U_0 - 2P_0) + U^0 P_0) d\tau; \\ \dots \\ r_0 \int_{\tau} (P_0 (U_{2N} + 2P_{2N}) + U_0 P_{2N}) d\tau \dots + r_N \int_{\tau} 2(P_{2N} (U_{2N} + P_{2N})) d\tau + \sum_{l=1}^n \lambda_l d_{l,t} = \\ = \int_{\tau} (\delta^0(U_{2N} - 2P_{2N}) + U^0 P_{2N}) d\tau. \end{array} \right. \quad (8)$$

Систему рівнянь (8) для подальших розрахунків вигідно подати у вигляді матричних записів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{01} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N0} & & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad a_{i,j} = \int_{\tau} (P_{2i} (U_{2j} + 2P_{2j}) + U_{2i} P_{2j}) d\tau, \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix},$$

$$b_{2i} = \int_0^1 (\delta^0(U_{2i} - 2P_{2i}) + U^0 P_{2i}) d\tau, \quad C = \begin{pmatrix} C_{00} \\ \cdot \\ C_{2N,0} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_0 \\ \cdot \\ r_N \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{01} & \dots & d_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{N0} & & d_{NN} \end{pmatrix}, \quad d_{i,j} = \frac{1}{Ma_e^n} \int_0^1 U_{2i} P_{2j} d\tau, \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді

$$r = A^{-1}(b + D^T \lambda), \quad \lambda = (DA^{-1}D^T)^{-1}(C - DA^{-1}b).$$

Стоксові постійні гравітаційного поля Землі зазвичай виражають через формули

$$C_{nk} = \frac{1}{Ma_e^n} \int_0^1 \delta U_{nk} d\tau, \quad S_{nk} = \frac{1}{Ma_e^n} \int_0^1 \delta V_{nk} d\tau, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

де  $M$  — маса Землі;  $a_e$  — екваторіальний радіус.

Для одновимірного розподілу густини  $\delta(\rho)$  в еліпсоїді стоксові сталі можуть мати такий вигляд [Фис та ін., 2019]:

$$C_{nk}^\rho + iS_{nk}^\rho = \frac{3RR(n-k)!k!\delta_{\tilde{n}}}{2^k(n+1)!!} \int_0^1 \delta(\rho)\rho^{n+2} d\rho \sum_{m=0}^{\frac{n-k}{2}} \frac{(-1)^k}{2^{2m}(n-k-2m)!(k+m)!} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{n-k-2m} \alpha^{2m+k-l} \beta^l \sum_{i+j=l} \frac{(-1)^{j/2} (2m+k-l-1)!!(l-1)!!}{(m-i)!i!(k-j)!j!} i^{j-2k}, \quad (10)$$

де  $\alpha = \frac{a_1}{a_e}$ ,  $\beta = \frac{a_2}{a_e}$ ,  $\gamma = \frac{a_3}{a_e}$ .

Для двовісного еліпсоїда формула (10) спрощується:

$$C_{n0}^\delta = \frac{3}{\delta_{\tilde{N}}(n+1)(n+3)} \int_0^1 \delta(\rho)\rho^{n+2} d\rho,$$

звідки отримуємо

$$\int_0^1 \delta(\rho)\rho^{n+2} d\rho = \frac{\delta_{\tilde{N}}}{3} C_{n0}^\delta \frac{(n+1)(n+3)}{(\gamma^2-1)^{\frac{n}{2}}}.$$

Зауважимо, що для радіального розподілу мас у дослідженні гідростатичного стану одновимірної планети можливе лише часткове врахування впливу гравітаційного поля. При цьому у разі сферичної планети таке врахування є спрощеним (всі стоксові сталі, за винятком  $C_{00}^0$ , дорівнюють нулю). Вираз  $(\gamma^2-1) \approx 0,1 \cdot 10^{-2}$ , тому обчислювати вплив потенціалу притягання має сенс тільки до другого порядку його розкладу за сферичними функціями. Стоксові сталі вищих порядків, що визначаються за формулою (9), а ргіогі не потрібно враховувати при побудові моделей, оскільки їх вплив несуттєвий:

$$\left( C_{2n0}^\delta \sim (\gamma^2-1)^{-2n} \approx 1,0 \cdot 10^{-n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right).$$

Для двовісного еліпсоїда отримаємо вираз, підставивши вираз (5) у формулу (10):

$$\frac{\delta_N C_{2m0}^\delta (2m+1)(2m+3)}{3(\gamma^2-1)^m} - R_{2m+2} = \sum_{n=0}^m \frac{r_{2n}(2m)!}{(2n+2m+1)!!(2m-2n)!!} = \sum_{n=0}^m d_{nm} r_m. \quad (11)$$

Реально формула (11) дає два обмеження, що накладаються на коефіцієнти  $r_0, r_2, r_4$ , оскільки для  $m > 1$  праві частини (10) на декілька порядків відрізняються від коефіцієнтів у моделях розкладу гравітаційного поля за сферичними функціями, а тому не можуть бути застосовані. Отже, значення  $r_n (n > 2)$  уточнюємо, використавши лише умову (7).

