

Вычисление скоростей и векторов поляризации в слабоанизотропных средах

Ю. В. Роганов¹, А. Стovas,² В. Ю. Роганов³, 2021

¹Tesseral Technologies Inc., Киев, Украина

²Норвежский технический университет, Тронхейм, Норвегия

³Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 17 февраля 2021 г.

Для вычисления квадратов фазовых скоростей в слабоанизотропных средах в статье предлагается преобразовать матрицу Кристоффеля \mathbf{K} в приспособленную систему координат, а затем к полученной матрице \mathbf{X} применить теорию возмущений. Для слабоанизотропной среды внедиагональные элементы матрицы \mathbf{X} малы по сравнению с диагональными элементами и два из них равны нулю. Диагональные элементы матрицы \mathbf{X} являются начальными приближениями квадратов фазовых скоростей. Для их уточнения предлагается использовать либо итерационные схемы, либо разложения в ряды Тейлора. Начальные члены рядов и формулы итерационных схем, выраженные через элементы матрицы \mathbf{X} , имеют компактное аналитическое представление. Нечетные члены рядов равны нулю. Для аппроксимации фазовых скоростей S_1 - и S_2 -волн предложен устойчивый метод, основанный на решении квадратного уравнения, коэффициенты которого выражены через элементы матрицы \mathbf{X} и предварительно вычисленное значение квадрата фазовой скорости qP -волны. Для всех итерационных схем и рядов выведены условия сходимости. Вектор поляризации волны с квадратом фазовой скорости λ определяется как столбец с максимальным модулем матрицы, присоединенной к \mathbf{K} - $\lambda\mathbf{I}$. Векторы групповых скоростей рассчитаны на основе известных компонент векторов поляризации и направляющего вектора, а также приведенных коэффициентов упругости. Точность вычислений продемонстрирована на стандартной модели орторомбической среды. Показано, как теорию возмущений можно применить для сред, которые не являются слабоанизотропными. Для этого к матрице Кристоффеля вначале необходимо применить несколько QR -преобразований или поворотов Якоби, а затем использовать формулы теории возмущений. Данный способ с четырьмя поворотами Якоби применен к вычислению квадратов фазовых скоростей для триклинной среды с максимальным количеством сингулярных точек — 32. Фазовые скорости вычислены этим методом с относительной погрешностью менее 0,004 %.

Ключевые слова: фазовая скорость, групповая скорость, вектор поляризации, уравнение Кристоффеля, теория возмущений.

Введение. Фазовые и групповые скорости, а также векторы поляризации являются важными геофизическими параметрами для анизотропной упругой среды. Они эффективно используются при решении прямых и обратных задач, таких как лучевое трассирование [Červený, 2005; Farra, 2005b; Pšenčík, Farra, 2005], расчет времен первых вступлений на основе эйконала [Wang et al., 2006], вычисление времени от-

раженной волны от границы анизотропного слоя [Farra et al., 2016], определение коэффициентов отражения и преломления на границах анизотропных сред [Петрашнев, 1980]. В последние годы развивается аппроксимация скоростей в анизотропных средах, основанная на вычислении возмущений среды с эллиптической анизотропией [Stovas, Fomel, 2017, 2019; Xu et al. 2017; Abedi, Stovas, 2019; Stovas et al., 2021].

В статьях [Roganov, Stovas, 2014; Roganov et al., 2019; Роганов и др., 2020] на основе теории возмущений выведены формулы для дисперсии и рассеяния фазовых скоростей в периодических слабо контрастных горизонтально-слоистых средах.

Квадраты фазовых скоростей и векторы поляризации плоских волн, распространяющихся в анизотропной однородной среде вдоль единичного вектора $\mathbf{n}=(n_i)_{i=1...3}$, являются соответственно собственными числами и собственными векторами симметрической матрицы Кристоффеля:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 + \\ &+ 2c_{16}n_1n_2 + 2c_{15}n_1n_3 + 2c_{56}n_2n_3, \\ a_{22} &= c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{44}n_3^2 + \\ &+ 2c_{26}n_1n_2 + 2c_{46}n_1n_3 + 2c_{24}n_2n_3, \\ a_{33} &= c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + c_{33}n_3^2 + \\ &+ 2c_{45}n_1n_2 + 2c_{35}n_1n_3 + 2c_{34}n_2n_3, \\ a_{12} &= c_{16}n_1^2 + c_{26}n_2^2 + c_{45}n_3^2 + \\ &+ d_{12}n_1n_2 + d_{14}n_1n_3 + d_{25}n_2n_3, \\ a_{13} &= c_{15}n_1^2 + c_{46}n_2^2 + c_{35}n_3^2 + \\ &+ d_{14}n_1n_2 + d_{13}n_1n_3 + d_{36}n_2n_3, \\ a_{23} &= c_{56}n_1^2 + c_{24}n_2^2 + c_{34}n_3^2 + \\ &+ d_{25}n_1n_2 + d_{36}n_1n_3 + d_{23}n_2n_3, \end{aligned} \quad (2)$$

$d_{12} = c_{12} + c_{66}$, $d_{13} = c_{13} + c_{55}$, $d_{14} = c_{14} + c_{56}$, $d_{23} = c_{23} + c_{44}$, $d_{25} = c_{25} + c_{46}$, $d_{36} = c_{36} + c_{45}$ и c_{ij} — нормализованные плотностью коэффициенты упругости.

Существуют разные методы вычисления собственных чисел и собственных векторов симметрических 3×3 -матриц \mathbf{K} , среди которых отметим прямой метод, основанный на точном тригонометрическом решении кубического характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{K}) &\equiv \lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr}(\mathbf{K}) - \\ &- \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{K}^2) - \operatorname{tr}^2(\mathbf{K}))/2 - \det(\mathbf{K}) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

имеющего три действительных корня

[Бронштейн, Семендяев, 1967; Smith, 1961]:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2p \cos\left(\psi + \frac{2k\pi}{3}\right) + q, \\ k &= 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $q = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{K}$, $\mathbf{V} = \mathbf{K} - q\mathbf{I}$, $f = \sqrt{\frac{1}{6} \operatorname{tr}(\mathbf{V}^2)}$, $\psi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{1}{2f^3} \det \mathbf{V}\right)$, \mathbf{I} — единичная 3×3 -матрица. Если \mathbf{K} является матрицей Кристоффеля, то значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ являются квадратами фазовых скоростей qP -, S_2 - и S_1 -волн соответственно. Отметим, что для $B \neq 0$ выполняются неравенства $f > 0$, $|\det \mathbf{V}| \leq 2f^3$ и $0 \leq \psi \leq \pi/3$.

Также, часто используется QR-метод, суть которого состоит в представлении матрицы \mathbf{K} в виде произведения $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{R}_1$, где \mathbf{Q}_1 — ортогональная матрица, а \mathbf{R}_1 — верхняя треугольная матрица. Затем, вычисляется матрица $\mathbf{K}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_1$. Такая процедура повторяется несколько раз, в результате чего формируются матрицы $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$ и $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n$. Нетрудно доказать, что матрица $\mathbf{S}_n = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_n$ является ортогональной ($\mathbf{S}_n^T = \mathbf{S}_n^{-1}$) и $\mathbf{K}_n = \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{K} \mathbf{S}_n$. Следовательно, собственные числа у матриц \mathbf{K} и \mathbf{K}_n одинаковы. Кроме того, с возрастанием n внедиагональные элементы матрицы \mathbf{K}_n стремятся к нулю [Уилкинсон, 1970; Парлетт, 1983; Хорн, Джонсон, 1989]. Следовательно, диагональные элементы матрицы \mathbf{K}_n стремятся к искомым собственным числам матрицы \mathbf{K} , а столбцы матрицы \mathbf{S}_n — к ее собственным векторам. Сходимость этого алгоритма можно ускорить, если на каждом этапе вместо матрицы \mathbf{K}_i использовать матрицу $\mathbf{K}_i - \sigma_i \mathbf{I}$, где σ_i — максимальный диагональный элемент матрицы \mathbf{K}_i .

Также популярностью пользуется метод расчета собственной пары матрицы \mathbf{K} , основанный на вращениях Якоби [Парлетт, 1983; Хорн, Джонсон, 1989]. Вращением Якоби называется преобразование подобия $\mathbf{L} = \mathbf{J}_{ij}^T \mathbf{K} \mathbf{J}_{ij}$, где \mathbf{J}_{ij} — матрица поворота на угол ψ в i, j — плоскости, где $i \neq j$ — номера осей координат. При этом угол поворота ψ определяется из условия $L_{ij} = 0$ и удовлетворяет равенству

$$\tan 2\psi = \frac{2K_{ij}}{K_{ij} - K_{ii}}. \quad (5)$$

Можно показать [Парлетт, 1983; Хорн, Джонсон, 1989], что

$$\sum_{m<n} L_{mn}^2 = \sum_{m<n} K_{mn}^2 - K_{ij}^2. \quad (6)$$

Поэтому, последовательно применяя вращения Якоби к максимальным внедиагональным элементам, получим последовательность подобных матриц, сходящуюся к диагональной матрице с искомыми собственными числами на диагонали. Матрица собственных векторов находится как произведение использованных матриц поворота \mathbf{J}_{ij} .

Матрица Кристоффеля слабо анизотропной среды обладает дополнительным свойством: ее собственный вектор для максимального собственного значения (квадрата фазовой скорости qP -волны) мало отличается от направляющего вектора, а два других собственных значения близки между собой. Это позволяет использовать теорию возмущений для вычисления собственной пары матрицы \mathbf{K} по отношению к матрице \mathbf{K}_0 некоторой изотропной среды [Farra, 2004, 2005a,b; Pšenčík, Gajewski, 1998; Rommel, 1994; Ohanian et al., 2002].

Учитывая, что большинство пород земной коры являются слабо анизотропными, много исследований было направлено на поиск устойчивых и быстрых аппроксимаций скоростей и векторов поляризации в этих средах [Thomsen, 1986]. В этих аппроксимациях обычно использовались начальные члены разложения в ряд Тейлора по параметрам анизотропии точных корней уравнения Кристоффеля.

