

Ідентифікація параметрів структури грунтових криволінійних масивів числовими методами комплексного аналізу

А.Я. Бомба, М.В. Бойчура, О.Р. Мічута, 2022

Національний університет водного господарства та природокористування,
Рівне, Україна
Надійшла 21 вересня 2021 р.

У роботах спеціалістів у галузі електричної томографії ґрунтові масиви прийнято моделювати двовимірною однозв'язною областю, межа якої складається з лінії горизонту та деякої «глибинної» лінії зі сталим на ній значенням потенціалу. При цьому останню задають дуже наближено із міркувань «відсутності» зарядів на віддалених (глибинних) ділянках. Для уникнення такого спрощення у статті запропоновано здійснювати розв'язання відповідної модельної задачі у порівняно нескладній області з подальшим конформним її відображенням на досліджуваному фізичному середовищі складної конструкції. Останнє виконується за допомогою деякої дробово-раціональної функції, тоді як для моделювання руху зарядів загалом застосовують числові методи комплексного аналізу. При цьому відкидається загальноприйняте спрощення щодо «точковості» ділянок прикладання квазіпотенціалів і враховується розподіл густини струму на останніх. Структуру досліджуваного середовища, для прикладу, вважаємо заданою за допомогою функції локальних сплесків однорідностей.

Реконструкцію зображення здійснюємо у процесі почергового ітераційного розв'язання задачі для побудови ряду полів густин струму та уточнення параметрів коефіцієнта провідності. Останнє виконується за умови мінімізації функціонала нев'язок між дискретно заданими (відомими) замірами потенціалу та функцій течії на поверхні ґрунтового масиву і відповідними розрахунковими значеннями з використанням ідей регуляризації. Невикористання інформації (через високу складність її отримання) про розподіл напруження та сили струму на глибинних ділянках породжує певну математичну невизначеність. Проте її вплив на результати реконструкції зображення на приповерхневих ділянках є несуттєвим.

Проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз. Для наведених прикладів коефіцієнт провідності на «левої частці» середовища знайдено із невеликою нев'язкою, тоді як координати ідентифікованих сплесків відносно апріорно відомих змістились у напрямку поверхні ґрунтового масиву. Це пояснюється особливостями конструкції підзадачі ідентифікації коефіцієнта провідності в разі нестачі крайових умов на глибинних ділянках та наявними суттєвими похибками квазіконформності. У перспективі цих недоліків можна «позбутись», здійснивши додаткове проміжне конформне відображення на круг та застосувавши «фіктивну ортогоналізацію» навколо точок «стику» граничних ліній течії та екіпотенціальних ліній.

Ключові слова: електрична томографія, квазіконформні відображення, ідентифікація, обернені задачі, числові методи.

Вступ. У загальному випадку задача реконструкції зображення підземного фрагмента ґрунтового масиву є некоректною, зокрема, не має єдиного розв'язку [Loke, 2021]. У той же час існуючі геологічні методи розвідки відрізняються між собою рівнем зручності, гнучкості, вартості, безпечності тощо. Через що актуальним є розвиток підходів, які б забезпечували баланс між тими чи іншими критеріями стосовно конкретних практичних вимог. Електрична томографія є сучасним перспективним інструментарієм реконструкції зображень підземних фрагментів ґрунтових масивів, який, часто в комплексі з іншими методами георозвідки, знаходить своє застосування в археології, дорожній

інфраструктурі, екології, при видобутку корисних копалин, гідрологічних дослідженнях тощо [Aizebeokhai, 2010; Модин, 2015; Rasul et al., 2018; Бондарь и др., 2020; Loke, 2021]. Дана технологія характеризується порівняно низькою вартістю комплектуючих та експлуатації, гнучкістю, простотою транспортування обладнання та його використання тощо [Aizebeokhai, 2010; Loke, 2021]. Однак вона потребує подальших удосконалень у низці математичних та методологічних аспектів [Holder, 2005; Loke, 2021].

У даній статті пропонується замість використання традиційного припущення щодо «точковості» ділянок прикладання квазіпотенціалів враховувати, аналогічно до [Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020], наявний розподіл густин струму вздовж електродів. Для цього використовуватимемо числовий метод квазіконформних відображень, при застосуванні якого автоматично вирішується проблема побудови електростатичної сітки, одночасно визначається сумарний струм, який проходить через довільний поперечний переріз за одиницю часу ([Бомба та ін., 2013] тощо). Висування ж гіпотези щодо довільності форм ліній рівних потенціалів на великих відстанях від електродів (див., наприклад, [Loke, 2021]), яку прийнято застосовувати з метою обмежити досліджувану область (підземний фрагмент ґрунтового масиву) (рис. 1, а) з усіх боків, доцільно уникнути. Здійснюватимемо це, виходячи із подібних до [Bomba et al., 2021] міркувань, за умови проведення досліджень в іншій, порівняно малій за розміром області, отриманій шляхом конформного відображення (рис. 1, б):

$$z = \frac{\tilde{z} + i\kappa}{\tilde{z} - i\kappa} \quad (z = x + iy, \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}, \kappa = \text{const}).$$

Тут

$$x = \tilde{g}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \kappa^2}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \kappa)^2}, \quad y = \tilde{g}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{2\kappa\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \kappa)^2}. \quad (1)$$

Ефективними схемами розміщення електродів для проведення досліджень в області, зображеній на рис. 1, б, є такі, як наведено у працях [Hua et al., 1987; Holder, 2005]. Не зменшуючи загальності, виберемо полярну схему, при якій заряди пропускаються через пари найвіддаленіших ділянок. Для забезпечення цього межу рис. 1, б розбиваємо \tilde{p} (\tilde{p} — наперед задане парне число) рівновіддаленими (за довжиною дуги) точками, відображаємо їх за допомогою формули (1) на ґрунтовий масив, у цих точках враховуємо ширини електродів і відображаємо відповідні лінії на рис. 1, б. Таким чином отримуємо низку ділянок прикладання квазіпотенціалів у вигляді, схематично представленому на рис. 1, а та б.

Процедури пропускання зарядів і замірювань відповідних електричних характеристик пропонуємо проводити наступним чином. Через контактні електроди $A_p B_p$ і $C_p D_p$ на p -й ($p = \overline{1, \tilde{p}}$) інжекції (див., наприклад, [Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020]) пропускаємо електричні заряди. Там же виконаємо дискретні замірювання розподілу локальних густин струму вздовж ділянок контакту електродів та ґрунту. Решта електродів у цей час застосовується для вимірювання потенціалів.

Метою роботи є адаптація методики реконструкції зображень обмежених об'єктів із застосуванням, зокрема, числових методів комплексного аналізу до ґрунтових криволинійних масивів.

Постановка задачі електричної томографії у фізичній області. Реконструкцію зображення здійснюватимемо в однозв'язній криволинійній області (див. рис. 1, б), обмеженій кривою $\partial G_z = \{(x, y) : x = \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)), y = \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)), \tau \in R\}$, де $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ — визначені неперервно диференційовані функції, які задають границю ∂G_z (рис. 1, а). Припускаємо, аналогічно до [Holder, 2005; Bomba, Malash, 2019; Bomba, Voichura, 2020], що рухи зарядів