Визначимо тепер коефіцієнти лінійної системи при невідомих  $r_0, r_2, r_4$ . Для цього скористаємось формулою для потенціалу з радіальним розподілом  $(\rho^2-1)^n$ :

$$V = \int_{\tau} \frac{(\rho^2-1)^n}{r} d\tau = \frac{3V_e}{(n+1)_9} \int_9^{\infty} (\mu^2-1)^{n+1} \frac{du}{Q(u)} = 3V_e n! \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n+1-l}}{(n+1-l)!!l!} \int_9^{\infty} \mu^{2l} \frac{du}{Q(u)},$$

$$\mu^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2+u} + \frac{x_2^2}{a_2^2+u} + \frac{x_3^2}{a_3^2+u}, \quad Q(u) = \sqrt{(a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)}.$$

За допомогою цієї формули знаходимо

$$U_{2n} = \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r} d\tau = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\rho^n} \int_{\tau} \frac{(\rho^2-1)^n}{r} d\tau = \sum_{l=0}^n d_{2n}^l \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau = \sum_{l=0}^n d_{2n}^l (u_2 - u_{2l+2}) =$$

$$= \frac{3V_e}{2^n} \sum_{l=2n} \frac{(-1)^{n+1-l}}{(n+1-l)!!l!} \frac{d^n}{d\rho^n} \left( \int_9^{\infty} \mu^{2l} \frac{du}{Q(u)} \right),$$

$$u_{2l} = \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r} d\tau = \frac{3V_e}{4} \int_0^{\infty} \left( \frac{x_1^2}{a_1^2+u} + \frac{x_2^2}{a_2^2+u} + \frac{x_3^2}{a_3^2+u} \right)^{2l} \frac{du}{Q(u)} =$$

$$= \frac{3V_e}{4} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^{2t_1} \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^{2t_2} \left( \frac{x_3}{a_3} \right)^{2t_3} \frac{M_{t_1 t_2 t_3}}{t_1! t_2! t_3!},$$

$$M_{t_1 t_2 t_3} = a_1^{2t_1} a_2^{2t_2} a_3^{2t_3} \int_0^{\infty} \frac{du}{(a_1^2+u)^{t_1} (a_2^2+u)^{t_2} (a_3^2+u)^{t_3} Q(u)}.$$

На підставі отриманих виразів можна обчислити:

$$\int_{\tau} U_{2n} P_{2m} d\tau = \frac{3V_e}{2^{2m} (2m)!} \int_{\tau} \frac{d^{2m}}{d\rho^{2m}} (\rho^2-1)^{2m} \sum_{t=0}^n d_{2n}^t (u_2 - u_{2t+2}) d\tau =$$

$$= \frac{3V_e}{2^{2m} (2m)!} \sum_{t=0}^n d_{2n}^t \int_0^1 \frac{d^{2m}}{d\rho^{2m}} (\rho^2-1)^{2m} (\rho^2 \chi_2 - \rho^{2t+2} \chi_{2t+2}) d\rho =$$

$$= \frac{3V_e}{4} d\rho \sum_{t=0}^n d_{2n}^t \left( \frac{\chi_2}{(2m+5)!!} - \frac{(2t+3)!!}{(2m+2t+5)!!} \chi_{2t+2} \right),$$

$$\chi_{2l} = \frac{\rho^{2l+2} l!}{(2l+1)!!} \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!(2t_3-1)!!}{t_1! t_2! t_3!} M_{t_1 t_2 t_3}. \quad (12)$$

Інші елементи запишемо так:

$$\int_{\tau} P_{2n} P_{2m} d\tau = \begin{cases} 3 \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}, (n > 1) \cap (m = n-1); \\ 3 \frac{(2n-1)}{(4n+1)} \left( \frac{n+1}{4n+3} - \frac{n}{4n-1} \right), n = m; \\ 3 \frac{(2n+2)(2n+1)}{(4n+5)(4n+1)(4n+3)}, (n < nk); \\ 0, ((m < n-1) \cap (n > 1)) \cup (m > n+1) \cap (n < nk); \end{cases} \quad (13)$$

$$\int_{\vartheta} \delta^0(\rho) U_{2n} d\tau = 3V \sum_{t=0}^n d_{2n}^t \int_0^1 \left( \rho^4 \delta^0(\rho) d\rho \chi_2 - \int_0^1 \rho^{2t+4} \delta^0(\rho) d\rho \chi_{2t+2} \right) = 3V \sum_{t=0}^n d_{2n}^t (\chi_2 R_4 - \chi_{2t+2} R_{2t+4}),$$

$$R_t = \int_0^1 \rho^t \delta^0(\rho) d\rho. \quad (14)$$

Залишилось знайти вирази для  $\int_{\vartheta} U^0 P_{2n} d\tau$ .

Внутрішній потенціал  $U^0$  для кулі можна подати у замкнутому вигляді, але він має громіздкий вигляд і значно ускладнюється при переході до еліпсоїда. Тому далі використовуємо апроксимаційний підхід, подаючи  $\delta^0(\rho)$  у вигляді ряду за поліномами Лежандра. Скориставшись формулами (2),(4), отримаємо

$$\delta^0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{n}_n P_{2n}(\rho),$$

$$c_n = 2(4n+1) \int \delta^0(\rho) \rho P_{2n}(\rho) d\rho = 2(4n+1) \sum_{l=0}^n d_{2n}^l R_{2l}. \quad (15)$$

Ряд подібного виду для заданої функції збігається в середньому, що забезпечує рівномірну збіжність відповідного потенціалу:

$$U^0 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (u_2 - u_{2n+2}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\rho^2 \chi_2 - \rho^{2n+2} \chi_{2n+2}). \quad (16)$$