Теория возмущений позволяет приближенно вычислять собственные числа и собственные векторы возмущенных матриц без использования уравнения Кристоффеля. Используя теорию возмущений первого порядка [Jech, Pšenčík, 1989], получили формулы для фазовых скоростей и векторов поляризации qP -, $S1$ - и $S2$ -волн в первом приближении для любых слабо анизотропных сред. Farra и Pšenčík (2003)

исследовали матрицу, возникающую в первом приближении. Они определили, какие слабо анизотропные параметры можно восстановить при использовании ее элементов, входящих в аппроксимационные формулы скоростей для qP -, $S1$ - и $S2$ -волн. Ohanian et al. (2006) показали, что использование локальной ортогональной системы координат, в которой одна из осей направлена вдоль направляющего вектора, а другая горизонтальна (WCS), имеет преимущества при определении скоростей и векторов поляризации для слабо анизотропных сред. В эту систему координат авторы пересчитывают не только матрицу Кристоффеля, но также и тензор упругости. В новой системе координат каждый элемент матрицы Кристоффеля определяется только одним значением тензора упругости, и формулы для скоростей и векторов поляризации упрощаются. Матрица Кристоффеля изотропной среды в такой системе координат диагональная с квадратами фазовых скоростей на диагонали. В случае слабо анизотропной среды внедиагональные элементы матрицы малы по сравнению с диагональными, что позволяет использовать диагональную матрицу как нулевое приближение теории возмущений.

В настоящей статье мы развиваем этот подход использованием приспособленной системы координат [Маделунг, 1968]. Необходимость использования приспособленной системы координат является следствием того, что референтная среда является вырожденной: в ней скорости поперечных волн совпадают. Отличие приспособленной системы координат от WCS [Ohanian et al., 2006] состоит в том, что оси, перпендикулярные направляющему вектору, выбираются так, чтобы обнулить два симметрично расположенных внедиагональных элемента матрицы Кристоффеля, которые соответствуют $S1$ - и $S2$ -волнам. В полученной системе координат компактно представляются ряды и рекуррентные соотношения для квадратов фазовых скоростей. Вектор поляризации для собственного числа λ_i вычисляется как

столбец с наибольшим модулем матрицы, присоединенной к $\mathbf{K}-\lambda_i \mathbf{I}$, [Хорн, Джонсон, 1989].

Теория. Будем предполагать, что рассматриваемая среда является слабо анизотропной, т. е. существует изотропная среда, матрица Кристоффеля \mathbf{K}_0 которой мало отличается от матрицы Кристоффеля \mathbf{K} .

В сферической системе координат компоненты направляющего вектора $\mathbf{n}=(n_i)_{i=1...3}$ вычисляются по формулам $n_1=\cos\varphi\sin\theta$, $n_2=\sin\varphi\sin\theta$, $n_3=\cos\theta$, где φ — азимут направляющего вектора, θ — угол с вертикалью.

Собственными числами матрицы \mathbf{K}_0 являются квадраты скоростей α^2 , β^2 продольной и двух поперечных волн, а соответствующие собственные векторы представляются формулами $\mathbf{g}_P=\mathbf{n}$, $\mathbf{g}_{SV}=(\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta)^T$, $\mathbf{g}_{SH}=(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)^T$. Поскольку β^2 — двукратное собственное число матрицы \mathbf{K}_0 , то векторы $\mathbf{h}_1=\mathbf{g}_{SV}\cos\psi+\mathbf{g}_{SH}\sin\psi$, $\mathbf{h}_2=-\mathbf{g}_{SV}\sin\psi+\mathbf{g}_{SH}\cos\psi$ также являются ортонормированными собственными векторами матрицы \mathbf{K}_0 при любом ψ . Нетрудно проверить, что соотношение $\mathbf{h}_1^T \mathbf{K} \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_2^T \mathbf{K} \mathbf{h}_1 = 0$ равносильно тому, что ψ удовлетворяет равенству

$$\tan 2\psi = \frac{2\mathbf{g}_{SV}^T \mathbf{K} \mathbf{g}_{SH}}{\mathbf{g}_{SV}^T \mathbf{K} \mathbf{g}_{SV} - \mathbf{g}_{SH}^T \mathbf{K} \mathbf{g}_{SH}}. \quad (7)$$

Преобразуем матрицу \mathbf{K} к ортонормированному базису $\mathbf{M}=(\mathbf{g}_P, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^T \mathbf{K} \mathbf{M}. \quad (8)$$

Из равенства $\mathbf{h}_1^T \mathbf{K} \mathbf{h}_2 = 0$ следует, что $X_{23}=X_{32}=0$. Следовательно, векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ являются приспособленными к возмущению $\mathbf{K}-\mathbf{K}_0$, т. е. матрица $(\mathbf{h}_i^T \mathbf{K} \mathbf{h}_j)_{i,j=1,2}$ диагональная [Маделунг, 1968].

Не ограничивая общности, будем предполагать, что $X_{22} \geq X_{33}$, поскольку выбор угла поворота $\psi+\pi/2$ вместо ψ меняет местами значения X_{22} и X_{33} .

Отметим, что из (5) и (7) следует, что матрица \mathbf{X} получается вращением Якоби из матрицы $\mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}=(\mathbf{g}_P, \mathbf{g}_{SV}, \mathbf{g}_{SH})$.

Из теории возмущений следует, что диагональные элементы матрицы \mathbf{X} являются

первыми приближениями квадратов фазовых скоростей:

$$X_{11} = v_{qP}^{(1)2}, \quad X_{22} = v_{S1}^{(1)2}, \quad X_{33} = v_{S2}^{(1)2}. \quad (9)$$

Из соотношения (8) следует

$$\begin{aligned} v_{qP}^{(1)2} &= \mathbf{g}_P^T \mathbf{K} \mathbf{g}_P = \mathbf{n}^T \mathbf{K} \mathbf{n} = a_{11}n_1^2 + a_{22}n_2^2 + \\ &+ a_{33}n_3^2 + 2a_{12}n_1n_2 + 2a_{13}n_1n_3 + 2a_{23}n_2n_3, \\ v_{S1}^{(1)2} + v_{S2}^{(1)2} &= \text{tr}(\mathbf{K}) - v_{qP}^{(1)2} = a_{11}(n_2^2 + n_3^2) + \\ &+ a_{22}(n_1^2 + n_3^2) + a_{33}(n_1^2 + n_2^2) - \\ &- 2a_{12}n_1n_2 - 2a_{13}n_1n_3 - 2a_{23}n_2n_3, \\ v_{S1}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2} &= \mathbf{g}_P^T \text{cof}(\mathbf{K}) \mathbf{g}_P = \mathbf{n}^T \text{cof}(\mathbf{K}) \mathbf{n} = \\ &= d_{11}n_1^2 + d_{22}n_2^2 + d_{33}n_3^2 + 2d_{12}n_1n_2 + \\ &+ 2d_{13}n_1n_3 + 2d_{23}n_2n_3, \end{aligned}$$

где

$$(d_{ij})_{i,j=1...3} = \text{cof}(\mathbf{K}). \quad (10)$$

Для вычисления аналитических выражений $v_{S1}^{(1)2}$, $v_{S2}^{(1)2}$ необходимо решить соответствующее квадратное уравнение. Матрица $\text{cof}(\mathbf{K})$ является присоединенной к матрице \mathbf{K} , т. е. транспонированной к матрице алгебраических дополнений ее элементов.

Для слабо анизотропной среды значения внедиагональных элементов X_{12} , X_{13} достаточно малы. Собственные значения матриц \mathbf{X} и \mathbf{K} одинаковы, поскольку эти матрицы подобны. Характеристическое уравнение матрицы \mathbf{X} представим в виде

$$\begin{aligned} &(\lambda - v_{qP}^{(1)2})(\lambda - v_{S1}^{(1)2})(\lambda - v_{S2}^{(1)2}) - \\ &- (X_{12}^2 + X_{13}^2)\lambda + X_{13}^2 v_{S1}^{(1)2} + X_{12}^2 v_{S2}^{(1)2} = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

разделим его на $(\lambda - v_{S1}^{(1)2})(\lambda - v_{S2}^{(1)2})$ и разложим результат на простые дроби по λ :

$$\lambda = v_{qP}^{(1)2} + \frac{X_{12}^2}{\lambda - v_{S1}^{(1)2}} + \frac{X_{13}^2}{\lambda - v_{S2}^{(1)2}}. \quad (12)$$

Из уравнения (12) следует итерационное соотношение для определения $\lambda = v_{qP}^{(n)2}$:

$$\begin{aligned} v_{qP}^{(n+1)2} &= v_{qP}^{(1)2} + \frac{X_{12}^2}{v_{qP}^{(n)2} - v_{S1}^{(1)2}} + \frac{X_{13}^2}{v_{qP}^{(n)2} - v_{S2}^{(1)2}}, \\ &n \geq 1. \quad (13) \end{aligned}$$

Если разделить (11) на $\lambda - v_{qp}^{(1)2}$, то получим уравнение

$$\lambda^2 - \left(v_{S1}^{(1)2} + v_{S2}^{(1)2} + \frac{X_{12}^2 + X_{13}^2}{\lambda - v_{qp}^{(1)2}} \right) \lambda + v_{S1}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2} + \frac{v_{S1}^{(1)2} X_{13}^2 + v_{S2}^{(1)2} X_{12}^2}{\lambda - v_{qp}^{(1)2}} = 0. \quad (14)$$

Дискриминант d этого уравнения (как квадратного по λ) всегда неотрицателен:

$$d = \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} + \frac{X_{12}^2 - X_{13}^2}{\lambda - v_{qp}^{(1)2}} \right)^2 + \frac{4X_{12}^2 X_{13}^2}{\left(\lambda - v_{qp}^{(1)2} \right)^2}. \quad (15)$$

Из соотношения (15) следует, что уравнение (11) имеет двукратный корень (сингулярную точку), если $X_{13}=0$ и $X_{12}^2 = \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right) \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)$. В этом случае $\lambda = v_{S1}^2 = v_{S2}^2 = v_{S2}^{(1)2}$.