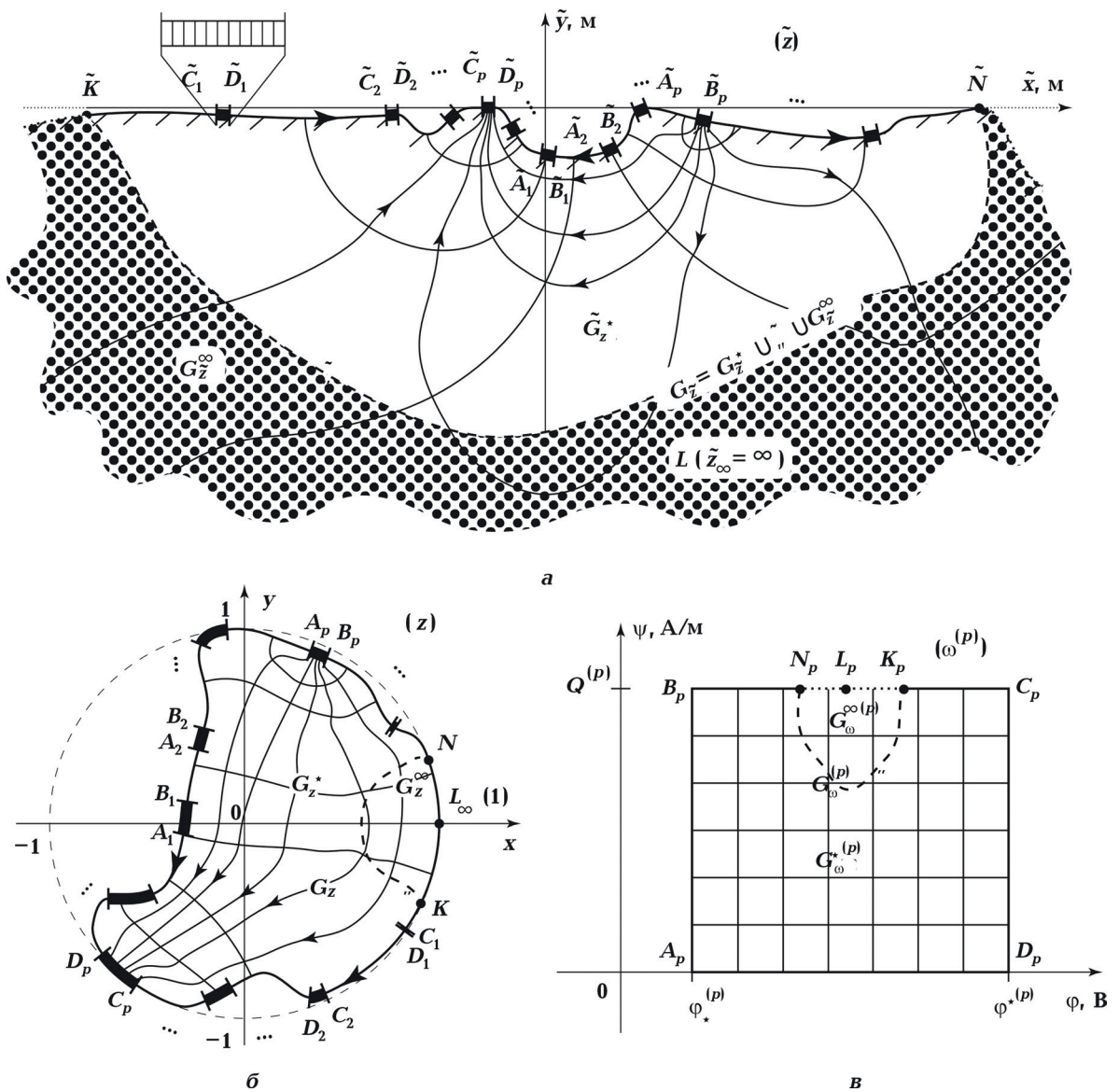


Рис. 1. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а), відповідного скінченного аналога (б) та областей комплексного квазіпотенціалу (в).

Fig. 1. Schematic representation of the «infinite» physical domain (a), the corresponding finite analogue (б) and domains of complex quasipotential (в).

у G_z відбуваються за законом Ома $\mathbf{j}^{(p)} = \sigma \text{grad} \varphi^{(p)}$ за рахунок дії різниць потенціалів:

$$\varphi^{(p)}|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \quad \varphi^{(p)}|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)} \left(\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)} > 0 \right), \quad (2)$$

при виконанні рівнянь нерозривності $\text{div} \mathbf{j}^{(p)} = 0$ у решті точках області, де $\mathbf{j}^{(p)} = (j_x^{(p)}(x, y), j_y^{(p)}(x, y))$ — густини струму; $\sigma = \sigma(x, y)$ — коефіцієнт провідності (КП); $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$ — квазіпотенціали; $p=1, 2, \dots$ — номер інжекції, кожна з яких моделюється відміченими на ∂G_z точками A_p, B_p, C_p, D_p (для зручності, границю такої області при даному p позначатимемо через $\partial G_z^{(p)}$); $A_p B_p$ та $C_p D_p$ — вибрані еквіпотенціальні лінії (ділянки прикладання електродів); $B_p C_p$ та $A_p D_p$ — непроникні граничні лінії течій. Тоді, згідно з

[Бомба та ін., 2013; Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020], у кожній точці G_z повинно виконуватись узагальнення умов Коші—Рімана:

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y}, \quad \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x}, \quad (3)$$

де $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$ — функції течії, комплексно спряжені до $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$, $(\varphi^{(p)}, \psi^{(p)}) \in G_\omega^{(p)}$ (див. рис. 1, в). Наклавши умови [Бомба та ін., 2013]

$$\psi^{(p)}|_{A_p D_p} = 0, \quad \psi^{(p)}|_{B_p N} = \psi^{(p)}|_{K C_p} = Q^{(p)} \quad (4)$$

і задавши КП $\sigma = \sigma(x, y)$, отримаємо постановку задачі на знаходження функцій $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$ і $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$. Тут $\int_{M_1 N_1} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} dl = Q^{(p)}$ ($M_1 \in B_p N \cup K C_p$, $N_1 \in A_p D_p$) — потоки векторних полів (зарядів) через ділянки $A_p B_p$ і $C_p D_p$; \mathbf{n} — одиничний вектор нормалі; dl — елемент дуги відповідної кривої; K та N — точки на $\partial G_z^* \cap \partial G_z^\infty$, координати яких визначаються залежно від значень геометричного фактору та функції чутливості [Loke, 2021].

Нехай на $\partial G_z^* \cap \partial G_z^\infty$ (фізично на $\partial G_z^* \cap \partial G_z^\infty$), окрім крайових умов (2) і (4), заданими також є дискретні заміри розподілу значень потенціалів $\overline{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$, $\underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}$ ($\varphi_*^{(p)} \leq \overline{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{(p)}$, $\varphi_*^{(p)} \leq \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{(p)}$) [Holder, 2005; Модин, 2015; Rasul et al., 2018; Бондарь и др., 2020; Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020; Loke, 2021] та локальних густин струму $\Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}$, $\Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)}$ ($\Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)} > 0$) [Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020] при деяких $\tau = \overline{\tau}_{\bar{i}^{(p)}} \in [\tau_K, \tau_C^{(p)}] \cup [\tau_B^{(p)}, \tau_N]$, $\tau = \underline{\tau}_{\underline{i}^{(p)}} \in [\tau_D^{(p)}, \tau_A^{(p)}]$, $\tau = \tau_{*j_*^{(p)}}^{(p)} \in [\tau_A^{(p)}, \tau_B^{(p)}]$, $\tau = \tau_{j_*^{(p)}}^{*(p)} \in [\tau_C^{(p)}, \tau_D^{(p)}]$ ($\underline{i}^{(p)} = 0, \overline{m}^{(p)} + 1$, $\bar{i}^{(p)} = 0, \overline{m}^{(p)} + 1$, $j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1$, $j^{*(p)} = 0, n^{*(p)} + 1$, $p = \overline{1}, \tilde{p}$), де $\tau_A^{(p)}$, $\tau_B^{(p)}$, $\tau_C^{(p)}$, $\tau_D^{(p)}$, τ_K , τ_N — параметри задання точок \tilde{A}_p , \tilde{B}_p , \tilde{C}_p , \tilde{D}_p , \tilde{K} , \tilde{N} (а отже, й A_p, B_p, C_p, D_p, K, N). Тоді застосувавши інтерполявання, отримаємо функції $\overline{\varphi}^{(p)}(M) = \overline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$ ($\tau_K \leq \tau \leq \tau_C^{(p)}$, $\tau_B^{(p)} \leq \tau \leq \tau_N$), $\underline{\varphi}^{(p)}(M) = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$, ($\tau_D^{(p)} \leq \tau \leq \tau_A^{(p)}$), $\Psi_*^{(p)}(M) = \Psi_*^{(p)}(\tau, \dots)$, ($\tau_A^{(p)} \leq \tau \leq \tau_B^{(p)}$), $\Psi^{*(p)}(M) = \Psi^{*(p)}(\tau, \dots)$, ($\tau_C^{(p)} \leq \tau \leq \tau_D^{(p)}$). Із урахуванням $\psi_*^{(p)}(M) = \int_{A_p M} \Psi_*^{(p)}(M) dl$ і $\psi^{*(p)}(M) = \int_{D_p M} \Psi^{*(p)}(M) dl$, крайові умови (2) і (4) на $\partial G_z^* \cap \partial G_z^\infty$ доповнимо наступними (див., наприклад, [Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020]):

$$\begin{aligned} \varphi^{(p)}(M)|_{B_p N} &= \overline{\varphi}^{(p)}(M), \quad \varphi^{(p)}(M)|_{K C_p} = \overline{\varphi}^{(p)}(M), \quad \varphi^{(p)}(M)|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M), \\ \psi^{(p)}(M)|_{A_p B_p} &= \psi_*^{(p)}(M), \quad \psi^{(p)}(M)|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(M). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут M — біжуча точка відповідної кривої. Очевидно, що у загальному випадку отримати будь-які заміри у решті точок $\partial G_z^\infty \cup G_z$ без певного руйнування фізичного середовища (G_z) надто проблематично або й взагалі неможливо. У такому випадку задача реконструкції зображення у вигляді (2) — (5) має безліч розв'язків стосовно шуканого КП [Holder, 2005; Loke, 2021], тоді як теоретично у всій цій множині суттєві відмінності наявні лише у точках, які знаходяться поза лінією $\partial G_z^* \cap \partial G_z^\infty$ (в G_z^∞) [Loke, 2021]. Для досягнення практичних цілей цього зазвичай достатньо.