Отже, маємо

$$\int_{\tau} U^0 P_{2n} d\tau = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_{\tau} (\rho^2 \chi_2 - \rho^{2m+2} \chi_{2m+2}) P_{2n} d\tau = 3V_e \sum_{m=n-1} c_m \left( \frac{\chi_2}{(2n+5)!!} - \frac{\chi_{2m+2}}{(2m+2n+5)!!} \right). \quad (17)$$

Якщо розглядати лише частину Землі, наприклад, її еліпсоїдальний прошарок  $\tau_i \left\{ \rho_{i-1}^2 \leq \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = \rho^2 \leq \rho_{i+1}^2 \right\}$  («товстий гомеоїд» [Муратов, 1976]), то формули типу (12) — (17) для «товстого гомеоїда» можна записати у вигляді

$$\int_{\tau_i} U_{2n} P_{2m} d\tau = \frac{3V_e}{4} \sum_{l=0}^m \sum_{t=0}^n d_{2m}^l d_{2n}^t \left( \frac{\chi_2}{(2l+3)} (\rho_i^{2l+3} - \rho_{i-1}^{2l+3}) - \frac{\chi_{2t+2}}{(2l+2t+3)} (\rho_i^{2l+2t+3} - \rho_{i-1}^{2l+2t+3}) \right),$$



$$\int_{\tau_i} P_{2n} P_{2m} d\tau = \frac{3V_e}{4} \sum_{l=0}^m \sum_{t=0}^n d_{2m}^l d_{2n}^t \left( \frac{\rho_i^{2l+2t+3} - \rho_{i-1}^{2l+2t+3}}{(2l+2t+3)} \right),$$

$$\int_{\tau_i} \delta^0(\rho) U_{2n} d\tau = 3V \sum_{t=0}^n d_{2n}^t \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \left( \rho^4 \delta^0(\rho) d\rho \chi_{2t} - \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \rho^{2t+4} \delta^0(\rho) d\rho \chi_{2t+2} \right) =$$

$$= 3V \sum_{t=0}^n d_{2n}^t (\chi_{2t} R_{4t} - \chi_{2t+2} R_{2t+4}), \quad R_t = \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \rho^t \delta^0(\rho) d\rho.$$

Для кульової планети є можливість встановити формули, які визначають внутрішній потенціал кусково-неперервного розподілу мас [Фис, 2011]:

$$\delta^0(\rho) = \begin{cases} \sum_{j=0}^m a_{1,j} \rho^j, & 0 \leq \rho \leq \rho_1, \\ \sum_{j=0}^m a_{2,j} \rho^j, & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \\ \dots \\ \sum_{j=0}^m a_{n,j} \rho^j, & \rho_{n-1} \leq \rho \leq \rho_n. \end{cases}$$

Потенціал у прошарку  $\tau_i \{ \rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i \}$  з номером  $i$  визначатимемо за формулою

$$w_i = \frac{\left( M_{i-1} - \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j} \rho_i^{j+2}}{j+2} \right)}{\rho} + M_i'' + \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j}}{j+2} \left( \rho_i^{j+2} - \frac{\rho^{j+2}}{j+3} \right),$$

де  $M_{i-1}$  — маса тіла  $\tau_1 \cup \tau_2 \cup \dots \cup \tau_{i-1}$ ,  $M_{i+1}$  — постійний потенціал в середині тіла  $\tau_1 \cup \dots \cup \tau_{i-1}$ , що задається сумою шарів  $\tau_{i+1} \cup \dots \cup \tau_m$ .

Це дає змогу визначити

$$\int_{\mathfrak{g}} U^0 P_{2n} d\tau = \sum_{i=1}^{nk} \int_{\tau_i} w_i \sum_{l=0}^n d_{2n}^l \rho^{2l} d\tau = \sum_{i=1}^{nk} \int_{\tau_i} \left( \frac{\left( M_{i-1} - \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j} \rho_i^{j+2}}{j+2} \right)}{\rho} + M_i'' + \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j}}{j+2} \right) \times$$

$$\times \left( \rho_i^{j+2} - \frac{\rho^{j+2}}{j+3} \right) \sum_{l=0}^n d_{2n}^l \rho^{2l} d\tau = \sum_{i=1}^{nk} \left\{ \left( M_{i-1} - \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j} \rho_i^{j+2}}{j+2} \right) \sum_{l=0}^n \frac{d_{2n}^l (\rho_i^{2l+2} - \rho_{i-1}^{2l+2})}{2l+2} + \right.$$

$$\left. + M_i'' \sum_{l=0}^n \frac{d_{2n}^l (\rho_i^{2l+3} - \rho_{i-1}^{2l+3})}{2l+3} - \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{a_{i,j} d_{2n}^l (\rho_i^{j+2t+5} - \rho_{i-1}^{j+2t+5})}{j+2} \right\}.$$

За цими формулами можна написати співвідношення для визначення гравітаційної енергії в кожному шарі як для базової моделі PREM, так і для її модифікації:

$$\int_{\mathfrak{g}} U^0 \delta^0 d\tau = \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i} w_i = \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i} \left( \frac{\left( M_{i-1} - \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j} \rho_i^{j+2}}{j+2} \right)}{\rho} + M_i'' + \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j}}{j+2} \left( \rho_i^{j+2} - \frac{\rho^{j+2}}{j+3} \right) \sum_{l=0}^n d_{2n}^l \rho^{2l} \right) d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{nk} \left\{ \left( M_{i-1} - \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j} \rho_i^{j+2}}{j+2} \right) \sum_{l=0}^n \frac{d_{2n}^l (\rho_i^{2t+2} - \rho_{i-1}^{2t+2})}{2t+2} + \right.$$

$$\left. + M_i'' \sum_{l=0}^n \frac{d_{2n}^l (\rho_i^{2t+3} - \rho_{i-1}^{2t+3})}{2t+3} - \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{a_{i,j} d_{2n}^l (\rho_i^{j+2t+5} - \rho_{i-1}^{j+2t+5})}{(j+2)(j+3)(j+2t+5)} \right\},$$

$$\int_{\mathfrak{g}} U^0 \delta^0 d\tau = \sum_{i=1}^{nk} \int_{\tau_i} w_i \sum_{j=0}^{mk} a_{i,j} \rho^j d\tau = \sum_{i=1}^{nk} E_i,$$