Из (14) следует квадратное уравнение для итерационного определения $\lambda_1 = v_{S1}^2$, $\lambda_2 = v_{S2}^2$:

$$\lambda_{1,2}^{(n+1)2} - \left(v_{S1}^{(1)2} + v_{S2}^{(1)2} + \frac{X_{12}^2 + X_{13}^2}{\lambda_{1,2}^{(n)} - v_{qp}^{(1)2}} \right) \lambda_{1,2}^{(n+1)} + v_{S1}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2} + \frac{v_{S1}^{(1)2} X_{13}^2 + v_{S2}^{(1)2} X_{12}^2}{\lambda_{1,2}^{(n)} - v_{qp}^{(1)2}} = 0. \quad (16)$$

При решении квадратного уравнения (16) в формуле для $\lambda_1^{(n+1)}$ следует использовать $\lambda_1^{(n)}$ и $+\sqrt{d}$, а для $\lambda_2^{(n+1)}$ следует использовать $\lambda_2^{(n)}$ и $-\sqrt{d}$.

Для получения разложений в ряды v_{qp}^2 , v_{S1}^2 , v_{S2}^2 будем использовать матрицу

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} v_{qp}^{(1)2} & \varepsilon X_{12} & \varepsilon X_{13} \\ \varepsilon X_{12} & v_{S1}^{(1)2} & 0 \\ \varepsilon X_{13} & 0 & v_{S2}^{(1)2} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

полученную из матрицы \mathbf{X} умножением внедиагональных элементов на число ε . При $\varepsilon=1$ выполняется равенство $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$.

Характеристическое уравнение матрицы \mathbf{Y} представляется в виде

$$F = \left(\lambda - v_{qp}^{(1)2} \right) \left(\lambda - v_{S1}^{(1)2} \right) \left(\lambda - v_{S2}^{(1)2} \right) - \varepsilon^2 \left(X_{12}^2 + X_{13}^2 \right) \lambda + \varepsilon^2 \left(X_{13}^2 v_{S1}^{(1)2} + X_{12}^2 v_{S2}^{(1)2} \right) = 0. \quad (18)$$

Найдем ряды Тейлора λ_{qp} , λ_{S1} , λ_{S2} по ε с начальными (порядка 0) членами $v_{qp}^{(1)2}$, $v_{S1}^{(1)2}$, $v_{S2}^{(1)2}$, определенными в (10). Из четности по ε левой части равенства (18) следует, что ряды содержат только четные степени ε и квадраты внедиагональных элементов матрицы \mathbf{X} .

Подставим в уравнении (18) ряд $\lambda_{qp} = v_{qp}^{(1)2} + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 a_4 + \varepsilon^6 a_6 + O(\varepsilon^8)$ и последовательно определим его начальные члены:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{X_{12}^2}{v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}} + \frac{X_{13}^2}{v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}}, \\ a_4 &= -\frac{X_{12}^4}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right)^3} - \frac{X_{13}^4}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)^3} - \\ &\quad - \frac{X_{12}^2 X_{13}^2}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right)^2 \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)} - \\ &\quad - \frac{X_{12}^2 X_{13}^2}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right) \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)^2}, \\ a_6 &= \frac{2X_{12}^4}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right)^5} + \frac{2X_{13}^4}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)^5} + \\ &\quad + \frac{3X_{12}^4 X_{13}^2}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right)^4 \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)} + \\ &\quad + \frac{3X_{12}^2 X_{13}^4}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right) \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)^4} + \\ &\quad + \frac{X_{12}^2 X_{13}^2 \left(2X_{12}^2 + X_{13}^2 \right)}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right)^3 \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)^2} + \\ &\quad + \frac{X_{12}^2 X_{13}^2 \left(X_{12}^2 + 2X_{13}^2 \right)}{\left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} \right)^2 \left(v_{qp}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2} \right)^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично, подставляя в (18) ряды

$$\lambda_{S1} = v_{S1}^{(1)2} + \varepsilon^2 b_2 + \varepsilon^4 b_4 + \varepsilon^6 b_6 + O(\varepsilon^8)$$

и

$$\lambda_{S2} = v_{S2}^{(1)2} + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^4 u_4 + \varepsilon^6 u_6 + O(\varepsilon^8),$$

определяем их начальные члены:

$$\begin{aligned}
 b_2 &= -\frac{X_{12}^2}{v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}}, \\
 b_4 &= \frac{X_{12}^4}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}\right)^3} + \frac{X_{12}^2 X_{13}^2}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}\right)^2 \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)}, \\
 b_6 &= -\frac{2X_{12}^6}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}\right)^5} - \\
 &\quad - \frac{3X_{12}^4 X_{13}^2}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}\right)^4 \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)} + \\
 &\quad + \frac{X_{12}^2 X_{13}^2 \left(X_{12}^2 - X_{13}^2\right)}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}\right)^3 \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^2}, \\
 u_2 &= -\frac{X_{13}^2}{v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}}, \\
 u_4 &= \frac{X_{13}^4}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^3} - \frac{X_{12}^2 X_{13}^2}{\left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right) \left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^2}, \\
 u_6 &= -\frac{2X_{13}^6}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^5} + \frac{3X_{12}^2 X_{13}^4}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^4 \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)} - \\
 &\quad - \frac{X_{12}^2 X_{13}^2 \left(X_{12}^2 - X_{13}^2\right)}{\left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^3 \left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)^2}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что члены рядов λ_{S1} , λ_{S2} порядка 2 и выше содержат в знаменателях множители $\left(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right)$, которые стремятся к нулю, если $v_{S1}^{(1)2} \rightarrow v_{S2}^{(1)2}$. В связи с этим, ряды λ_{S1} , λ_{S2} в окрестностях сингулярных точек не сходятся. Чтобы преодолеть это препятствие, можно использовать ряды

$$\begin{aligned}
 r &= r_0 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^4 r_4 + \varepsilon^6 r_6 + O(\varepsilon^8), \\
 s &= s_0 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^4 s_4 + \varepsilon^6 s_6 + O(\varepsilon^8) \quad (21)
 \end{aligned}$$

для коэффициентов квадратного многочлена $(\lambda - \lambda_{S1})(\lambda - \lambda_{S2}) = \lambda^2 - r\lambda + s$. Поскольку характеристическое уравнение (18) представляется в виде $F = (\lambda - \lambda_{qP})(\lambda^2 - r\lambda + s)$, из теоремы Виета следует

$$r_0 = v_{S1}^{(1)2} + v_{S2}^{(1)2}, \quad r_2 = -a_2,$$

$$\begin{aligned}
 r_4 &= -a_4, \quad r_6 = -a_6, \quad s_0 = v_{S1}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2}, \\
 s_2 &= \left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right) a_2 - \varepsilon^2 \left(X_{12}^2 + X_{13}^2\right), \\
 s_4 &= \left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right) a_4 + a_2^2, \\
 s_6 &= \left(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}\right) a_6 + 2a_2 a_4. \quad (22)
 \end{aligned}$$

В формулы (22) входят коэффициенты a_k из соотношения (19), которые являются членами ряда для qP -волны и их использование позволяет получить достаточно точные значения начальных членов разложений r , s для любых направлений, включая окрестности сингулярных точек.

Для определения λ_{S1} , λ_{S2} необходимо после вычисления r , s решить уравнение

$$\lambda^2 - r\lambda + s = 0.$$

Отметим также, что если вычислено (любым способом) достаточно точное значение квадрата скорости qP -волны λ_{qP} , то коэффициенты r , s квадратного уравнения $\lambda^2 - r\lambda + s = 0$ для квадратов скоростей $S1$ - и $S2$ -волн можно найти из соотношений

$$\begin{aligned}
 r &= v_{qP}^{(1)2} + v_{S1}^{(1)2} + v_{S2}^{(1)2} + X_{12}^2 + X_{13}^2 - \lambda_{qP}, \\
 s &= \left(v_{qP}^{(1)2} v_{S1}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2} X_{13}^2 - v_{S2}^{(1)2} X_{12}^2\right) / \lambda_{qP}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 s &= v_{qP}^{(1)2} v_{S1}^{(1)2} + v_{qP}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2} + \\
 &\quad + v_{S1}^{(1)2} v_{S2}^{(1)2} - X_{12}^2 - X_{13}^2 - r\lambda_{qP}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Вычисление собственных векторов. Собственные векторы \mathbf{g}_i матрицы \mathbf{K} являются столбцами присоединенных матриц $\text{sof}(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I})$, где \mathbf{I} — единичная 3×3 -матрица, λ_i , $i = qP, S1, S2$ -собственные числа матрицы \mathbf{K} . Выбираем столбец присоединенной матрицы с наибольшим модулем и делим его элементы на этот модуль. В результате получаем нормированный собственный вектор (вектор поляризации) для собственного числа λ_i . Это правило нельзя применять в сингулярных точках для $S1$ - и $S2$ -волн, поскольку в этих точках все элементы присоединенной матрицы равны нулю. Однако в этих точках и векторы поляризации $S1$ - и $S2$ -волн определяются неоднозначно.