Таким чином, задачу реконструкції зображення, подібно до [Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020; Loke, 2021], сформулюємо у вигляді (2) — (5) за умови знаходження функцій квазіпотенціалу $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$, течії $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$ ($p = \overline{1}, \tilde{p}$) та ідентифікації пара-

метрів КП. Останній, не зменшуючи загальності, шукаємо у вигляді функції локальних сплесків однорідностей [Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020], яка, із урахуванням оберненого до (1) відображення $\tilde{z} = i\kappa \frac{z+1}{z-1}$, буде мати вигляд

$$\sigma(x, y, \chi, \alpha_1, \varepsilon_1, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon_s, \tilde{x}_s, \tilde{y}_s) = \chi + \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{1 + \left((g_1(x, y) - \tilde{x}_k)^2 + (g_2(x, y) - \tilde{y}_k)^2 \right) / \varepsilon_k}, \quad (6)$$

де $\chi, \alpha_k, \varepsilon_k, \tilde{x}_k, \tilde{y}_k$ ($k = \overline{1, s}$) — параметри, що розраховуються в процесі розв'язання задачі, $\tilde{x} = g_1(x, y) = \frac{2\kappa y}{(x-1)^2 + y^2}$, $\tilde{y} = g_2(x, y) = \kappa \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$.

Постановка задачі електричної томографії в області комплексного квазіпотенціалу. Під комплексним квазіпотенціалом розуміємо шукану функцію комплексної змінної, дійсна частина якої є квазіпотенціалом, а уявна — відповідною функцією течії. Зважаючи на зручність здійснення квазіконформних відображень виду $G_\omega^{(p)} \rightarrow G_z$ [Бомба та ін., 2013], вирази (2) — (5) доцільно записати у змінних (φ, ψ) . У такому випадку, узагальнення умов Коші—Рімана набувають вигляду [Бомба та ін., 2013; Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020]

$$\sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi} = \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi}, \quad \sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi} = -\frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

Тут, очевидно, функції $x^{(p)} = x^{(p)}(\varphi, \psi)$, $y^{(p)} = y^{(p)}(\varphi, \psi)$ є комплексно спряженими ($z^{(p)} = x^{(p)} + i y^{(p)}$). Крайові умови (2) і (4) замінимо на

$$\begin{aligned} x(\varphi_*, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi))), \\ y(\varphi_*, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{AB}^{(p)}(\psi))), \quad \psi \in [0, Q^{(p)}], \\ x(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi))), \\ y(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_{CD}^{(p)}(\psi))), \quad \psi \in [0, Q^{(p)}], \\ x(\varphi, 0) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi))), \\ y(\varphi, 0) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{AD}^{(p)}(\varphi))), \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}], \\ x(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi))), \\ y(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\tau_{BC}^{(p)}(\varphi))), \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}], \end{aligned} \quad (8)$$

а (5) — на [Бомба та ін., 2013]

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\varphi_*, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau_*^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_*^{(p)}(\psi))), \\ y^{(p)}(\varphi_*, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau_*^{(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau_*^{(p)}(\psi))), \quad \psi \in [0, Q^{(p)}], \\ x^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi))), \\ y^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi))), \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi_N^{(p)}] \cup [\varphi_K^{(p)}, \varphi^{*(p)}], \\ x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_1(\tilde{x}(\tau^{*(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau^{*(p)}(\psi))), \\ y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= \tilde{g}_2(\tilde{x}(\tau^{*(p)}(\psi)), \tilde{y}(\tau^{*(p)}(\psi))), \quad \psi \in [0, Q^{(p)}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{g}_1\left(\tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi))\right), \\ y^{(p)}(\varphi, 0) &= \tilde{g}_2\left(\tilde{x}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), \tilde{y}(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi))\right), \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}], \end{aligned} \quad (9)$$

де $\tau = \tau_{AB}^{(p)}(\psi)$, $\tau = \tau_{CD}^{(p)}(\psi)$, $\tau = \tau_{AD}^{(p)}(\varphi)$, $\tau = \tau_{BC}^{(p)}(\varphi)$ — розрахункові залежності параметрів задання граничних вузлів від значень функцій потенціалу та течії на ділянках $A_p B_p$, $C_p D_p$, $A_p D_p$, $B_p C_p$ відповідно; $\tau = \tau_*^{(p)}(\psi)$, $\tau = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$, $\tau = \tau^{*(p)}(\psi)$, $\tau = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$ ($\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}$, $0 \leq \psi \leq Q^{(p)}$) — функції, побудовані шляхом інтерполювання апіорно відомих даних і є оберненими до $\psi = \psi_*^{(p)}(\tau, \dots)$, $\varphi = \bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$, $\psi = \psi^{*(p)}(\tau, \dots)$, $\varphi = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$; $\varphi_N^{(p)}$ та $\varphi_K^{(p)}$ — квазіпотенціали у точках N та K на p -й інжекції. Оскільки функції $x^{(p)} = x^{(p)}(\varphi, \psi)$ та $y^{(p)} = y^{(p)}(\varphi, \psi)$ є комплексно спряженими, то (7) можна замінити на узагальнення рівнянь Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (10)$$

для всіх внутрішніх точок області G_z [Бомба та ін., 2013; Bomba, Malash, 2019; Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020] та умовами ортогональності — для границі [Бомба та ін., 2013]:

$$\begin{aligned} x_\varphi'^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) x_\psi'^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) + y_\varphi'^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) y_\psi'^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) &= 0, \\ x_\varphi'^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) x_\psi'^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) + y_\varphi'^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) y_\psi'^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) &= 0, \quad \psi \in [0, Q^{(p)}], \\ x_\varphi'^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) x_\psi'^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) + y_\varphi'^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) y_\psi'^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) &= 0, \\ x_\varphi'^{(p)}(\varphi, 0) x_\psi'^{(p)}(\varphi, 0) + y_\varphi'^{(p)}(\varphi, 0) y_\psi'^{(p)}(\varphi, 0) &= 0, \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Традиційно реконструкцію КП здійснюють за умови мінімізації функціоналу виду [Holder, 2005; Bomba, Voichura, 2020; Bomba et al., 2020; Loke, 2021]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{p=1}^{\bar{p}} \left(\sum_{N_1 \in A_p B_p} (\psi_*^{(p)}(N_1) - \psi^{(p)}(N_1))^2 + \sum_{N_2 \in B_p N \cup K C_p} (\bar{\varphi}^{(p)}(N_2) - \varphi^{(p)}(N_2))^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{N_3 \in C_p D_p} (\psi^{*(p)}(N_3) - \psi^{(p)}(N_3))^2 + \sum_{N_4 \in A_p D_p} (\underline{\varphi}^{(p)}(N_4) - \varphi^{(p)}(N_4))^2 \right) + \Omega[\sigma] \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (12)$$

Тут

$$\psi^{(p)}(N_1) = \int_{A_p N_1} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial l} ds, \quad \varphi^{(p)}(N_2) = \varphi_*^{(p)} + \int_{B_p N_2} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial s} dl, \quad \psi^{(p)}(N_3) = \int_{D_p N_3} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial l} ds, \quad \varphi^{(p)}(N_4) = \varphi_*^{(p)} + \int_{A_p N_4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial s} dl;$$

∂l та ∂s — елементи довжин вздовж ліній течії та екіпотенціальних ліній відповідно; $\Omega[\sigma] = \Omega_1[\sigma] + \Omega_2[\sigma]$; $\Omega_1[\sigma] = \sum_{k=1}^s (\eta_k \alpha_k^2 + \eta_{s+k} \varepsilon_k^2)$ — стабілізуючий функціонал з параметрами регуляризації η_k ($k = 1, 2, s$) [Bomba, Voichura, 2020]; доданок $\Omega_2[\sigma]$ формується таким чином, щоб запобігати знаходженню мінімуму виразу (12) поза областю G_z .