де

$$E_i = \left( M_{i-1} - \sum_{j=0}^m \frac{a_{i,j} \rho_i^{j+2}}{j+2} \right) \sum_{l=0}^{mk} \frac{a_{i,l} (\rho_i^{2t+2} - \rho_{i-1}^{2t+2})}{2t+2} +$$

$$+ M_i'' \sum_{l=0}^n \frac{a_{i,l} (\rho_i^{2t+3} - \rho_{i-1}^{2t+3})}{2t+3} - \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^{mk} \frac{a_{i,l} d_{2n}^l (\rho_i^{j+2t+5} - \rho_{i-1}^{j+2t+5})}{(j+2)(j+3)(j+2t+5)}. \quad (18)$$

За наведеними формулами та алгоритмом були виконані обчислення. При цьому значення многочленів Лежандра, що входять до виразу (2), вираховували із застосуванням рекурентних співвідношень до 10-го порядку [Машимов, 1982], а визначення внутрішнього потенціалу виконувалось з точністю ( $10^{-8}$ ).

**Аналіз та інтерпретація отриманих результатів.** Реалізація розглянутої методики показала таке. Спрощена вимога досягнення мінімуму гравітаційної енергії дає дуже спотворену функцію розподілу мас. Тому для визначення достовірного розподілу густини введено додаткову умову  $\int_{\tau} \left( \delta^0(\rho) - \sum_{k=1}^m r_k P_{2k}(\rho) \right)^2 d\tau$ , виконання якої приводить до побудови ймовірних моделей розподілу густини.

У табл. 1 наведено оцінювальні величини і напрямок уздовж радіуса переміщення мас всередині планети, яке привело до найменшого значення гравітаційної енергії за незмінної маси і моменту інерції. З огляду на значення розподілу густини можна виявити наявну закономірність у «перетіканні» маси від поверхні до центру, причому межа такого перерозподілу лежить у нижній мантії на глибині  $\sim 2200$  км ( $R-0,65R$  — взято до уваги гідростатичну складову розподілу густини). Максимум переміщення мас відстежується за нашою моделлю розподілу густини на глибині  $\sim 1300$  км ( $R-0,80R$ ) і  $\sim 4450$  км ( $R-0,30R$ ). Такий розподіл густини вздовж радіуса переконливо свідчить про процеси гравітаційної диференціації мас. Зауважимо також, що сценарій з можливим перенесенням (перерозподілом) маси планети в процесі її еволюції має вагоме обґрунтування. Так, у публікації [Шен, 1977] на підставі використання теорії оптимальних процесів доведено, що внаслідок дії принципу мінімізації гравітаційної енергії квазіоднорідна Земля перетворюється на багат шарову. Гіпотеза про квазіоднорідність — одна із ключових умов гравітаційної диференціації. Якщо допустити, що повна потенціальна енергія планети в процесі її еволюції зменшується внаслідок гравітаційної диференціації, то такий результат може бути досягнутий лише через переміщення мас і збільшення

об'єму Землі. Про збільшення об'єму верхньої оболонки, а звідси і радіуса планети свідчать результати досліджень [Баркин, 2011; Shen et al., 2015; Tserklevych et al., 2017; Церклевич та ін., 2019].

Згідно з даними табл. 2, в якій наведено оцінювальні значення енергії в еліпсоїдальних прошарках Землі в результаті набуття гідростатичного стану сферичною моделлю PREM, надлишок потенціальної енергії зосереджений у внутрішньому і зовнішньому ядрі Землі. Від'ємний баланс (надлишок) енергії відстежується також у корі планети. Загальне значення енергії  $E$  для референсної моделі PREM, яка розбита на еліпсоїдальні прошарки, становить  $2,3364 \cdot 10^{39}$  ГДж, а в модифікованій моделі PREM після корегування її за гідростатичну складову —  $2,2828 \cdot 10^{39}$  ГДж.

**Т а б л и ц я 1.** Розподіл густини вздовж радіуса Землі,  $\text{кг/м}^3$

Відносний радіус, $\rho=r/R$	Модель PREM $\delta^0(\rho)$	Гідростатична складова $\tilde{\delta}(\rho)$	Модифікована модель PREM $\delta(\rho) = \delta^0(\rho) + \tilde{\delta}(\rho)$
0,00	13 088	676	13 764
0,10	13 000	709	13 709
0,20	12 139	775	12 914
0,30	11 725	799	12 524
0,40	11 139	701	11 840
0,50	10 348	459	10 806
0,60	5 396	134	5 530
0,70	5 075	-137	4 938
0,80	4 736	-228	4 509
0,90	3 984	-143	3 841
1,00	1 020	0	1 020