Вычисление групповых скоростей. После вычисления собственных чисел λ_i и

собственных векторов \mathbf{g}_i ; матрицы \mathbf{K} вектор групповой скорости для i -й волны в фазовом направлении \mathbf{n} находим по формуле [Федоров, 1965]

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{F}\mathbf{n} / \sqrt{\lambda_i}, \quad (24)$$

где $\mathbf{F}=(f_{kl})$ — симметрическая 3×3 -матрица, $g_k^{(i)}$ — компоненты нормированного собственного вектора $\mathbf{g}_i = (g_k^{(i)})$,

$$\begin{aligned} f_{11} &= c_{11}g_1^{(i)2} + c_{66}g_2^{(i)2} + c_{55}g_3^{(i)2} + \\ &+ 2c_{16}g_1^{(i)}g_2^{(i)} + 2c_{15}g_1^{(i)}g_3^{(i)} + 2c_{56}g_2^{(i)}g_3^{(i)}, \\ f_{22} &= c_{66}g_1^{(i)2} + c_{22}g_2^{(i)2} + c_{44}g_3^{(i)2} + \\ &+ 2c_{26}g_1^{(i)}g_2^{(i)} + 2c_{46}g_1^{(i)}g_3^{(i)} + 2c_{24}g_2^{(i)}g_3^{(i)}, \\ f_{33} &= c_{55}g_1^{(i)2} + c_{44}g_2^{(i)2} + c_{33}g_3^{(i)2} + \\ &+ 2c_{45}g_1^{(i)}g_2^{(i)} + 2c_{35}g_1^{(i)}g_3^{(i)} + 2c_{34}g_2^{(i)}g_3^{(i)}, \\ f_{12} &= c_{16}g_1^{(i)2} + c_{26}g_2^{(i)2} + c_{45}g_3^{(i)2} + \\ &+ d_{12}g_1^{(i)}g_2^{(i)} + d_{14}g_1^{(i)}g_3^{(i)} + d_{25}g_2^{(i)}g_3^{(i)}, \\ f_{13} &= c_{15}g_1^{(i)2} + c_{46}g_2^{(i)2} + c_{35}g_3^{(i)2} + \\ &+ d_{14}g_1^{(i)}g_2^{(i)} + d_{13}g_1^{(i)}g_3^{(i)} + d_{36}g_2^{(i)}g_3^{(i)}, \\ f_{23} &= c_{56}g_1^{(i)2} + c_{24}g_2^{(i)2} + c_{34}g_3^{(i)2} + \\ &+ d_{25}g_1^{(i)}g_2^{(i)} + d_{36}g_1^{(i)}g_3^{(i)} + d_{23}g_2^{(i)}g_3^{(i)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сходимость итерационных схем. Представим соотношение (13) в виде

$$\Delta v_{qP}^{(n+1)} = \frac{X_{12}^2}{\Delta v_{qP}^{(n)} + \Delta v_{S1}^{(1)}} + \frac{X_{13}^2}{\Delta v_{qP}^{(n)} + \Delta v_{S2}^{(1)}}, \quad n \geq 1. \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta v_{qP}^{(n)} &= v_{qP}^{(n)2} - v_{qP}^{(1)2}, \quad \Delta v_{S1}^{(1)} = v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}, \\ \Delta v_{S2}^{(1)} &= v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}. \end{aligned}$$

Обозначим $f(x) = \frac{X_{12}^2}{x + \Delta v_{S1}^{(1)}} + \frac{X_{13}^2}{x + \Delta v_{S2}^{(1)}}$.

Итерационная схема (26) сходится в окрестности $x=0$, если $|f'(0)| < 1$ [Самарский, 1987]. Поскольку, $f'(0) = \frac{X_{12}^2}{(\Delta v_{S1}^{(1)})^2} + \frac{X_{13}^2}{(\Delta v_{S2}^{(1)})^2}$ то критерием сходимости схем (13) и (26) является соотношение

$$\chi_{qP} = \frac{X_{12}^2}{(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2})^2} + \frac{X_{13}^2}{(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2})^2} < 1. \quad (27)$$

Исследование производной от выражений для корней уравнения (16) показывает, что итерационное вычисление v_{S1}^2, v_{S2}^2 является устойчивым, если соответственно выполняются неравенства

$$\chi_{S1} = \frac{X_{12}^2}{(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2})^2} < 1, \quad (28)$$

$$\chi_{S2} = \frac{X_{13}^2}{(v_{qP}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2})^2} < 1. \quad (29)$$

Сходимость рядов для вычисления собственных чисел. Чтобы оценить границы сходимости рядов для $\lambda_{qP}, \lambda_{S1}, \lambda_{S2}$, воспользуемся теоремой 3.9 из книги [Като, 1972]. Для этого представим \mathbf{Y} в виде суммы $\mathbf{Y} = \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_{qP}^{(1)2} & 0 & 0 \\ 0 & v_{S1}^{(1)2} & 0 \\ 0 & 0 & v_{S2}^{(1)2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} & X_{13} \\ X_{12} & 0 & 0 \\ X_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Нетрудно проверить, что собственными числами матрицы \mathbf{B} являются числа $0, \pm \sqrt{X_{12}^2 + X_{13}^2}$. Следовательно, $\|\mathbf{B}\| = \sqrt{X_{12}^2 + X_{13}^2}$. Из теоремы 3.9 [Като, 1972] следует, что ряд для собственного числа $\lambda_i, (i=qP, S1, S2)$ матрицы \mathbf{Y} сходится, если

$$\frac{2\varepsilon \|\mathbf{B}\|}{m_i} < 1, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} m_{qP} &= v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}, \\ m_{S1} &= \min(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2}, v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}), \\ m_{S2} &= v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряды для собственных чисел $\lambda_{qP}, \lambda_{S1}, \lambda_{S2}$, матрицы \mathbf{X} с коэффициентами (19), (20) сходятся, если соответственно выполняются соотношения

$$\eta_{qP} = \frac{4(X_{12}^2 + X_{13}^2)}{(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2})^2} < 1, \quad (32)$$

$$\eta_{S1} = \frac{4(X_{12}^2 + X_{13}^2)}{\min\left[(v_{qP}^{(1)2} - v_{S1}^{(1)2})^2, (v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2})^2\right]} < 1, \quad (33)$$

$$\eta_{S2} = \frac{4(X_{12}^2 + X_{13}^2)}{(v_{S1}^{(1)2} - v_{S2}^{(1)2})^2} < 1. \quad (34)$$

Сходимость рядов для вычисления λ_{S1} , λ_{S2} по формулам (22) эквивалентна сходимости ряда для λ_{qP} и контролируется соотношением (32).

Численный пример. Проиллюстрируем точность вычисления фазовых скоростей, групповых скоростей и векторов поляризации с использованием представленных в статье итерационных схем и рядов на примере стандартной орторомбической (ОРТ) среды из статьи [Schoenberg, Helbig, 1997], матрица упругости которой имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 3.6 & 2.25 & 0 & 0 & 0 \\ & 9.84 & 2.4 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5.9375 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 1.6 & 0 \\ & & & & & 2.182 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

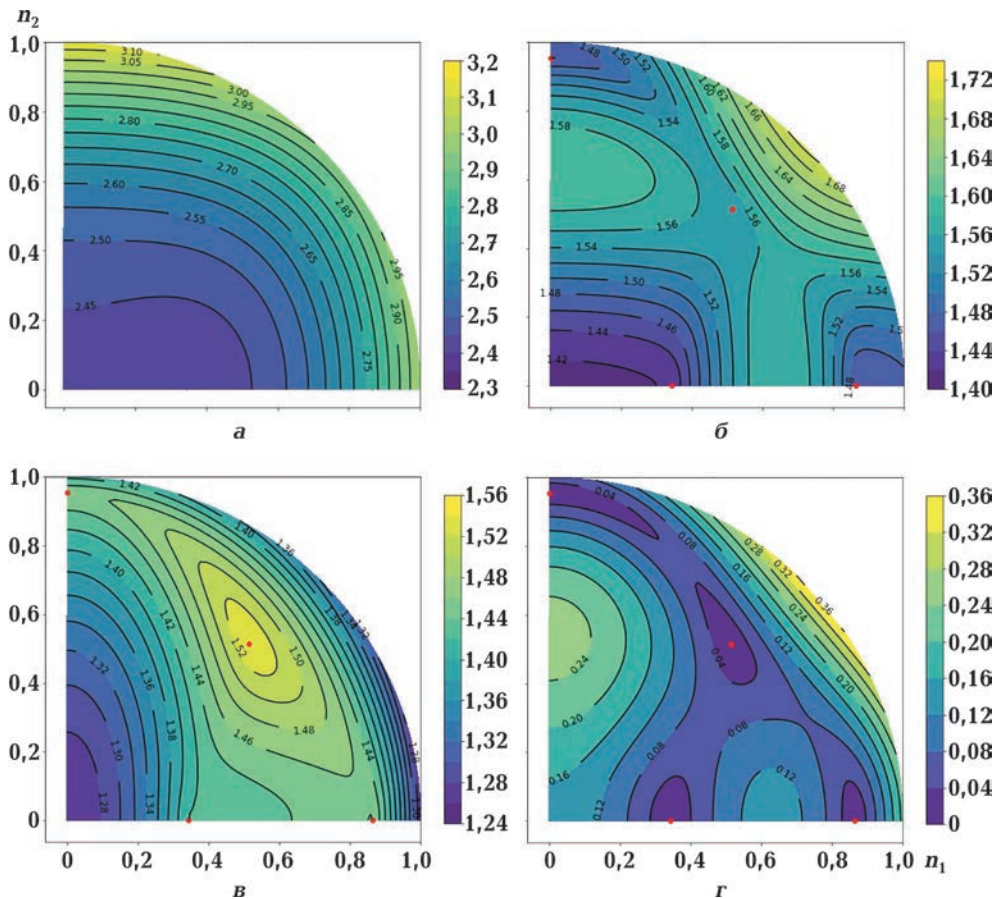


Рис. 1 Фазовые скорости (км/с) для стандартной ОРТ-среды с коэффициентами упругости из (35) в зависимости от компонент n_1, n_2 направляющего вектора для qP -волны (а), $S1$ -волны (б), $S2$ -волны (в). Разности фазовых скоростей $S1$ - и $S2$ -волн (г). Кружочками отмечены сингулярные направления, при которых разности скоростей $S1$ - и $S2$ -волн равны нулю.

Fig. 1. Phase velocities for a standard ORT medium with elastic coefficients from (35) depending on the components n_1, n_2 of the direction vector for qP -wave (a), $S1$ -wave (б), $S2$ -wave (в). Differences between the phase velocities of the $S1$ - and $S2$ -waves (г). The circles mark the singular directions at which the difference between the velocities of the $S1$ - and $S2$ -waves is equal to zero.

Значения фазовых скоростей qP -, $S1$ - и $S2$ -волн в зависимости от компонент n_1 , n_2 направляющего вектора \mathbf{n} , вычисленные с применением по три раза соответствующих итерационных схем, представлены соответственно на рис. 1, a — b .

На рис. 1, $г$ показаны разности скоростей $S1$ - и $S2$ -волн и красными кружочками отмечены сингулярные точки, в которых эти разности равны 0.

Вычисления фазовых, групповых скоростей и векторов поляризации выполнялись в первом квадранте на решетке с шагом 1 градус по углам с вертикалью и азимутам.