Наближене розв'язання задачі електричної томографії. Різницеву задачу (6), (8) — (12) запишемо за умови її розбиття на підзадачі двох видів [Holder, 2005; Loke, 2021], розв'язання яких передбачає почергове ітераційне здійснення квазіконформних відображень (за допомогою виразів (6), (8), (10), (11)) [Бомба та ін., 2013; Bomba, Malash, 2019; Bomba, Voichura, 2020] рівномірних сіткових областей (див. рис. 1, в)

$$G_{\omega}^{\gamma(p)} = \left\{ \left(\varphi_i^{\gamma(p)}, \psi_j^{\gamma(p)} \right) : \varphi_i^{\gamma(p)} = \varphi_{*}^{\gamma(p)} + i\Delta\varphi^{\gamma(p)}, i=0, m^{(p)} + 1; \overline{\psi_j^{\gamma(p)}} = j\Delta\psi^{\gamma(p)}, j=0, n^{(p)} + 1; \right. \\ \left. \Delta\varphi^{\gamma(p)} = \frac{\varphi_{*}^{\gamma(p)} - \varphi_{*}^{\gamma(p)}}{m^{(p)} + 1}, \Delta\psi^{\gamma(p)} = \frac{Q^{(p)}}{n^{(p)} + 1}, \gamma^{\gamma(p)} = \frac{\Delta\varphi^{\gamma(p)}}{\Delta\psi^{\gamma(p)}} \right\}$$

на відповідні нерівномірні (див. рис. 1, б)

$$G_z^{\gamma(p)} = \left\{ \left(x_{i,j}^{\gamma(p)}, y_{i,j}^{\gamma(p)} \right) \in G_z \cup \partial G_z : A_p = \left(x_{0,0}^{\gamma(p)}, y_{0,0}^{\gamma(p)} \right), B_p = \left(x_{0,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)}, y_{0,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} \right), \right. \\ \left. C_p = \left(x_{m^{(p)}+1,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)}, y_{m^{(p)}+1,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} \right), D_p = \left(x_{m^{(p)}+1,0}^{\gamma(p)}, y_{m^{(p)}+1,0}^{\gamma(p)} \right), i=0, m^{(p)} + 1, j=0, n^{(p)} + 1 \right\}$$

та мінімізацію функціоналу (12) стосовно КП $\sigma_{i,j}^{\gamma(p)} = \sigma(x_{i,j}^{\gamma(p)}, y_{i,j}^{\gamma(p)})$ (6), де $\gamma^{\gamma(p)}$ — квазіконформні інваріанти [Бомба та ін., 2013]:

$$\gamma^{\gamma(p)} = \frac{(n^{(p)} + 1)^{-1} \sum_{i,j=0}^{m^{(p)}, n^{(p)}} 1}{(m^{(p)} + 1)} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}^{\gamma(p)} - x_{i,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i+1,j}^{\gamma(p)} - y_{i,j}^{\gamma(p)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i,j+1}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i,j+1}^{\gamma(p)})^2}}{\sigma_{i+0,5,j+0,5}^{\gamma(p)} \sqrt{(x_{i,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i,j}^{\gamma(p)})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i+1,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i+1,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i+1,j}^{\gamma(p)})^2}}, \quad (13)$$

$\sigma_{i+0,5,j+0,5}^{\gamma(p)} = 0,25 \left(\sigma_{i,j}^{\gamma(p)} + \sigma_{i+1,j}^{\gamma(p)} + \sigma_{i,j+1}^{\gamma(p)} + \sigma_{i+1,j+1}^{\gamma(p)} \right)$, $m^{(p)}$ та $n^{(p)}$ — кількості вузлів розбиття. Зокрема, наближене представлення узагальнень рівнянь Лапласа (10) сформуємо із застосування центральних різницьових схем першого та другого порядків [Самарский, 1983; Бомба та ін., 2013; Bomba et al., 2020]:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{i,j}^{\gamma(p)} &= \left(x_{i+1,j}^{\gamma(p)} + x_{i-1,j}^{\gamma(p)} + \gamma^{(p)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p)2} \left(x_{i,j-1}^{\gamma(p)} + x_{i,j+1}^{\gamma(p)} \right) + \right. \\ &+ \sigma_{i,j}^{\gamma(p)} \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial x} \left(x_{i,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i,j-1}^{\gamma(p)} \right) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial y} \left(y_{i,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i,j-1}^{\gamma(p)} \right) \right) \frac{(x_{i,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i,j-1}^{\gamma(p)}) \gamma^{(p)2}}{4} - \\ &- \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial x} \left(x_{i+1,j}^{\gamma(p)} - x_{i-1,j}^{\gamma(p)} \right) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial y} \left(y_{i+1,j}^{\gamma(p)} - y_{i-1,j}^{\gamma(p)} \right) \right) \frac{x_{i+1,j}^{\gamma(p)} - x_{i-1,j}^{\gamma(p)}}{4\sigma_{i,j}^{\gamma(p)}} \frac{1}{2(1 + \gamma^{(p)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p)2})}, \\ y_{i,j}^{\gamma(p)} &= \left(y_{i+1,j}^{\gamma(p)} + y_{i-1,j}^{\gamma(p)} + \gamma^{(p)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p)2} \left(y_{i,j-1}^{\gamma(p)} + y_{i,j+1}^{\gamma(p)} \right) + \right. \\ &+ \sigma_{i,j}^{\gamma(p)} \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial x} \left(x_{i,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i,j-1}^{\gamma(p)} \right) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial y} \left(y_{i,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i,j-1}^{\gamma(p)} \right) \right) \frac{(y_{i,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i,j-1}^{\gamma(p)}) \gamma^{(p)2}}{4} - \\ &- \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial x} \left(x_{i+1,j}^{\gamma(p)} - x_{i-1,j}^{\gamma(p)} \right) + \frac{\partial \sigma_{i,j}^{\gamma(p)}}{\partial y} \left(y_{i+1,j}^{\gamma(p)} - y_{i-1,j}^{\gamma(p)} \right) \right) \frac{y_{i+1,j}^{\gamma(p)} - y_{i-1,j}^{\gamma(p)}}{4\sigma_{i,j}^{\gamma(p)}} \frac{1}{2(1 + \gamma^{(p)2} \sigma_{i,j}^{\gamma(p)2})}. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Умови (8), що визначають область $G_z^{\gamma(p)}$, замінимо відповідними точково-різницьовими представленнями [Бомба та ін., 2013]:

$$x_{0,j}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_1 \left(\tilde{x} \left(\tau_{AB_j}^{\gamma(p)} \right), \tilde{y} \left(\tau_{AB_j}^{\gamma(p)} \right) \right), y_{0,j}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_2 \left(\tilde{x} \left(\tau_{AB_j}^{\gamma(p)} \right), \tilde{y} \left(\tau_{AB_j}^{\gamma(p)} \right) \right), x_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_1 \left(\tilde{x} \left(\tau_{CD_j}^{\gamma(p)} \right), \tilde{y} \left(\tau_{CD_j}^{\gamma(p)} \right) \right), \\ y_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_2 \left(\tilde{x} \left(\tau_{CD_j}^{\gamma(p)} \right), \tilde{y} \left(\tau_{CD_j}^{\gamma(p)} \right) \right), x_{i,0}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_1 \left(\tilde{x} \left(\tau_{AD_i}^{\gamma(p)} \right), \tilde{y} \left(\tau_{AD_i}^{\gamma(p)} \right) \right), y_{i,0}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_2 \left(\tilde{x} \left(\tau_{AD_i}^{\gamma(p)} \right), \tilde{y} \left(\tau_{AD_i}^{\gamma(p)} \right) \right),$$

$$x_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_1 \left(\tilde{x}(\tau_{BC_i}^{\gamma(p)}), \tilde{y}(\tau_{BC_i}^{\gamma(p)}) \right), y_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} = \tilde{g}_2 \left(\tilde{x}(\tau_{BC_i}^{\gamma(p)}), \tilde{y}(\tau_{BC_i}^{\gamma(p)}) \right), i = \overline{0, m^{(p)} + 1}, j = \overline{0, n^{(p)} + 1}, (15)$$

де

$$\tau_{AB_j}^{\gamma(p)} = \tau_{AB}^{\gamma(p)} \left(\Psi_j^{\gamma(p)} \right), \tau_{CD_j}^{\gamma(p)} = \tau_{CD}^{\gamma(p)} \left(\Psi_j^{\gamma(p)} \right), \tau_{AD_i}^{\gamma(p)} = \tau_{AD}^{\gamma(p)} \left(\Phi_i^{\gamma(p)} \right), \tau_{BC_i}^{\gamma(p)} = \tau_{BC}^{\gamma(p)} \left(\Phi_i^{\gamma(p)} \right).$$