Зазначимо, що отримані оцінки гравітаційної потенціальної енергії  $E$  Землі для референсної моделі PREM узгоджуються з результатами, одержаними [Марченко, Заяць, 2008] на основі використання інших методів і заданих різних глобальних розподілів густини для сферичної Землі. Так, енергія для моделі Гауса становила  $-2,5073 \cdot 10^{24}$  ГДж, енергія кусково-неперервної моделі Роша  $-2,4910 \cdot 10^{24}$  ГДж, для сферичної моделі PREM  $-2,4884 \cdot 10^{24}$  ГДж. Незначну відмінність в значеннях енергії можна пояснити способом її обчислення та зображенням перелічених моделей різними аналітичними виразами. Тут відстежується проста закономірність: чим досконаліша модель розподілу густини, тим менше оцінювальне значення енергії. Подібну узгодженість спостерігали і для оцінювальних значень енергії найпростіших моделей густини, що складались з двох шарів — кора і мантія. Зауважимо також, що для однорідної кулі з радіусом Землі гравітаційна енергія дорівнює мінімальному значенню  $-2,25 \cdot 10^{24}$  ГДж [Викулин, 2004].

Звернемо увагу на те, що в модифікованій моделі PREM гідростатична складова енергії у двох прошарках (1 і 2) дорівнювала приблизно 19 %. Для такої оцінки взято середнє вагове значення з нормуванням за радіусом Землі. Крім того, найбільше значення надлишкової енергії для гідростатичної складової виявилось у прошарку, що відповідає зовнішньому ядру, яке знаходиться у розплавленому гідростатичному стані.

У статті [Кузнецов, 2007] аргументовано, що Земля прагне прийняти форму сфероїда зі стисненням  $1/f=1/298$  і при цьому мінімізувати величину розбіжності між сфероїдом і реальним геоїдом. Однак стиснення «гідростатичного» сфероїда, що обертається з періодом 24 год, має дорівнювати:  $1/f=1/232$ . Аналіз стиснення Землі показав, що Земля розширювалася протягом часу еволюції, проходячи всі значення  $1/f$ , а ступінь негідро-

Т а б л и ц я 2. Гравітаційна енергія в еліпсоїдальних прошарках Землі,  $10^{24}$  ГДж

Номер прошарку	Межі прошарків, км		Модель PREM	Гідростатична складова	Модифікована модель PREM
1	0,0	1221,5	0,0 231 508	-0,0 041 572	0,0 189 936
2	1221,5	3480,0	0,4 599 399	-0,0 677 666	0,3 921 733
3	3480,0	5701,0	1,2 972 294	0,0 149 614	1,3 121 909
4	5701,0	5771,0	0,0 548 928	0,0 004 610	0,0 553 539
5	5771,0	5971,0	0,1 610 748	0,0 013 409	0,1 624 156
6	5971,0	6151,0	0,1 501 692	0,0 009 527	0,1 511 219
7	6151,0	6346,6	0,1 685 333	0,0 006 549	0,1 691 882
8	6346,6	6356,0	0,0 082 351	0,0 000 026	0,0 082 377
9	6356,0	6368,0	0,0 105 307	-0,0 000 008	0,0 105 299
10	6368,0	6371,0	0,0 026 358	-0,0 000 007	0,0 026 351
Сумарна енергія			2,3 363 919	-0,0 535 518	2,2 828 401

статичності сучасної Землі становить приблизно 22 %. Як бачимо, це значення майже збігається зі значенням (19 %) гідростатичної складової гравітаційної енергії для модифікованої моделі PREM, що можна вважати вагомим аргументом достовірності отриманого результату в сенсі впливу зовнішнього ядра на гідростатичність Землі.

**Висновки.** У вивченні внутрішньої структурної будови Землі, безперечно, головний акцент робиться на отримання і опрацювання експериментальних геофізичних даних та перерахунок даних структурної сейсмології в моделі розподілу густини Землі. Однак на цьому шляху виникає ще низка питань, які пов'язані з урахуванням еліпсоїдальності Землі при моделюванні її структури, визначенні детальності та неоднорідності моделі, врахуванні анізотропії швидкості поширення сейсмічних хвиль, узгодженні використання даних за *P*- і *S*-хвилями, а також врахуванні гравітаційного поля, яке останнім часом активно вивчають дослідницькі центри наук про Землю. З позиції моделювання внутрішньої будови Землі важливу роль також відіграють її фігура та еволюція планети, що тою чи іншою мірою пов'язано з принципом мінімізації гравітаційної енергії.

Ми реалізували наміри розв'язати таку задачу, теоретично обґрунтувавши методіку зображення кусково-неперервної функції розподілу густини для сферичної стандартної моделі PREM многочленами Лежандра для обчислення розподілу густини, потенціалу та енергії в еліпсоїдальній планеті із використанням додаткової умови — мінімуму гравітаційної енергії. Застосування такого алгоритму дало змогу трансформувати сферично-симетричну модель PREM до гідростатично врівноваженого стану. Виявилось, що в отриманій моделі є надлишок гравітаційної енергії, який зосереджений у внутрішньому і найбільше у зовнішньому ядрі Землі, а також у корі планети. Загальне значення енергії *E* для референсної моделі PREM, яка розбита на еліпсоїдальні прошарки, становить  $2,3364 \cdot 10^{24}$  ГДж, а в модифікованій моделі PREM після корегування її за гідростатичною складовою —  $2,2828 \cdot 10^{24}$  ГДж. Таким чином, виконання принципу мінімізації гравітаційної енергії, тобто моделювання переходу планети до гідростатичного стану, привело до зменшення її енергії у ядрі Землі.