Итерационная схема (13) для вычисления квадратов скоростей qP -волны применялась 1, 2 и 3 раза. Максимальные относительные ошибки вычисления скоростей qP -волны по всем азимутам и углам с вертикалью соответственно составляют 0,075 %, 0,0035 % и 0,00017 %.

Аналогичные итерационные вычисления квадратов скоростей $S1$ - и $S2$ -волн выполнялись по формуле (16). Максимальные относительные ошибки для $S1$ -волны составляют 0,25 %, 0,012 % и 0,0005 %, а для $S2$ -волны — 0,45 %, 0,012 % и 0,00034 %. Изображения фазовых скоростей qP -, $S1$ - и $S2$ -волн, вычисленные с применением по три раза соответствующих итерационных схем, для всех направлений визуально со-

падают с точными значениями скоростей.

Максимальные значения параметра χ из (27—(29), обеспечивающих сходимость итерационных схем для qP -, $S1$ - и $S2$ -волн при всех φ и θ , значительно меньше 1:

$$\chi_{qP \max} = \chi_{S1 \max} = 0,052, \quad \chi_{S2 \max} = 0,036.$$

Для практических целей при вычислении фазовых скоростей достаточно применить 1, 2 итерации. Однако, если фазовые скорости использовать для определения групповых скоростей и векторов поляризации, их желательно вычислять точнее.

Для оценки точности вычисления скоростей qP -волны с использованием ряда в нем оставались 2, 3 или 4 ненулевых члена. Для вычисления членов ряда применялись формулы (19). В данном случае максимальные относительные ошибки вычисления фазовых скоростей qP -волны соответственно составляют 0,075 %, 0,0075 % и 0,001 %. Скорость сходимости ряда qP -волны немного меньше скорости сходимости итерационной схемы (13). Максимальное значение параметра η_{qP} из (32), контролирующего сходимость ряда qP -волны, меньше 1 и составляет 0,2.

Ряды на основе формул (20) расходятся и не могут использоваться для вычисления во всех направлениях фазовых скоростей $S1$ - и $S2$ -волн. На рис. 2 показаны отно-

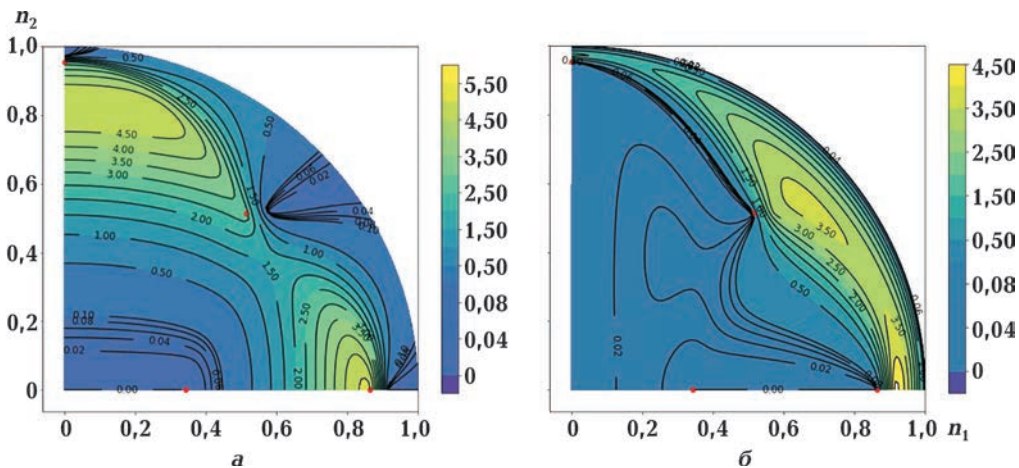


Рис. 2. Относительные погрешности фазовых скоростей $S1$ -волны (a), $S2$ -волны (b), вычисленных для стандартной модели ОРТ рядами (20) с четырьмя ненулевыми членами.

Fig. 2. Relative errors of the phase velocities of the $S1$ -wave (a), $S2$ -waves (b), calculated for the standard ORT model by series (20) with 4 nonzero terms.

сительные погрешности в процентах вычисления рядами с четырьмя ненулевыми членами скоростей $S1$ - и $S2$ -волн. Максимальные погрешности вычисления рядами для этих волн достигают соответственно значений 5,5 % и 4,5 %. Большие градиенты погрешностей сосредоточены в окрестностях трех сингулярных точек.

Выполним вычисление фазовых скоростей $S1$ - и $S2$ -волн на основе известных четырех ненулевых коэффициентов ряда qP -волны с использованием формул (22) и последующим решением квадратного уравнения. В этом случае относительные погрешности скоростей $S1$ - и $S2$ -волн составляют соответственно 0,003 % и 0,0023 %, что примерно в шесть раз больше аналогичных погрешностей, возникающих при расчете по итерационной схеме (16).

Наконец, вычислим фазовые скорости $S1$ - и $S2$ -волн на основе расчета фазовых скоростей qP -волны с выполнением трех итераций. По формуле (23) определим

коэффициенты квадратного уравнения и решим его. Относительные погрешности скоростей $S1$ и $S2$ -волн для этого случая одинаковы и составляют примерно 0,05 %.

Поскольку итерационные схемы наиболее точные, будем их использовать для расчета векторов поляризации и групповых скоростей.

Вектор поляризации для собственного числа λ_i матрицы \mathbf{K} определим как столбец с наибольшим модулем матрицы $\text{cof}(\mathbf{K}-\lambda_i\mathbf{I})$ и затем нормируем его. Отметим, что присоединенная матрица является нулевой только в сингулярных точках. В этом случае векторы поляризации $S1$ - и $S2$ - волн определяются неоднозначно. Точность вычислений оценим углом в градусах между полученным вектором \mathbf{g}_i и соответствующим точным собственным вектором матрицы \mathbf{K} . При вычислении векторов поляризации qP -волны с использованием формулы (13) при 1, 2 и трех итерациях для всех углов с вертикалью и азимутов соответственно

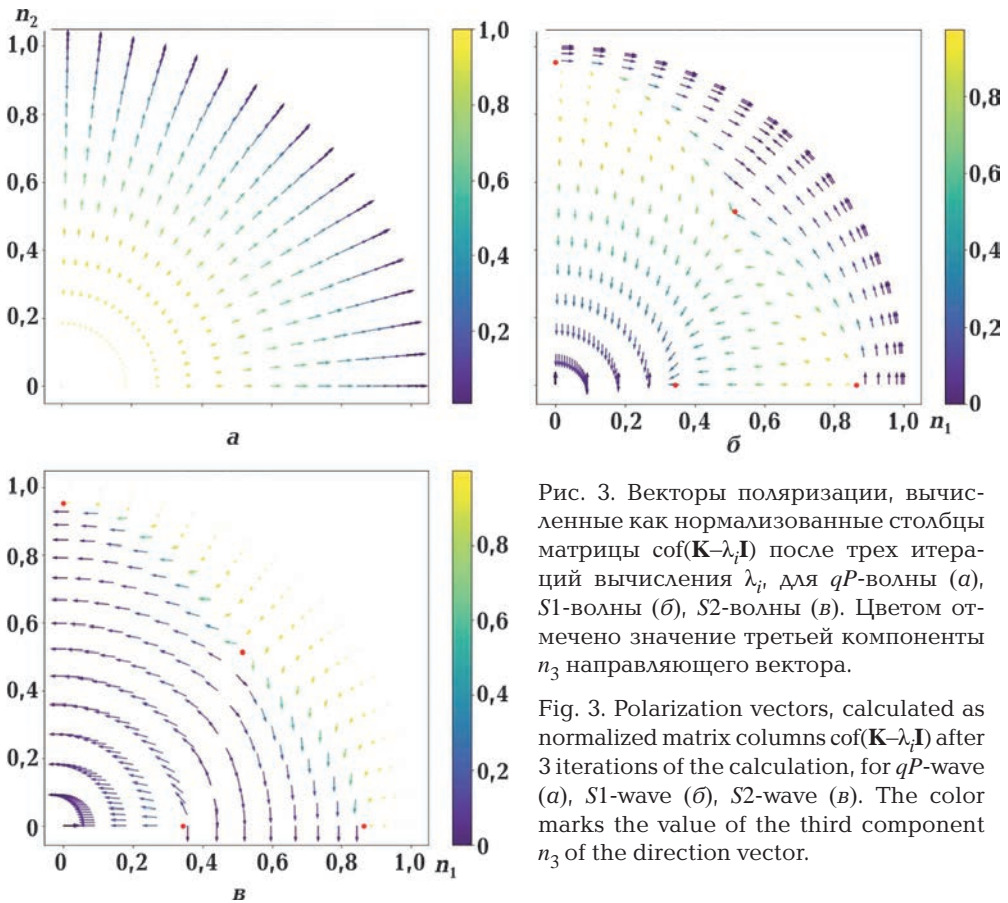


Рис. 3. Векторы поляризации, вычисленные как нормализованные столбцы матрицы $\text{cof}(\mathbf{K}-\lambda_i\mathbf{I})$ после трех итераций вычисления λ_i , для qP -волны (а), $S1$ -волны (б), $S2$ -волны (в). Цветом отмечено значение третьей компоненты n_3 направляющего вектора.

Fig. 3. Polarization vectors, calculated as normalized matrix columns $\text{cof}(\mathbf{K}-\lambda_i\mathbf{I})$ after 3 iterations of the calculation, for qP -wave (a), $S1$ -wave (b), $S2$ -wave (v). The color marks the value of the third component n_3 of the direction vector.

возникают максимальные погрешности $0,008^\circ$, $0,00034^\circ$ и $0,00016^\circ$. При вычислении векторов поляризации с использованием формулы (16) при 2 и 3-х итерациях возникают максимальные погрешности для $S1$ -волны $0,4^\circ$ и $0,012^\circ$, а для $S2$ -волны — $0,03^\circ$ и $0,00085^\circ$.

На рис. 3 изображены векторы поляризации qP -, $S1$ - и $S2$ -волн, вычисленные на основе матрицы $\text{cof}(\mathbf{K}-\lambda_i\mathbf{I})$ после трех итераций вычисления λ_i . Цветом отмечено значение третьей компоненты n_3 направляющего вектора. Визуально расположение вычисленных и точных векторов поляризации одинаково.