Умови ортогональності (11) апроксимуємо такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями [Самарский, 1983; Бомба та ін., 2013]:

$$\begin{aligned} & \left(3x_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} + x_{i,n^{(p)}-1}^{\gamma(p)} - 4x_{i,n^{(p)}}^{\gamma(p)} \right) \left(x_{i+1,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} - x_{i-1,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} \right) + \\ & + \left(3y_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} + y_{i,n^{(p)}-1}^{\gamma(p)} - 4y_{i,n^{(p)}}^{\gamma(p)} \right) \left(y_{i+1,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} - y_{i-1,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} \right) = 0, \\ & \left(4x_{1,j}^{\gamma(p)} - 3x_{0,j}^{\gamma(p)} - x_{2,j}^{\gamma(p)} \right) \left(x_{0,j+1}^{\gamma(p)} - x_{0,j-1}^{\gamma(p)} \right) + \\ & + \left(4y_{1,j}^{\gamma(p)} - 3y_{0,j}^{\gamma(p)} - y_{2,j}^{\gamma(p)} \right) \left(y_{0,j+1}^{\gamma(p)} - y_{0,j-1}^{\gamma(p)} \right) = 0, \\ & \left(3x_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)} + x_{m^{(p)}-1,j}^{\gamma(p)} - 4x_{m^{(p)},j}^{\gamma(p)} \right) \left(x_{m^{(p)}+1,j+1}^{\gamma(p)} - x_{m^{(p)}+1,j-1}^{\gamma(p)} \right) + \\ & + \left(3y_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)} + y_{m^{(p)}-1,j}^{\gamma(p)} - 4y_{m^{(p)},j}^{\gamma(p)} \right) \left(y_{m^{(p)}+1,j+1}^{\gamma(p)} - y_{m^{(p)}+1,j-1}^{\gamma(p)} \right) = 0, \\ & \left(4x_{i,1}^{\gamma(p)} - 3x_{i,0}^{\gamma(p)} - x_{i,2}^{\gamma(p)} \right) \left(x_{i+1,0}^{\gamma(p)} - x_{i-1,0}^{\gamma(p)} \right) + \\ & + \left(4y_{i,1}^{\gamma(p)} - 3y_{i,0}^{\gamma(p)} - y_{i,2}^{\gamma(p)} \right) \left(y_{i+1,0}^{\gamma(p)} - y_{i-1,0}^{\gamma(p)} \right) = 0 \quad \left(i = \overline{1, m^{(p)}}, j = \overline{1, n^{(p)}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Наближене представлення функціоналу (12) запишемо із застосуванням, наприклад, формули лівих прямокутників для наближення відповідних інтегралів, але у вигляді, який дає змогу максимально уникати накопичення похибок, спричинених порушеннями умов квазіконформності (які мають місце, в першу чергу, в околах точок $A_{p'}$, $B_{p'}$, $C_{p'}$, $D_{p'}$) [Bomba, Voichura, 2020], а саме:

$$\begin{aligned} \Phi^{\gamma(l+1)} = & \sum_{\substack{p, \bar{i}=1 \\ \tau_{AD_{\bar{i}-1}^{\gamma(p)}} < \tau_{\bar{i}}^{\gamma(p)} \leq \tau_{AD_{\bar{i}}^{\gamma(p)}}}}^{\bar{p}, m^{(p)}+1} \left(\Phi_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - \underline{\Phi}_{\bar{i}}^{\gamma(p)} + \Delta \Phi^{\gamma(p)} \left(\sum_{\bar{i}_2=1}^{\bar{i}-1} \frac{\sigma_{\bar{i}_2-1,0}^{\gamma(l)}}{\sigma_{\bar{i}_2-1,0}^{\gamma(l+1)}} + \frac{\sigma_{\bar{i}-1,0}^{\gamma(l)}}{\sigma_{\bar{i}-1,0}^{\gamma(l+1)}} \sqrt{\frac{\left(x_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - x_{\bar{i}-1,0}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - y_{\bar{i}-1,0}^{\gamma(p,l)} \right)^2}{\left(x_{\bar{i},0}^{\gamma(p,l)} - x_{\bar{i}-1,0}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{\bar{i},0}^{\gamma(p,l)} - y_{\bar{i}-1,0}^{\gamma(p,l)} \right)^2}} \right) \right)^2 + \\ & + \sum_{\substack{p, \bar{i}=1 \\ \tau_{BC_{\bar{i}-1}^{\gamma(p)}} < \tau_{\bar{i}}^{\gamma(p)} \leq \tau_{BC_{\bar{i}}^{\gamma(p)}}}}^{\bar{p}, \bar{m}^{(p)}+1} \left(\overline{\Phi}_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - \Phi_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - \Delta \Phi^{\gamma(p)} \left(\sum_{\bar{i}_2=1}^{\bar{i}-1} \frac{\sigma_{\bar{i}_2-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(l)}}{\sigma_{\bar{i}_2-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(l+1)}} + \frac{\sigma_{\bar{i}-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(l)}}{\sigma_{\bar{i}-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(l+1)}} \sqrt{\frac{\left(\bar{x}_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - x_{\bar{i}-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(\bar{y}_{\bar{i}}^{\gamma(p)} - y_{\bar{i}-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(p,l)} \right)^2}{\left(x_{\bar{i}, n^{(p)}+1}^{\gamma(p,l)} - x_{\bar{i}-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{\bar{i}, n^{(p)}+1}^{\gamma(p,l)} - y_{\bar{i}-1, n^{(p)}+1}^{\gamma(p,l)} \right)^2}} \right) \right)^2 + \\ & + \sum_{\substack{p, j^*=1 \\ \tau_{CD_{j^*-1}^{\gamma(p)}} < \tau_{j^*}^{\gamma(p)} \leq \tau_{CD_{j^*}^{\gamma(p)}}}}^{\bar{p}, n^{\gamma(p)}+1} \left(\Psi_{j^*}^{*\gamma(p)} - \Delta \Psi^{\gamma(p,l)} \left(\sum_{j_2=1}^{j^*-1} \frac{\sigma_{m^{(p)}+1, j_2-1}^{\gamma(l+1)}}{\sigma_{m^{(p)}+1, j_2-1}^{\gamma(l)}} + \frac{\sigma_{m^{(p)}+1, j^*-1}^{\gamma(l+1)}}{\sigma_{m^{(p)}+1, j^*-1}^{\gamma(l)}} \sqrt{\frac{\left(x_{j^*}^{*\gamma(p)} - x_{m^{(p)}+1, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{j^*}^{*\gamma(p)} - y_{m^{(p)}+1, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2}{\left(x_{m^{(p)}+1, j^*}^{\gamma(p,l)} - x_{m^{(p)}+1, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{m^{(p)}+1, j^*}^{\gamma(p,l)} - y_{m^{(p)}+1, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2}} \right) \right)^2 + \\ & + \sum_{\substack{p, j^*=1 \\ \tau_{AB_{j^*-1}^{\gamma(p)}} < \tau_{j^*}^{\gamma(p)} \leq \tau_{AB_{j^*}^{\gamma(p)}}}}^{\bar{p}, n^{\gamma(p)}+1} \left(-\Psi_{j^*}^{*\gamma(p)} + \Delta \Psi^{\gamma(p,l)} \left(\sum_{j_2=1}^{j^*-1} \frac{\sigma_{0, j_2-1}^{\gamma(l+1)}}{\sigma_{0, j_2-1}^{\gamma(l)}} + \frac{\sigma_{0, j^*-1}^{\gamma(l+1)}}{\sigma_{0, j^*-1}^{\gamma(l)}} \sqrt{\frac{\left(x_{j^*}^{\gamma(p)} - x_{0, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{j^*}^{\gamma(p)} - y_{0, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2}{\left(x_{0, j^*}^{\gamma(p,l)} - x_{0, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2 + \left(y_{0, j^*}^{\gamma(p,l)} - y_{0, j^*-1}^{\gamma(p,l)} \right)^2}} \right) \right)^2 + \Omega[\sigma] \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут замість інтерпольованих функцій (9) використовуватимемо відповідні апріорно ві-

домі дискретні заміри; $l=0,1,\dots$ — номери наближень шуканих величин. Мінімізацію функціоналу (17) доцільно здійснювати одним із методів глобальної оптимізації, наприклад, як у праці [Romashchenko et al., 2021].

Числові результати. Реконструкції зображень здійснювались за алгоритмом [Вомба, Воїчуря, 2020] при відомій структурі КП (6), $m^{(p)}=200$, $\varphi_*^{(p)} = -1$ В, $\varphi^{*(p)} = 1$ В, параметрах задання точок «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній (згідно з модифікацією полярної схеми фіксації ділянок прикладання квазіпотенціалів [Hua et al., 1987]):

$$\begin{array}{cccc} \tau_A^{(1)}=86,078381, & \tau_B^{(1)}=86,078341, & \tau_C^{(1)}=245,234681, & \tau_D^{(1)}=245,234641, \\ \tau_A^{(2)}=68,170121, & \tau_B^{(2)}=68,170081, & \tau_C^{(2)}=196,211301, & \tau_D^{(2)}=196,211261, \\ \tau_A^{(3)}=26,218161, & \tau_B^{(3)}=26,218121, & \tau_C^{(3)}=171,963141, & \tau_D^{(3)}=171,963101, \\ \tau_A^{(4)}=-34,548839, & \tau_B^{(4)}=-34,548879, & \tau_C^{(4)}=156,052181, & \tau_D^{(4)}=156,052141, \\ \tau_A^{(5)}=-86,175699, & \tau_B^{(5)}=-86,175739, & \tau_C^{(5)}=144,016561, & \tau_D^{(5)}=144,016521, \\ \tau_A^{(6)}=-113,520019, & \tau_B^{(6)}=-113,520059, & \tau_C^{(6)}=134,010161, & \tau_D^{(6)}=134,010121, \\ \tau_A^{(7)}=-136,016179, & \tau_B^{(7)}=-136,016219, & \tau_C^{(7)}=125,050321, & \tau_D^{(7)}=125,050281, \\ \tau_A^{(8)}=-159,275059, & \tau_B^{(8)}=-159,275099, & \tau_C^{(8)}=116,477601, & \tau_D^{(8)}=116,477561, \\ \tau_A^{(9)}=-189,053679, & \tau_B^{(9)}=-189,053719, & \tau_C^{(9)}=107,707021, & \tau_D^{(9)}=107,706981, \\ \tau_A^{(10)}=-242,315219, & \tau_B^{(10)}=-242,315259, & \tau_C^{(10)}=98,010961, & \tau_D^{(10)}=98,010921 \end{array}$$

$$(p = \overline{1, \tilde{p}}), \tilde{p}=10 \quad \tilde{x}(\tau)=9 \cdot 10^{-5} \tau^3 - 0,3\tau, \quad \tilde{y}(\tau) = -6 \cdot 10^{-4} \tau^2 + 0,6\tau - 150,$$