Механізм впливу мінімізації гравітаційної енергії зумовив «перетікання» маси від кори до ядра. Межа перерозподілу густини знаходиться в нижній мантії на глибині ~2200 км. Максимум переміщення мас відстежується на глибинах ~1300 і ~4450 км, причому від кори до межі поділу (~2200 км) густина вздовж радіуса порівняно з моделлю PREM є меншою, а нижче до центру ядра збільшується. Отже, умова мінімуму потенціальної гравітаційної енергії, що характеризує фігуру рівноваги, і відповідний

розподіл густини мас зумовляють найменшу потенціальну енергію і відповідатимуть гідростатичній рівновазі настільки близько, наскільки це можливо. Цей процес може відбуватись найінтенсивніше у «сприятливому середовищі», яким є зовнішнє ядро Землі. Перетікання маси всередині планети в процесі її еволюції підтверджується теоретичними розрахунками, наведеними у публікації [Шен, 1977], де показано, що повна потенційна енергія планети в процесі її еволюції, внаслідок гравітаційної диференціації зменшується. Такий процес найімовірніше може відбуватись унаслідок переміщення мас і збільшення об'єму Землі, хоча можуть бути задіяні й інші геодинамічні чинники, наприклад, пов'язані зі зміщенням ядра [Баркин, 2011].

Зауважимо, що дослідження зміни параметрів фігури Землі за результатами GNSS спостережень стаціонарно діючих станцій підтверджують збільшення радіуса Землі із швидкістю 0,2—0,35 мм/рік [Баркин, 2011; Shen et al., 2015; Tserklevych et al., 2017]. Збільшення середнього радіуса Землі підтверджується й за результатами комп'ютерного моделювання палеорекострукцій розміщення материків і водної поверхні на растрових картах палеорекострукцій за геологічною шкалою, починаючи від сучасної епохи до 600 млн років тому [Церклевич та ін., 2019]. Згідно з розрахунками, середній радіус Землі збільшився за цей період геологічного часу майже на 1 км, а об'єм Землі щодо нинішнього — лише на ~0,04 %. Якщо взяти до уваги швидкість збільшення радіуса Землі в сучасну епоху, то за 600 млн років радіус мав би збільшитися від 1200 до 2100 км. Проте моделювання даних палеорекострукцій розміщення материків і водної поверхні такі зміни радіуса не підтверджують, що може вказувати на циклічну періодичність процесу розширення і стиснення Землі. В такому разі Землю можна розглядати як динамічну систему, в якій відбувається періодична зміна об'єму за загальної тенденції до його збільшення. Маса Землі залишається постійною, а сама Земля при цьому циклічно розширюється.

### Список літератури

- Баркин Ю.В. Вековые вариации фигуры Земли в современную эпоху. В кн.: Современное состояние наук о Земле. Москва: Изд. Геол. факультета МГУ, 2011. С. 183—187.
- Буллен К.Е. Плотность Земли. Москва: Мир, 1978. 442 с.
- Викулин А.В. Введение в физику Земли. Петропавловск-Камчатский: Изд-во КГПУ, 2004. 240 с.
- Гуттенберг Б. Физика земных недр. Москва: Иностранлит, 1963. 264 с.
- Жарков В.Н., Трубицын В.П., Самсоненко Л.В. Физика Земли и планет. Фигуры и внутреннее строение. Москва: Наука, 1971. 384 с.
- Козленко В.Г. Системная интерпретация геофизических полей. Киев: Наук. думка, 1984. 220 с.
- Козленко В.Г., Старостенко В.И., Мещеряков Г.А., Дейнека Ю.П. Построение плотностной модели Земли по гравиметрическим данным. *Геофиз. журн.* 1979. Т. 1. № 3. С. 3—21.
- Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. Москва: Мир, 2007. 512 с.
- Кузнецов В.В. Принцип минимизации гравитационной энергии Земли и механизмы его реализации. *Вестник Отделения наук о Земле РАН.* 2005. № 1(23). С. 1—27.
- Лавренъев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962. 92 с.
- Магницкий В.А. Внутреннее строение и физика Земли. Москва: Недра, 1965. 380 с.
- Марченко О.М., Заяць О.С. Оцінка потенціальної гравітаційної енергії землі на основі рефе-