Векторы групповых скоростей qP -, $S1$ - и $S2$ -волн для заданного направляющего вектора \mathbf{n} определим по формуле (24) после предварительного вычисления фазовых скоростей по итерационным схемам (13), (16) и векторов поляризации по методу, изложенному выше. Точные векторы групповых скоростей также вычисляются по

формуле (24), но с использованием точных собственных чисел и точных собственных векторов матрицы Кристоффеля \mathbf{K} . Погрешность вычисления вектора групповой скорости оценим двумя числами, первое из которых — угол θ в градусах между приближенным вектором и точным, а второе — относительная погрешность δ в процентах модуля вектора групповой скорости. Вычисления показывают, что максимальные значения углов погрешности θ по всем углам с вертикалью и азимутам при выполнении двух или трех итераций по формулам (13) и (16) для разных типов волн составляют: $\theta_{qP}^{(2)}=0,004^\circ$, $\theta_{qP}^{(3)}=0,00013^\circ$, $\theta_{S1}^{(2)}=0,13^\circ$, $\theta_{S1}^{(3)}=0,003^\circ$, $\theta_{S2}^{(2)}=0,15^\circ$, $\theta_{S2}^{(3)}=0,0004^\circ$. Аналогичные значения максимальных погрешностей δ для разных типов волн: $\delta_{qP}^{(2)}=0,006\%$, $\delta_{qP}^{(3)}=0,00014\%$, $\delta_{S1}^{(2)}=0,014\%$, $\delta_{S1}^{(3)}=0,001\%$, $\delta_{S2}^{(2)}=0,014\%$, $\delta_{S2}^{(3)}=0,00003\%$.

На рис. 4 изображены значения групповых скоростей в зависимости от компонент n_1, n_2 направляющего вектора, вы-

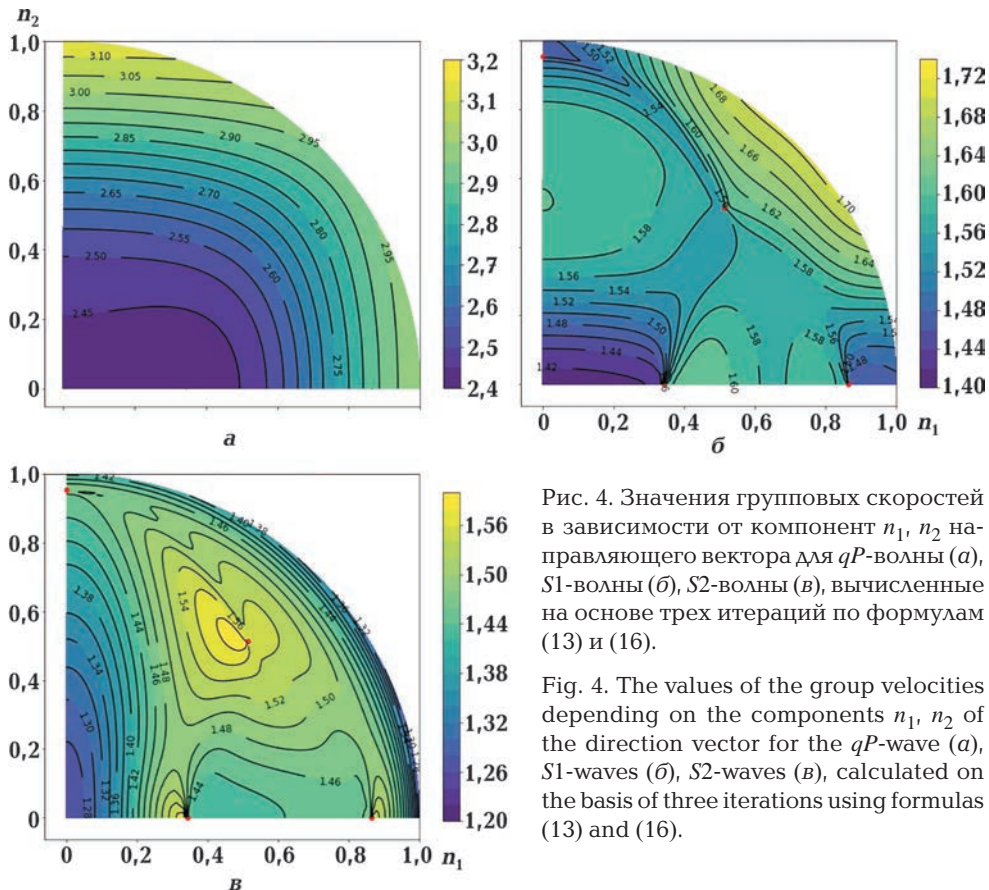


Рис. 4. Значения групповых скоростей в зависимости от компонент n_1, n_2 направляющего вектора для qP -волны (а), $S1$ -волны (б), $S2$ -волны (в), вычисленные на основе трех итераций по формулам (13) и (16).

Fig. 4. The values of the group velocities depending on the components n_1, n_2 of the direction vector for the qP -wave (a), $S1$ -waves (b), $S2$ -waves (v), calculated on the basis of three iterations using formulas (13) and (16).

численные на основе трех итераций по формулам (13) и (16). Групповые скорости имеют большие градиенты в окрестности сингулярных точек.

Пример среды с большой анизотропией. Примером среды с большой анизотропией является триклинная среда из статьи [Vavrušuk, 2005] с матрицей упругости:

$$C_{TRICL} = \begin{pmatrix} 137 & 52 & 57 & -13 & 32 & -20 \\ & 147 & 18 & -6 & 20 & -9 \\ & & 100 & 22 & -15 & 5 \\ & & & 52 & 26 & -7 \\ & & & & 75 & -40 \\ & & & & & 30 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Для этой среды существует наибольшее количество возможных сингулярных направлений. В верхнем полупространстве из этих направлений шесть относятся к контактам *qP*- и *S1*-поверхностей фазовой скорости и десять направлений к контак-

там *S1*- и *S2*-поверхностей фазовых скоростей [Vavrušuk, 2005; Роганов, 2019].

Методы определения скоростей и векторов поляризации, предназначенные для слабо анизотропных сред, в этом случае не сходятся. Эти методы сходятся, если в матрице **X**, определенной соотношением (8), внедиагональные элементы не являются большими. В данном примере это не так. Чтобы устранить эту проблему, достаточно вначале с матрицей Кристоффеля **K** выполнить несколько QR-преобразований или поворотов Якоби. В нашем примере сначала выполним три поворота Якоби, настроенных на обнуление максимальных внедиагональных элементов матрицы, а в конце поворот Якоби, обнуляющий элементы X_{23} и X_{32} .

В полученной матрице **X** диагональные элементы уже являются первыми приближениями квадратов фазовых скоростей для разных типов волн с максимальными относительными погрешностями δ по

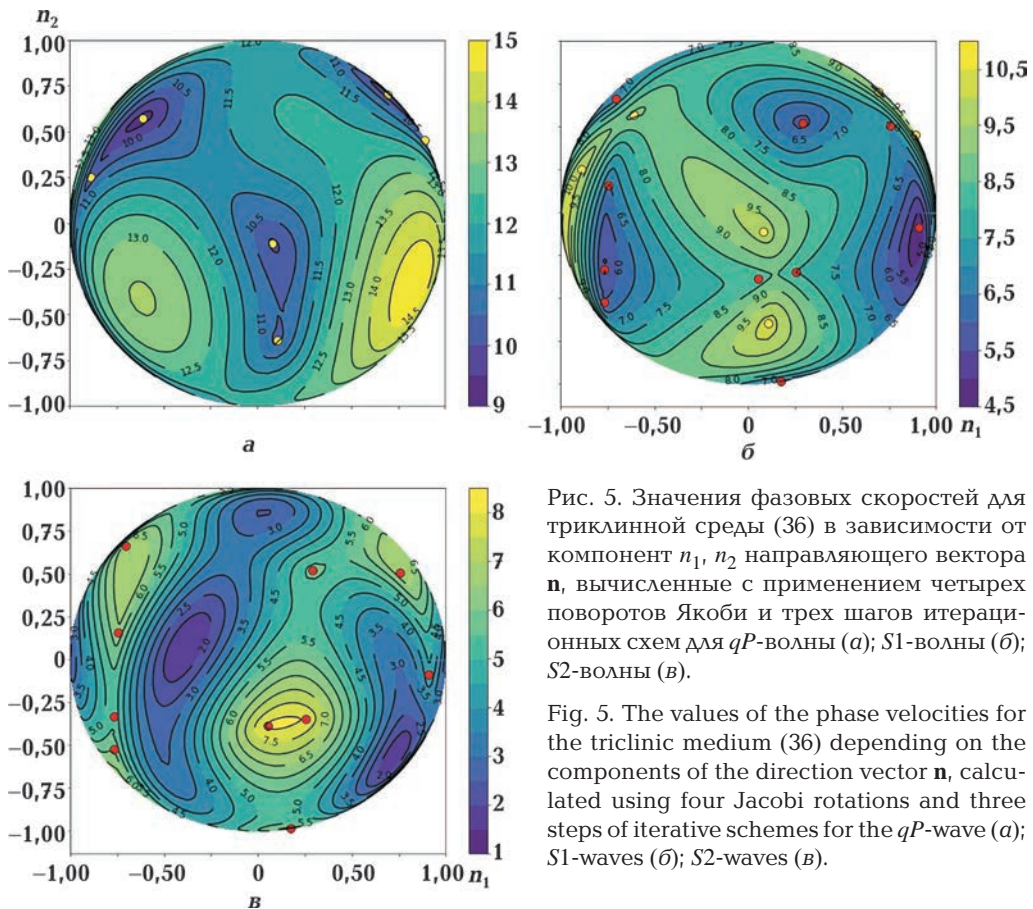


Рис. 5. Значения фазовых скоростей для триклинной среды (36) в зависимости от компонент n_1, n_2 направляющего вектора **n**, вычисленные с применением четырех поворотов Якоби и трех шагов итерационных схем для *qP*-волны (а); *S1*-волны (б); *S2*-волны (в).