$\Omega_2[\sigma] = 100 \left(\arctg \left(1000 \left(\frac{5}{9} (30 - \sqrt{-6y})^3 - 5\sqrt{-6y} + 150 - x \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right)$, $\kappa=70$ м, при початкових наближеннях $\chi^{(0)}=1$ См/м, $\alpha_k^{(0)} = 0$ См, $\varepsilon_k^{(0)} = 1$ м, $\tilde{x}_k^{(0)} = 0$ м, $\tilde{y}_k^{(0)} = 0$ м, накладених обмеженнях $0,5 \leq \chi \leq 2$, $-2 \leq \alpha_k \leq 2$, $10^{-5} \leq \varepsilon_k \leq 10^5$, $-450 \leq \tilde{x}_k \leq 600$, $-500 \leq \tilde{y}_k \leq -60$ ($k = 1, \dots, s$), $\tau_K = -177,49241$, $\tau_N = 194,10899$ та крайових умовах (15). Останні формуються шляхом інтерполяції (наприклад, за допомогою монотонних кубічних сплайнів [ALGLIB ..., 2021]) замірів $\overline{\Phi_{\tilde{r}}^{(p)}}$, $\underline{\Phi_{\tilde{l}}^{(p)}}$, $\Psi_{*j_*}^{(p)}$, $\Psi_{j_*}^{*(p)}$ у точках $(\underline{x}_{\tilde{l}}^{(p)}, \underline{y}_{\tilde{l}}^{(p)})$, $(\overline{x}_{\tilde{r}}^{(p)}, \overline{y}_{\tilde{r}}^{(p)})$, $(x_{*j_*}^{(p)}, y_{*j_*}^{(p)})$, $(x_{j_*}^{*(p)}, y_{j_*}^{*(p)})$ ($p = \overline{1, \tilde{p}}$).

Процес отримання таких даних ми реалізували за допомогою спеціально розробленої програми генерації дискретних замірів на границі області (імітації фізичного експерименту). Здійснювалось це при таких параметрах КП:

$$s=1, \chi=1,3 \text{ См/м}, \alpha_1=1 \text{ См}, \varepsilon_1=240 \text{ м}, \\ \tilde{x}_1=75 \text{ м}, \tilde{y}_1=-155 \text{ м} \text{ згідно з рис. 2, а}$$

та при

$$s=3, \chi=1 \text{ См/м}, \alpha_1=-0,8 \text{ См}, \varepsilon_1=60 \text{ м}, \\ \tilde{x}_1=-50 \text{ м}, \tilde{y}_1=-300 \text{ м}, \\ \alpha_2=1 \text{ См}, \varepsilon_2=120 \text{ м}, \tilde{x}_2=60 \text{ м}, \tilde{y}_2=-160 \text{ м}, \\ \alpha_3=0,7 \text{ См}, \varepsilon_3=300 \text{ м}, \tilde{x}_3=120 \text{ м}, \tilde{y}_3=-280 \text{ м} \text{ згідно рис. 3, а.}$$

У результаті застосування алгоритму [Вомба, Воїчуря, 2020] отримано, відповідно, такі значення параметрів КП:

$$\chi^{\ddot{}}=1,34741 \text{ См/м}, \alpha_1^{\ddot{}}=1,196538 \text{ См}, \varepsilon_1^{\ddot{}}=186,884369 \text{ м}, \\ \tilde{x}_1^{\ddot{}}=56,493058 \text{ м}, \tilde{y}_1^{\ddot{}}=-147,022277 \text{ м} \text{ згідно з рис. 2, б}$$

та

$$\chi^{\ddot{}}=1,007187 \text{ См/м}, \alpha_1^{\ddot{}}=-0,435424 \text{ См}, \varepsilon_1^{\ddot{}}=127,473878 \text{ м}, \tilde{x}_1^{\ddot{}}=-67,472045 \text{ м}, \\ \tilde{y}_1^{\ddot{}}=-242,960852 \text{ м}, \alpha_2^{\ddot{}}=1,078452 \text{ См}, \varepsilon_2^{\ddot{}}=71,708403 \text{ м}, \tilde{x}_2^{\ddot{}}=27,836468 \text{ м}, \tilde{y}_2^{\ddot{}}=-132,713034 \text{ м}, \\ \alpha_3^{\ddot{}}=1,363693 \text{ См}, \varepsilon_3^{\ddot{}}=225,588408 \text{ м}, \tilde{x}_3^{\ddot{}}=21,000899 \text{ м}, \tilde{y}_3^{\ddot{}}=-236,965449 \text{ м} \text{ згідно рис. 3, б.}$$

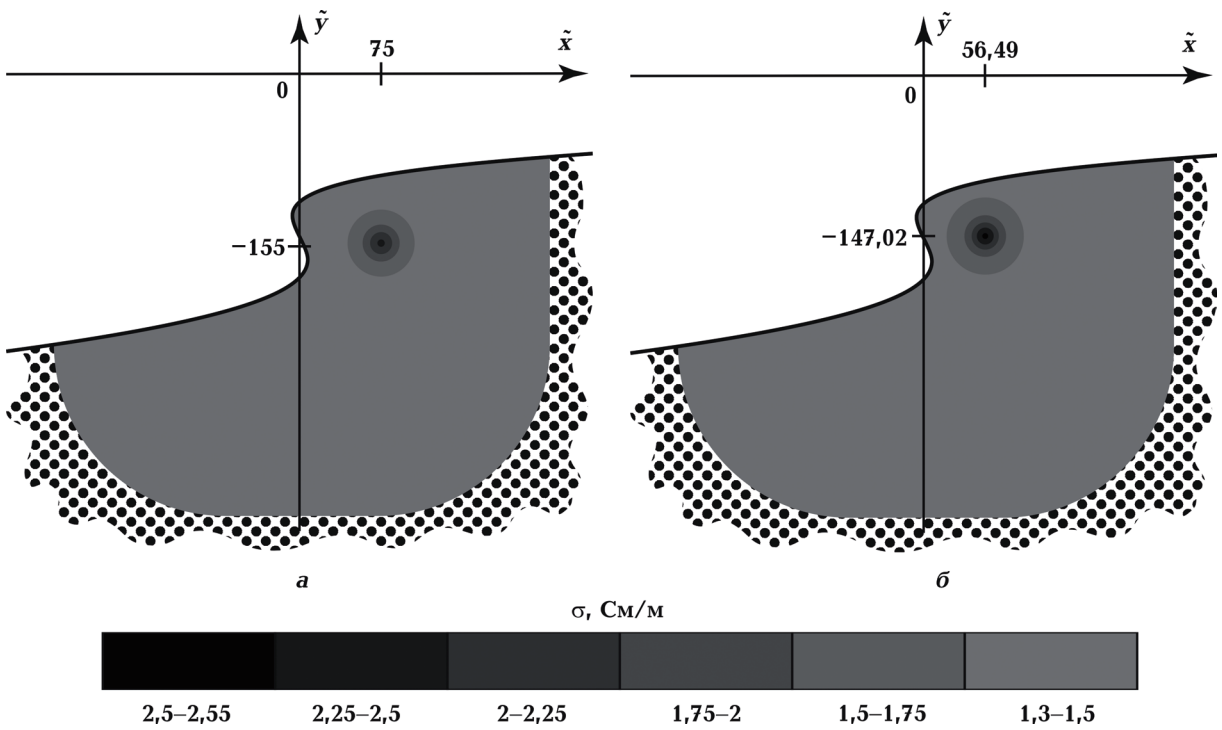


Рис. 2. Еталонне (а) та відповідне розрахункове (б) зображення при $s=1$.

Fig. 2. Reference (a) and corresponding calculated (b) images for $s=1$.