- ренцних моделей розподілів густини. *Геодинаміка*. Вип. 1(7). С. 5—24. <https://doi.org/10.23939/jgd2008.01.005>.
- Машимов М.М. Планетарные теории геодезии. Москва: Недра, 1982. 261 с.
- Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. Москва: Наука, 1991. 216 с.
- Мориц Г. Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. Киев: Изд-во НАН Украины, 1994. 240 с.
- Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. Москва: Атомиздат, 1976. 144 с.
- Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Москва: Наука, 1989. 690 с.
- Стейси Ф. Физика Земли. Москва: Мир, 1972. 344 с.
- Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач. *Докл. АН СССР*. 1943. Т. 39. № 5. С. 195—198.
- Фис М.М., Бридун А.М., Юрків М.І. Дослідження впливу неоднорідності розподілу мас надр планети еліпсоїдальної форми на її стоксові постійні. *Геодинаміка*. Вип. 1(26). С. 17—27. <https://doi.org/10.23939/jgd2019.01.017>.
- Фис М., Нікулішин В. Аналіз впливу еліпсоїдальності фігури Землі на її внутрішню структуру на прикладі моделі PREM. *Геодинаміка*. 2011. № 1(10). С. 17—21.
- Фис М.М., Нікулішин В.І., Озімбловський Р.М. Використання многочленів Лежандра для апроксимації одновимірних розподілів густини мас планет та дослідження їх збіжності. *Геодезія, картографія і аерофотознімання*. 2010. Вип. 73. С. 3—6.
- Церклевич А.Л. Методика побудови моделі розподілу густини тектоносфери Землі, узгодженої з гравітаційним полем та іншою геолого-геофізичною інформацією. *Геофиз. журн.* 2005. Т. 27. № 2. С. 309—314.
- Церклевич А.Л., Шило Ю.О., Шило О.М. Зміни фігури Землі — геодинамічний фактор напружено-деформованого стану літосфери. *Геодинаміка*. 2019. Вип. 1(26). С. 28—42. <https://doi.org/10.23939/jgd2019.01.028>.
- Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. Москва: Мир, 1973. 288 с.
- Шен Э.Л. О вариационном подходе к построению плотностной модели Земли. *Геофиз. сб. АН УССР*. 1977. Вып. 80. С. 44—77.
- Dziewonski, A. & Anderson, D. (1981). Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planet Interiors*, 25, 297—356. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).
- Shen, W., Shen, Z., Sun, R. & Barkin, Yu. (2015). Evidences of the expanding Earth from space-geodetic data over solid land and sea level rise in recent two decades. *Geodesy and Geodynamics*, 6(4), 248—252. <https://doi.org/10.1016/j.geog.2015.05.006>.
- Tserklevych, A.L., Zayats, O.S. & Shylo, Y.O. (2017). Dynamics of the Earth shape transformation. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 33(3), 130—141. <https://doi.org/10.3103/S0884591317030060>.

## Influence of the principle of minimum potential energy on the distribution of density and gravitational energy of the Earth for the reference model PREM

*М.М. Fys, A.L. Tserklevych, 2021*

National University «Lviv Politechic», Lviv, Ukraine

The realization of the minimum principle of potential for models of the distribution of the Earth's density is the key in studies on the detection of inhomogeneous mass distribution. Achieving the minimum gravitational energy of the Earth is equivalent to the approximation of the internal structure to the hydrostatic state, and this condition is achieved due to variations in density.

Therefore, for correct geophysical interpretation of gravimetric data, it is necessary to align the PREM (Preliminary Reference Earth Model) with harmonic coefficients of geopotential and minimum functional condition that determines gravitational energy, and only on this basis to estimate variations in density and tectonosphere. An algorithm for representing a piecewise continuous density distribution function in a spherical PREM model by Legendre polynomials is proposed in the paper to calculate the density, potential and energy distribution in an ellipsoidal planet using an additional condition — the minimum of gravitational energy. The use of such an algorithm made it possible to transform the spherically symmetric PREM model to a hydrostatically balanced state. Estimation of density redistribution and identification of the areas of their maximal changes provide a mechanism for explanation of dynamic processes in the Earth's interior.

As a result of achieving the hydrostatic state by the spherical model PREM estimating values of energy in ellipsoidal layers of the Earth have been obtained. An excess of potential energy is concentrated in the inner and outer core of the Earth and is almost 19 %. Negative balance (an excess) of energy is also tracked in the crust of the planet.

The total energy  $E$  for the PREM reference model, which is subdivided into ellipsoidal layers, is  $2.3364 \cdot 10^{24}$  erg, and in the modified PREM model after its correction for the hydrostatic component, it is  $2.2828 \cdot 10^{24}$  erg.

**Key words:** planet potential, PREM reference model of Earth's inner structure, Stokes constants, ellipsoid.

### References

- Barkin, Yu.V. (2011). Century variations of the Earth's figure in the modern era. In *The current state of Earth sciences* (pp. 183—187). Moscow: Ed. of the Faculty of Geology, Moscow State University (in Russian).
- Bullen, K.E. (1978). *Density of the Earth*. Moscow: Mir, 442 p. (in Russian).
- Vikulin, A.V. (2004). *Introduction to the physics of the Earth*. Petropavlovsk-Kamchatsky: KGPU publishing house, 240 p. (in Russian).
- Gutenberg, B. (1963). *Physics of the Earth's Interior*. Moscow: Inostrlit, 264 p. (in Russian).
- Zharkov, V.N., Trubitsyn, V.P. & Samsonenko, L.V. (1971). *Physics of the Earth and planets. Figures and internal structure*. Moscow: Nauka, 384 p. (in Russian).
- Kozlenko, V.G. (1984). *System interpretation of geophysical fields*. Kiev: Naukova Dumka, 220 p. (in Russian).