Fig. 5. The values of the phase velocities for the triclinic medium (36) depending on the components of the direction vector **n**, calculated using four Jacobi rotations and three steps of iterative schemes for the *qP*-wave (a); *S1*-waves (b); *S2*-waves (v).

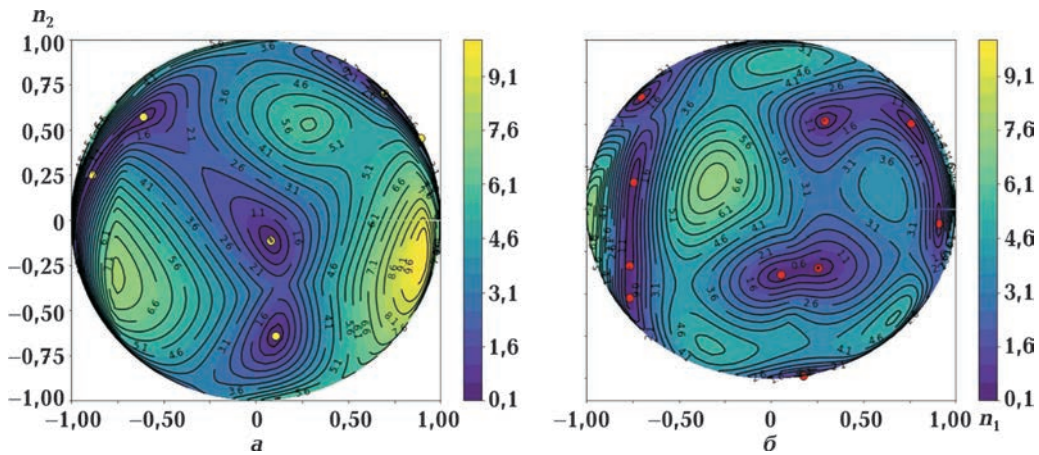


Рис. 6. Разности скоростей qP - и $S1$ -волн (а); $S1$ - и $S2$ -волн (б). Кружочками отмечены сингулярные точки, в которых эти разности равны 0.

Fig. 6. Differences between the velocities of qP - and $S1$ -waves (а); $S1$ - and $S2$ -waves (б). The circles mark the singular points at which these differences are equal to 0.

всем углам с вертикалью и азимутам $\delta_{qP}^{(1)} = 1,1\%$, $\delta_{S1}^{(1)} = 2,0\%$, $\delta_{S2}^{(1)} = 20,7\%$. Если к элементам матрицы X еще три раза применить итерационные схемы (13) и (16) для вычисления квадратов скоростей qP -, $S1$ - и $S2$ -волн соответственно, то максимальные относительные ошибки вычисления фазовых скоростей составят $\delta_{qP}^{(4)} = 0,0003\%$, $\delta_{S1}^{(1)} = 0,0035\%$, $\delta_{S2}^{(1)} = 0,00008\%$.

На рис. 5, а—в показаны значения фазовых скоростей для этой триклинной среды в зависимости от компонент n_1 , n_2 направляющего вектора \mathbf{n} , вычисленные с применением указанных выше четырех поворотов Якоби и трех шагов итерационных схем. Желтыми точками отмечены сингулярные направления от пересечения поверхностей qP - и $S1$ -фазовых скоростей, а красными точками — направления от пересечения поверхностей $S1$ - и $S2$ -фазовых скоростей.

На рис. 6, а и рис. 6, б показаны соответственно разности скоростей qP - и $S1$ -волн, а также $S1$ - и $S2$ -волн. Кружочками отмечены сингулярные точки, в которых эти разности равны 0.

Выводы. С использованием теории возмущений, примененной к матрице Кристоффеля в приспособленной системе координат, выведены формулы для аппроксимации квадратов фазовых скоростей qP -, $S1$ - и $S2$ -волн, распространяющихся

в однородной слабо анизотропной среде. Формулы основаны на использовании итерационных схем и начальных членов рядов Тейлора. Для $S1$ - и $S2$ -волн вычисляются коэффициенты квадратного уравнения, которому удовлетворяют квадраты фазовых скоростей. Это позволяет получить точные значения фазовых скоростей во всех направлениях, включая окрестности сингулярных точек. На основе предварительно определенных фазовых скоростей вычисляются векторы поляризации и групповые скорости всех типов волн.

Предложенный метод обобщен на среды, не являющиеся слабо анизотропными. В этом случае предлагается сначала к матрице Кристоффеля несколько раз применить QR-метод или поворот Якоби, а потом использовать теорию возмущений.

Точность вычислений продемонстрирована на стандартной модели орторомбической среды [Schoenberg, Helbig, 1997] и триклинной среды [Vavryšuk, 2005], у которой максимальное количество — 16 сингулярных точек в верхнем полупространстве. Из этих 16 точек 6 являются точками пересечения qP - и $S1$ -листов, а десять соответствуют пересечениям $S1$ - и $S2$ -листов. Применение разработанного метода позволило вычислить фазовые скорости в данной триклинной среде с максимальной относительной погрешностью менее 0,004 %.

Список литературы

- Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Москва: Наука, 1986. 545 с.
- Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва: Мир, 1972. 740 с.
- Маделунг Э. Математический аппарат физики. Москва: Наука, 1968. 604 с.
- Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Москва: Мир, 1983. 384 с.
- Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
- Роганов Ю. В., Стовас А., Роганов В. Ю. Дисперсия фазовых скоростей в горизонтально-слоистых анизотропных слабо контрастных периодических средах. *Геофиз. журн.* 2020. Т. 42. № 3. С. 109—126. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v42i3.2020.204704>.
- Роганов Ю. В., Стовас А., Роганов В. Ю. Свойства акустических осей в триклинных средах. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 3. С. 3—17. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i3.2019.172417>.
- Самарский А. А. Введение в численные методы. Москва: Наука, 1987. 271 с.
- Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970. 564 с.
- Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. Москва: Наука, 1965. 386 с.
- Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 655 с.
- Abedi, M. M. & Stovas, A. (2019). Extended generalized non-hyperbolic moveout approximation. *Geophysical Journal International*, 216(2), 1428—1440. <https://doi.org/10.1093/ji/ggy504>.
- Červený, V. (2005). *Seismic Ray Theory*. Prague: Charles University, 724 p.
- Farra, V. (2004). Improved first-order approximation of group velocities in weakly anisotropic media. *Studia Geophysica et Geodetica*, 48, 199—213. <https://doi.org/10.1023/B:SGEG.0000015592.36894.3b>.
- Farra, V. (2005a). High order expressions of the phase velocity and polarization of qP and qS waves in anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 147(1), 93—105. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2001.00510.x>.
- Farra, V. (2005b). First-order ray tracing for qS waves in inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 161(2), 309—324. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02570.x>.
- Farra, V. & Pšenčík, I. (2003). Properties of the zero-, first- and higher-order approximations of attributes of elastic waves in weakly anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114, 1366—1378. <https://doi.org/10.1121/1.1591772>.
- Farra, V., Pšenčík, I. & Jílek, P. (2016). Weak-anisotropy moveout approximations for P -waves in homogeneous layers of monoclinic or higher anisotropy symmetries. *Geophysics*, 81(2), C39—C59. <https://doi.org/10.1190/geo2015-0223.1>.
- Jech, J. & Pšenčík, I. (1989). First-order perturbation method for anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 99(2), 369—376. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb01694.x>.
- Ohanian, V., Syder, T. M. & Carcione, J. (2006). Weak Elastic Anisotropy by Perturbation Theory. *Geophysics*, 71(3), D45—D58. <https://doi.org/10.1190/1.2194520>.
- Pšenčík, I. & Gajewski, D. (1998). Polarization, phase velocity and NMO velocity of qP waves in arbitrary weakly anisotropic media. *Geophysics*, 63(5), 1754—1766 <https://doi.org/10.1190/1.1444470>.
- Pšenčík, I. & Farra, V. (2005). First-order ray tracing for qP waves in inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophysics*, 70(10), D65—D75. <https://doi.org/10.1190/1.2122411>.
- Roganov, Yu., & Stovas, A. (2014). Low-frequency normal wave propagation in a periodically layered medium with weak contrast in elastic properties. *Geophysical Prospecting*, 62(4), 1205—1210. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12167>.
- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2019). Low-

- frequency layer-induced dispersion in a weak contrast vertically heterogeneous orthorhombic medium. *Geophysical Prospecting*, 67(9), 2269—2279. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12804>.
- Rommel, B. E. (1994). Approximate polarization of plane waves in a medium having weak transverse isotropy: *Geophysics*, 59, 1605—1612. <https://doi.org/10.1190/1.1443549>.
- Schoenberg, M., & Helbig, K. (1997). Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*, 62(6), 1954—1974. <https://doi.org/10.1190/1.1444297>.
- Smith, O. K. (1961). Eigenvalues of a Symmetric 3×3 Matrix. *Communications ACM*, 4, 168. <http://dx.doi.org/10.1145/355578.366316>.
- Stovas, A. & Fomel, S. (2017). The generalized moveout approximation: a new parameter selection. *Geophysical Prospecting*, 65(3), 687—695. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12445>.
- Stovas, A. & Fomel, S. (2019). Generalized velocity approximation. *Geophysics*, 84(1), C27—C40. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0401.1>.
- Stovas, A., Roganov, Yu. & Roganov, V. (2021). Waves in elliptical orthorhombic model. *Geophysics* (accepted).
- Thomsen, L. (1986). Weakly Elastic Anisotropy. *Geophysics*, 51, 1954—1966. <https://doi.org/10.1190/1.1442051>.
- Vavryčuk, V. (2005). Acoustic axes in triclinic anisotropy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118, 647—653. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1954587>.
- Wang, Y., Nemeth, T. & Langan, R. (2006). An expanding-wavefront method for solving the eikonal equations in general anisotropic media. *Geophysics*, 51, T129—T135. <https://doi.org/10.1190/1.2235563>.
- Xu, S., Stovas, A. & Hao, Q. (2017). Perturbation-based moveout approximation in anisotropic media. *Geophysical Prospecting*, 65(5), 1218—1230. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12480>.