Бачимо, що отримані розв'язки «у розумних межах» відповідають еталонним. Відповідні нев'язки між апріорно відомими та розрахунковими параметрами КП такі:

$$\begin{aligned} |\chi - \check{\chi}| &= 0,04741 \text{ CM/M}, & |\alpha_1 - \check{\alpha}_1| &= 0,196538 \text{ CM}, & |\varepsilon_1 - \check{\varepsilon}_1| &= 53,115631 \text{ M}, \\ |\check{x}_1 - \check{\check{x}}_1| &= 18,506942 \text{ M}, & |\check{y}_1 - \check{\check{y}}_1| &= 7,977723 \text{ M} \quad (s=1) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} |\chi - \check{\chi}| &= 0,007187 \text{ CM/M}, & |\alpha_1 - \check{\alpha}_1| &= 0,364576 \text{ CM}, & |\varepsilon_1 - \check{\varepsilon}_1| &= 67,473878 \text{ M}, & |\check{x}_1 - \check{\check{x}}_1| &= 17,472045 \text{ M}, \\ |\check{y}_1 - \check{\check{y}}_1| &= 57,039148 \text{ M}, & |\alpha_2 - \check{\alpha}_2| &= 0,078452 \text{ CM}, & |\varepsilon_2 - \check{\varepsilon}_2| &= 48,291597 \text{ M}, & |\check{x}_2 - \check{\check{x}}_2| &= 32,163532 \text{ M}, \\ |\check{y}_2 - \check{\check{y}}_2| &= 27,286966 \text{ M}, & |\alpha_3 - \check{\alpha}_3| &= 0,663693 \text{ CM}, & |\varepsilon_3 - \check{\varepsilon}_3| &= 74,411592 \text{ M}, & |\check{x}_3 - \check{\check{x}}_3| &= 98,999101 \text{ M}, \\ & & & & & & |\check{y}_3 - \check{\check{y}}_3| &= 43,034551 \text{ M} \quad (s=3). \end{aligned}$$

Як видно, параметр χ , який відповідає за значення КП на «левої долі» середовища (області), знайдено із невеликою нев'язкою, тоді як координати ідентифікованих сплесків відносно апріорно відомих змістились в напрямку поверхні ґрунтового масиву. Це пояснюється конструкцією функціоналу (12), яка сприяє знаходженню такого КП, при якому крайові умови (9) на «доступних» (у нашому випадку, неглибинних) ділянках виконуються з мінімальною нев'язкою.

Додаткові неточності у розв'язках виникають через великі значення нев'язок квазіконформності [Бомба та ін., 2013]. Найбільші їх значення є навколо точок «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній і у так званій «застійній зоні» (яку на більшості інжекцій переважно «оминають» заряди). «Позбутися» цих нев'язок в останній можливо, наприклад, здійснюючи додаткове проміжне конформне відображення на круг, тоді як навколо точок «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній можна реалізувати процедуру «фіктивної ортогоналізації». Нев'язки квазіконформності та відсутність даних щодо крайових умов (9) на глибинних ділянках є суттєвими факторами, які негативно вплинули на розв'язки.

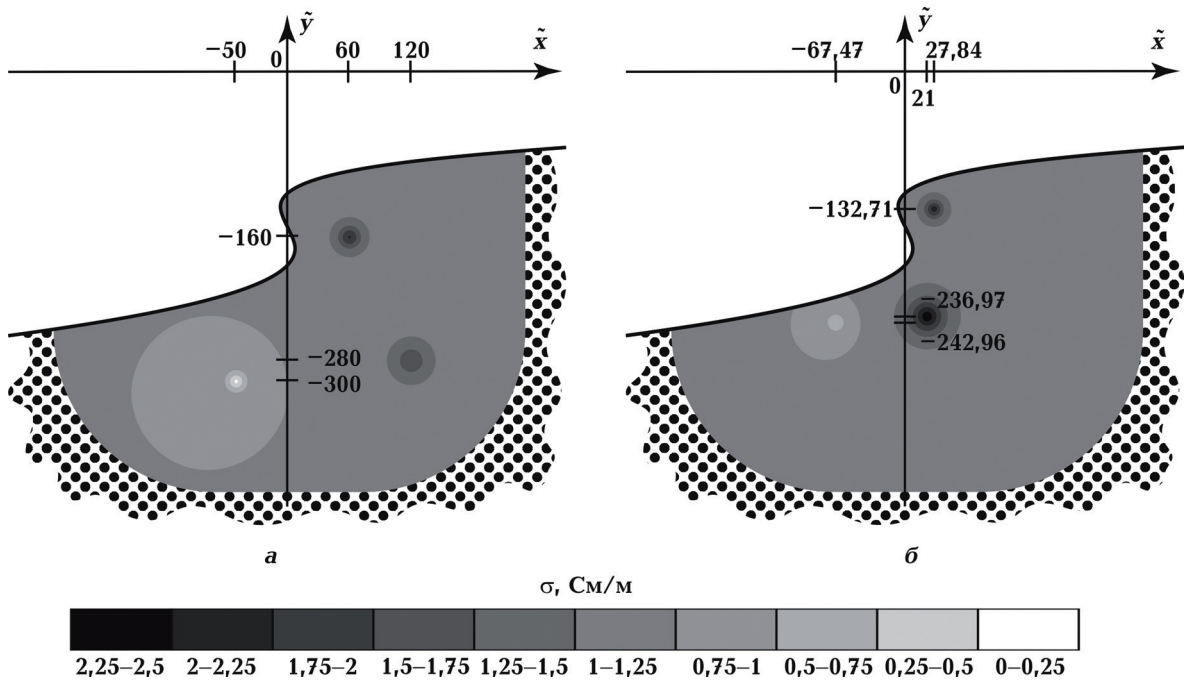


Рис. 3. Еталонне (а) та відповідне розрахункове (б) зображення при $s=3$.
 Fig. 3. Reference (a) and corresponding calculated (b) images for $s=3$.

Зазначимо, що запропонований підхід забезпечує можливість отримувати розв'язки такого роду задач для досить «незручних» для досліджень границь областей, як на рис. 2 та 3.

Висновки. Розроблено підхід до ідентифікації параметрів структури приповерхневих шарів масштабних за розміром ґрунтових криволінійних масивів, який, в порівнянні з існуючими методами, має низку переваг при врахуванні геометрії досліджуваного середовища. Реалізовано це, зокрема, за умов апріорно відомих функцій, що задають граничні лінії течії та екіпотенціальні лінії і синтезу алгоритмів реконструкції зображення у ґрунтовому масиві [Vomba et al., 2020] та в замкнутій криволінійній області [Vomba, Voichuga, 2020]. Особливістю відповідного підходу є постановка математичної задачі у порівняно простій за конструкцією області, утвореній шляхом конформного відображення частини півплощини на криволінійну фігуру деякою дробово-раціональною функцією. Такий підхід, на відміну від «традиційних», забезпечує можливість значного «зменшення некоректності» (яка зумовлена недостатністю інформації про глибинні ділянки ґрунту) в постановці відповідної задачі та передбачає більш ефективне врахування наявного розподілу густини струму на ділянках контакту електродів з досліджуваним середовищем. Окрім цього, враховуючи особливості числового методу квазіконформних відображень щодо автоматичної побудови електростатичної сітки і обчислення сумарного струму, який проходить через довільний поперечний переріз за одиницю часу, забезпечується достатня відкритість (для різних доповнень, узагальнень тощо) та гнучкість (для математичних маніпуляцій) розробленого алгоритму.

Розв'язок відповідної задачі, згідно з ідеєю числового методу комплексного аналізу, будується за умови почергового ітераційного здійснення квазіконформних відображень канонічних областей комплексного квазіпотенціалу на криволінійну фігуру та уточнення коефіцієнта провідності. Останнє в процесі ітерацій здійснюється за умови мінімізації функціоналу нев'язки між дискретно заданими (відомими) значеннями функцій потенціалу та течії на поверхні ґрунтового масиву і відповідними розрахун-

ковими із застосуванням ідей регуляризації. Зауважимо, що тут не використовується інформація (через високу складність її отримання) про розподіл напруги та сили струму на глибинних ділянках. Це зумовлює застосування розробленого алгоритму лише для реконструкції зображення приповерхневих шарів ґрунту.

Числові експерименти проводились на прикладі задання структури коефіцієнта провідності у вигляді функції локальних сплесків однорідностей. Отримані розв'язки «в розумних межах» відповідають апріорно відомим (еталонним). Зокрема, розподіл значень коефіцієнта провідності на «левої долі» ідентифіковано із невеликою нев'язкою, тоді як координати шуканих сплесків, у порівнянні з апріорно відомими, змістились у напрямку поверхні (горизонту) ґрунтового масиву. Це пояснюється наявними досить великими значеннями нев'язок квазіконформності у так званих «застійних зонах» і в околах «стику» граничних ліній течії та екіпотенціальних ліній.