- Kozlenko, V.G., Starostenko, V.I., Meshcheryakov, G.A. & Deyneka, Yu.P. (1979). Building a density model of the Earth from gravimetric data. *Geofizicheskiy Zhurnal*, 1(3), 3—21 (in Russian).
- Kondratyev, B.P. (2007). *Potential theory. New methods and problems with solutions*. Moscow: Mir, 512 p. (in Russian).
- Kuznetsov, V.V. (2005). The principle of minimizing the gravitational energy of the Earth and the mechanisms of its implementation. *Vestnik Otdeleniya nauk o Zemle RAN*, (1), 1—27 (in Russian).
- Lavrentev, M.M. (1962). *On some non-correct tasks in Mathematical Physics*. Novosibirsk: Nauka, 92 p. (in Russian).
- Magnitskiy, V.A. (1965). *Internal structure and physics of the Earth*. Moscow: Nedra, 380 p. (in Russian).
- Marchenko, A.N. & Zayats, A.S. (2008). Estimation of the potential gravitational energy of the Earth based on reference density models. *Geodynamika*, (1), 5—24. <https://doi.org/10.23939/jgd2008.01.005> (in Ukrainian).
- Mashimov, M.M. (1982). *Planetary theory of Geodesy*. Moscow: Nedra, 261 p. (in Russian).
- Meshcheryakov, G.A. (1991). *Problems of the theory of potential and the generalized Earth*. Moscow: Nauka, 216 p. (in Russian).
- Moritz, G. (1994). *Figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Internal Structure of the Earth*. Kiev: Publ. House of the National Academy of Sciences of Ukraine, 240 p. (in Russian).
- Muratov, R.Z. (1976). *Potentials of an ellipsoid*. Moscow: Atomizdat, 144 p. (in Russian).
- Newton, I. (1989). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Moscow: Nauka, 690 p. (in Russian).
- Stacey, F. (1972). *Physics of the Earth*. Moscow: Mir, 344 p. (in Russian).
- Tikhonov, A.N. (1943). On the stability of inverse problems. *Doklady AN SSSR*, 39(5), 195—198 (in Russian).
- Fys, M.M., Brydun, A.M. & Yurkiv, M.I. (2019). Researching the influence of the mass distribution inhomogeneity of the ellipsoidal planet's interior on its stokes constants. *Geodynamika*, (1), 17—27. <https://doi.org/10.23939/jgd2019.01.017> (in Ukrainian).
- Fys, M., & Nikulishin, V. (2011). Analysis of the efficiency of the Earth figurine on the internal structure of the PREM model. *Geodynamika*, (1), 17—21 (in Ukrainian).
- Fys, M.M., Nikulishin, V.I., & Ozimblovsky, R.M. (2010). Use of Legendre polynomials to approximate one-dimensional mass density distributions of planets and study their convergence. *Heodeziya, kartohrafiya i aerofotoznimannya*, (73), 3—6 (in Ukrainian).
- Tserklevych, A.L. (2005). Method of building a model of the distribution of the Earth's tectonosphere density, consistent with the gravitational field and other geological-geophysical information. *Geofizicheskiy Zhurnal*, 27(2), 309—314 (in Russian).
- Tserklevych, A.L., Shylo, Y.O. & Shylo, O.M. (2019). Earth's figure changes — geodynamic factor of stressed-deformed lithosphere state. *Geodynamika*, (1), 28—42. <https://doi.org/10.23939/jgd2019.01.028> (in Ukrainian).
- Chandrasekhar, S. (1973). *Ellipsoidal figures of equilibrium*. Moscow: Mir, 288 p. (in Russian).
- Shen, E.L. (1977). On the variation approach to the construction of the density model of the Earth. *Geofizicheskiy sbornik AN USSR*, (80), 44—77 (in Russian).
- Dziewonski, A. & Anderson, D. (1981). Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planet Interiors*, 25, 297—356. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7).



Shen, W., Shen, Z., Sun, R. & Barkin, Yu. (2015). Evidences of the expanding Earth from space-geodetic data over solid land and sea level rise in recent two decades. *Geodesy and Geodynamics*, 6(4), 248—252. <https://doi.org/10.1016/j.geog.2015.05.006>.

Tserklevych, A.L., Zayats, O.S. & Shylo, Y.O. (2017). Dynamics of the Earth shape transformation. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 33(3), 130—141. <https://doi.org/10.3103/S0884591317030060>.

## Влияние принципа минимума потенциальной энергии на распределение плотности и гравитационной энергии Земли для модели PREM

М.М. Фис, А.Л. Церклевич, 2021

Национальный университет «Львовская политехника», Львов, Украина

С точки зрения моделирования внутреннего строения Земли важную роль играют ее фигура и эволюция, которые в той или иной степени связаны с гравитационной энергией и принципом ее минимизации. Реализация принципа минимума потенциальной энергии для моделей распределения плотности Земли — ключевая в исследованиях по выявлению неоднородного распределения масс. Достижение минимума гравитационной энергии Земли эквивалентно приближению внутреннего строения к гидростатическому состоянию, а реализация данного условия происходит в результате вариаций плотности. Поэтому в целях корректной геофизической интерпретации гравиметрических данных возникает необходимость в согласовании модели PREM (Preliminary Reference Earth Model) с гармоническими коэффициентами геопотенциала и условием минимума функционала, определяющего гравитационную энергию, и только на этой основе можно оценивать вариации плотности в тектоносфере. Предложен алгоритм представления кусочно-непрерывной функции распределения плотности в сферической модели PREM многочленами Лежандра для вычисления распределения плотности, потенциала и энергии в эллипсоидальной планете с использованием дополнительного условия — минимума гравитационной энергии. Применение такого алгоритма позволило трансформировать сферически-симметричную модель PREM к гидростатическому уравновешенному состоянию. Оказалось, что в полученной модели избыток потенциальной энергии концентрируется во внутреннем и внешнем ядре Земли, а также незначительно в коре планеты. Общее значение энергии  $E$  для референсной модели PREM, которая разбита на эллипсоидальные слои, составляет  $2,3364 \cdot 10^{24}$  ГДж, а в модифицированной модели PREM после корректировки ее за гидростатическую составляющую —  $2,2828 \cdot 10^{24}$  ГДж. Оценка перераспределения плотности и выявление зон их наибольшего изменения дают механизм для объяснения динамических процессов внутри Земли.

**Ключевые слова:** потенциал планеты, референсная модель PREM внутреннего строения Земли, стоксовые постоянные, эллипсоид.