Computation of velocities and polarization vectors in weakly anisotropic media

Yu. V. Roganov¹, A. Stovas², V. Yu. Roganov³, 2021

¹Tesseral Technologies Inc., Kyiv, Ukraine

²NTNU, Trondheim, Norway

³Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

To compute the phase velocities in the weakly anisotropic media, we propose to transform the Christoffel matrix \mathbf{K} into an adapted coordinate system, and, then, apply the perturbation theory to the resulting matrix \mathbf{X} . For a weakly anisotropic medium, the off-diagonal elements of the matrix \mathbf{X} are small compared to the diagonal ones, and two of them are equal to 0. The diagonal elements of the matrix \mathbf{X} are initial approximations of the phase velocities squared. To refine them, it is proposed to use either iterative schemes or Taylor series expansions. The initial terms of the series and the formulas of iterative schemes are expressed through the elements of the matrix \mathbf{X} and have a compact analytical representation. The odd-order terms in the series are equal to 0. To approximate the phase velocities of the S_1 and S_2 waves, a stable method is proposed based on solving a quadratic equation with the coefficients being expressed in terms of the matrix elements and the precomputed value of the qP wave phase velocity squared. For all iterative schemes and series, the convergence conditions are derived. The polarization vector of the wave with the square of the phase velocity λ is defined as the column with maximum modulus of cofactor of the matrix $\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I}$. The group velocities vectors are computed based on the known components of the polarization vector, the directional vector, and the density-normalized stiffness coefficients. The computational accuracy is demonstrated for the standard orthorhombic model. It is shown how the perturbation theory can be applied to media with strong anisotropy. To do this, first we need to apply several QR transforms

or Jacobi rotations of the Christoffel matrix, and then use the perturbation theory. This method with four Jacobi rotations is applied to the calculation of the phase velocities squared for a triclinic medium with a maximum number (32) of singularity points. In this case, the phase velocities are computed with a relative error less than 0,004 %.

Key words: phase velocity, group velocity, polarization vector, Christoffel equation, perturbation theory.

References

- Bronstein, I. N., & Semendyaev, K. A. (1986). *Handbook of mathematics*. Moscow: Nauka, 545 p. (in Russian).
- Kato, T. (1972). *Perturbation theory for linear operators*. Moscow: Mir, 740 p. (in Russian).
- Madelung, E. (1968). *Mathematical tools for the physicist*. Moscow: Nauka, 604 p. (in Russian).
- Parlett, B. (1983). *The symmetric eigenvalue problem*. Moscow: Mir, 384 p. (in Russian).
- Petrashen, G. I. (1980). *Wave propagation in anisotropic elastic media*. Leningrad: Nauka, 280 p. (in Russian).
- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2020). Dispersion of phase velocities in horizontally layered anisotropic weak contrast periodic media. *Geofizicheskiy Zhurnal*, 42(3), 109—126. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v42i3.2020.204704> (in Russian).
- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2019). Properties of acoustic axes in triclinic media. *Geofizicheskiy zhurnal*, 41(3), 3—17. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i3.2019.172417> (in Russian).
- Samarskiy, A. A. (1987). *Introduction to numerical methods*. Moscow: Nauka, 271 p. (in Russian).
- Wilkinson, J. H. (1970). *The algebraic eigenvalue problem*. Moscow: Nauka, 564 p. (in Russian).
- Fedorov, F. I. (1965). *Theory of elastic waves in crystals*. Moscow: Nauka, 386 p. (in Russian).
- Horn, R., Johnson, C. (1989). *Matrix analysis*. Moscow: Mir, 655 p. (in Russian).
- Abedi, M. M. & Stovas, A. (2019). Extended generalized non-hyperbolic moveout approximation. *Geophysical Journal International*, 216(2), 1428—1440. <https://doi.org/10.1093/gji/ggy504>.
- Červený, V. (2005). *Seismic Ray Theory*. Prague: Charles University, 724 p.
- Farra, V. (2004). Improved first-order approximation of group velocities in weakly anisotropic Media. *Studia Geophysica et Geodetica*, 48, 199—213. <https://doi.org/10.1023/B:SGEG.0000015592.36894.3b>.
- Farra, V. (2005a). High order expressions of the phase velocity and polarization of qP and qS waves in anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 147(1), 93—105. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2001.00510.x>.
- Farra, V. (2005b). First-order ray tracing for qS waves in inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 161(2), 309—324. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02570.x>.
- Farra, V. & Pšenčík, I. (2003). Properties of the zero-, first- and higher-order approximations of attributes of elastic waves in weakly anisotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 114, 1366—1378. <https://doi.org/10.1121/1.1591772>.
- Farra, V., Pšenčík, I. & Jílek, P. (2016). Weak-anisotropy moveout approximations for P -waves in homogeneous layers of monoclinic or higher anisotropy symmetries. *Geophysics*, 81(2), C39—C59. <https://doi.org/10.1190/geo2015-0223.1>.
- Jech, J. & Pšenčík, I. (1989). First-order perturbation method for anisotropic media. *Geophysical Journal International*, 99(2), 369—376. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb01694.x>.
- Ohanian, V., Syder, T. M. & Carcione, J. (2006). Weak Elastic Anisotropy by Perturbation Theory. *Geophysics*, 71(3), D45—D58. <https://doi.org/10.1190/1.2194520>.
- Pšenčík, I. & Gajewski, D. (1998). Polarization, phase velocity and NMO velocity of qP waves in arbitrary weakly anisotropic media. *Geophysics*, 63(5), 1754—1766 <https://doi.org/10.1190/1.1444470>.

- Pšenčík, I. & Farra, V. (2005). First-order ray tracing for qP waves in inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophysics*, 70(10), D65—D75. <https://doi.org/10.1190/1.2122411>.
- Roganov, Yu., & Stovas, A. (2014). Low-frequency normal wave propagation in a periodically layered medium with weak contrast in elastic properties. *Geophysical Prospecting*, 62(4), 1205—1210. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12167>.
- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2019). Low-frequency layer-induced dispersion in a weak contrast vertically heterogeneous orthorhombic medium. *Geophysical Prospecting*, 67(9), 2269—2279. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12804>.
- Rommel, B. E. (1994). Approximate polarization of plane waves in a medium having weak transverse isotropy: *Geophysics*, 59, 1605—1612. <https://doi.org/10.1190/1.1443549>.
- Schoenberg, M., & Helbig, K. (1997). Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth. *Geophysics*, 62(6), 1954—1974. <https://doi.org/10.1190/1.1444297>.
- Smith, O. K. (1961). Eigenvalues of a Symmetric 3×3 Matrix. *Communications ACM*, 4, 168. <http://dx.doi.org/10.1145/355578.366316>.
- Stovas, A. & Fomel, S. (2017). The generalized moveout approximation: a new parameter selection, *Geophysical Prospecting*, 65(3), 687—695. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12445>.
- Stovas, A. & Fomel, S. (2019). Generalized velocity approximation, *Geophysics*, 84(1), C27—C40. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0401.1>.
- Stovas, A., Roganov, Yu. & Roganov, V. (2021). Waves in elliptical orthorhombic model. *Geophysics* (accepted).
- Thomsen, L. (1986). Weakly Elastic Anisotropy. *Geophysics*, 51, 1954—1966. <https://doi.org/10.1190/1.1442051>.
- Vavryčuk, V. (2005). Acoustic axes in triclinic anisotropy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118, 647—653. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1954587>.
- Wang, Y., Nemeth, T. & Langan, R. (2006). An expanding-wavefront method for solving the eikonal equations in general anisotropic media. *Geophysics*, 51, T129—T135. <https://doi.org/10.1190/1.2235563>.
- Xu, S., Stovas, A. & Hao, Q. (2017). Perturbation-based moveout approximation in anisotropic media, *Geophysical Prospecting*, 65(5), 1218—1230. <https://doi.org/10.1111/1365-2478.12480>.

Обчислення швидкостей і векторів поляризації в слабоанізотропних середовищах

Ю. В. Роганов¹, А. Стовас,² В. Ю. Роганов³, 2021

¹Tesseral Technologies Inc., Київ, Україна

²Норвезький університет, Тронхейм, Норвегія

³Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

Для обчислення квадратів фазових швидкостей у слабоанізотропних середовищах запропоновано перетворити матрицю Крістофеля \mathbf{K} у пристосовану систему координат, а потім до отриманої матриці \mathbf{X} застосувати теорію збурень. Для слабоанізотропного середовища недиагональні елементи матриці \mathbf{X} малі порівняно з діагональними і два з них дорівнюють нулю. Діагональні елементи матриці \mathbf{X} є початковими наближеннями квадратів фазових швидкостей. Для їх уточнення запропоновано використовувати ітераційні схеми або розкладання в ряди Тейлора. Початкові члени рядів і формули ітераційних схем, які виражені через елементи матриці \mathbf{X} , мають компактний аналітичний вигляд. Непарні члени рядів дорівнюють нулю. Для апроксимації фазових швидкостей S_1 - і S_2 -хвиль запропоновано стійкий метод, заснований на розв'язанні квадратного рівняння, коефіцієнти якого виража-

ють через елементи матриці \mathbf{X} і попередньо розраховане значення квадрата фазової швидкості qP -хвилі. Для всіх ітераційних схем і рядів виведено умови збіжності. Вектор поляризації хвилі з квадратом фазової швидкості λ визначено як стовпчик з максимальним модулем приєднаної матриці до \mathbf{K} - $\lambda\mathbf{I}$. Вектори групових швидкостей розраховуються на основі відомих компонент векторів поляризації, напрямного вектора, а також нормалізованих коефіцієнтів пружності. Точність обчислень продемонстровано на стандартній моделі орторомбічного середовища. Показано, як теорію збурень можна застосувати для середовищ, які не є слабоанізотропними. Для цього до матриці Крістофеля спочатку потрібно застосувати декілька QR -перетворень або поворотів Якобі, а потім використати формули теорії збурень. Цей спосіб з чотирма поворотами Якобі застосований до обчислення квадратів фазових швидкостей для триклинного середовища з максимальною кількістю сингулярних точок — 32. Фазові швидкості обчислені з відносною похибкою менш як 0,004 %.

Ключові слова: фазова швидкість, групова швидкість, вектор поляризації, рівняння Крістофеля, теорія збурень.