У перспективі: перенесення алгоритму на випадки дослідження структури біоплатофільтрів [Ulyanchuk-Martyniuk et al., 2020] з метою подальшого прогнозування їх функціонування; введення процедури «фіктивної ортогоналізації» в околах «стику» граничних ліній течії та екіпотенціальних ліній; розвинення алгоритму на випадки додаткового проміжного конформного відображення на круг. Окрім того, планується врахування багатозв'язності області та анізотропії [Бомба та ін., 2013; Bomba, Malash, 2019], розпаралелення обчислень [Vlasyuk et al., 2020] тощо.

Список літератури

- Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярошак С.В. Методи комплексного аналізу. Рівне: Видання Нац. ун-ту водного господарства та природокористування, 2013. 430 с.
- Бондарь К.М., Хоменко Р.В., Чернов А.П., Кукса Н.В. Результаты георадарного обследования Ильинской церкви — усыпальницы Богдана Хмельницкого в Субботове. *Геофиз. журн.* 2020. Т. 42. № 3. С. 175—194. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v42i3.2020.204709>.
- Модин И.Н. Геофизические изыскания под наклонно-направленное бурение для прокладки трубопроводов под дорогами. *Инженерные изыскания.* 2015. № 5-6. С. 32—36.
- Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1983. 616 с.
- Aizebeokhai, A.P. (2010). 2D and 3D geoelectrical resistivity imaging: Theory and field design. *Scientific Research and Essays*, 5(23), 3592—3605. <https://doi.org/10.5897/SRE.9000003>.
- ALGLIB-C++/C# numerical analysis library. September 10, 2021. Retrieved from <https://www.alglib.net/docs.php>.
- Bomba, A., & Boichura, M. (2020). Identification of burst parameters using numerical quasiconformal mapping methods. *International Journal of Applied Mathematics*, 33(5), 903—917. <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v33i5.11>.
- Bomba, A., Boichura, M., & Sydorhuk, B. (2020). Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(4), 45—54. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.215045>.
- Bomba, A., & Malash, K. (2019). Modeling the formation of craters caused by the two charges explosion using quasiconformal mappings numerical methods. *2019 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Czech Republic* (pp. 113—116). <https://doi.org/10.1109/ACITT.2019.8780021>.
- Bomba, A. Ya., Moroz, I.P., & Boichura, M.V. (2021). The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated p-i-n-structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 1(1), 14—28. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-1-2>.

- Holder, D. (2005). *Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications*. Bristol: Institute of Physics, 456 p.
- Hua, P., Webster, J.G., & Tompkins, W.J. (1987). Effect of the measurement method on noise handling and image quality of EIT imaging. *Proceedings of the Ninth Annual Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, USA, 2* (pp. 1429—1430).
- Loke, M.H. (2021). *Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys*. September 10, 2021. Retrieved from <https://www.geotomosoft.com/coursenotes.zip>.
- Rasul, H., Zou, L., & Olofsson, B. (2018). Monitoring of moisture and salinity content in an operational road structure by electrical resistivity tomography. *Near Surface Geophysics, 16*, 423—444. <https://doi.org/10.1002/nsg.12002>.
- Romashchenko, M.I., Bohaienko, V.O., Matiash, T.V., Kovalchuk, V.P., & Krucheniuk, A.V. (2021). Numerical simulation of irrigation scheduling using fractional Richards equation. *Irrigation Science, 39*(3), 385—396. <https://doi.org/10.1007/s00271-021-00725-3>.
- Ulyanchuk-Martyniuk, O., Michuta, O., & Ivanchuk, N. (2020). Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4*(10), 18—26. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210044>.
- Vlasyuk, A., Zhukovsky, V., Zhukovska, N., & Shatnyi, S. (2020). Parallel computing optimization of two-dimensional mathematical modeling of contaminant migration in catalytic porous media. *2020 10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Germany* (pp. 23—28). <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208878>.

Identification of parameters of structure of soil curvilinear massifs by numerical methods of complex analysis

A.Ya. Bomba, M.V. Boichura, O.R. Michuta, 2022

National University of Water Management and Environmental Sciences, Rivne, Ukraine

The works by specialists in electrical tomography usually model soil masses as a two-dimensional single-connected domain, the boundary of which consists of a horizon line and some «deep» line with a constant potential value on it. At the same time, the latter is set very approximately because of the «absence» of charges in remote (deep) areas. To avoid such simplification, the author proposes to solve the corresponding model problem in a relatively simple domain through its subsequent conformal mapping onto studied physical environment with a complex structure. The latter is carried out using some fractional-rational function. Whereas to simulate the movement of charges, numerical complex analysis methods are generally used. In this case, common simplification regarding the «point-like» nature of the applied quasipotential sections is rejected, and the distribution of current density on the last is taken into account. The studied medium, for example, is assumed to be given in the form of a function of local bursts of homogeneities.

Image reconstruction is conducted during alternate iterative solving of problems on the construction of a range of fields of current densities and refinement of parameters of conductivity coefficient. The latter is implemented out under the minimization of the functional of residuals between discrete (known) measurements of potential and stream functions on the surface of the soil mass and the corresponding calculated ones, using the ideas of regularization. Non-use of information (due to the high complexity of obtaining it) about the distribution of voltage and current in deep areas generates a certain mathematical uncertainty. However, its influence on the results of image reconstruction in the near-surface areas is insignificant.

Numerical experiments were performed and analyzed. For the given examples, the conductivity

coefficient on the «lion's share» of the medium was found with a small residual. Whereas the coordinates of the identified bursts, in comparison with a priori known ones, shifted towards the surface of soil mass. This is explained both by the peculiarities of the construction of the subproblem of identification of the conductivity coefficient in the absence of boundary conditions at deep sections and the existing significant quasiconformity residuals. In the future, these shortcomings can be «eliminated» by implementing an additional intermediate conformal mapping onto a circle and applying «fictitious orthogonalization» in the vicinity of the «junction» points of boundary streamlines and equipotential lines.

Key words: electrical tomography, quasiconformal mappings, identification, inverse problems, numerical methods.

References

- Bomba, A.Ya., Kashtan, S.S., Pryhornytskyi, D.O., & Yaroshchak, S.V. (2013). *Complex Analysis Methods*. Rivne: National University of Water and Environmental Engineering, 430 p. (in Ukrainian).
- Bondar, K.M., Khomenko, R.V., Chernov, A.P., & Kuksa, N.V. (2020). Results of the ground penetrating radar survey in the church of St. Elias — Bohdan Khmelnytsky burial vault in Subotiv. *Gieafizichieskii Zhurnal*, 42(3), 175—194. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v42i3.2020.204709> (in Russian).
- Modin, I.N. (2015). Geophysical surveys for inclined-directional drilling for laying pipelines under roads. *Inzhenierye Izyskaniia*, 5-6, 32—36. http://www.geomark.ru/journals_list/zhurnal-inzhenernye-izyskaniya-5-62015/?attach=2263 (in Russian).
- Samarskii, A.A. (1983). *The Theory of Difference Schemes*. Moscow: Nauka, 616 p. (in Russian).
- Aizebeokhai, A.P. (2010). 2D and 3D geoelectrical resistivity imaging: Theory and field design. *Scientific Research and Essays*, 5(23), 3592—3605. <https://doi.org/10.5897/SRE.9000003>.
- ALGLIB-C++/C# numerical analysis library. September 10, 2021. Retrieved from <https://www.alglib.net/docs.php>.
- Bomba, A., & Boichura, M. (2020). Identification of burst parameters using numerical quasiconformal mapping methods. *International Journal of Applied Mathematics*, 33(5), 903—917. <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v33i5.11>.
- Bomba, A., Boichura, M., & Sydoruk, B. (2020). Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(4), 45—54. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.215045>.
- Bomba, A., & Malash, K. (2019). Modeling the formation of craters caused by the two charges explosion using quasiconformal mappings numerical methods. *2019 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Czech Republic* (pp. 113—116). <https://doi.org/10.1109/ACITT.2019.8780021>.
- Bomba, A.Ya., Moroz, I.P., & Boichura, M.V. (2021). The optimization of the shape and size of the injection contacts of the integrated p-i-n-structures on the base of using the conformal mapping method. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 1(1), 14—28. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-1-2>.
- Holder, D. (2005). *Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications*. Bristol: Institute of Physics, 456 p.
- Hua, P., Webster, J.G., & Tompkins, W.J. (1987). Effect of the measurement method on noise handling and image quality of EIT imaging. *Proceedings of the Ninth Annual Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, USA*, 2 (pp. 1429—1430).
- Loke, M.H. (2021). *Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys*. September 10, 2021. Retrieved from <https://www.geotomosoft.com/coursenotes.zip>.

- Rasul, H., Zou, L., & Olofsson, B. (2018). Monitoring of moisture and salinity content in an operational road structure by electrical resistivity tomography. *Near Surface Geophysics*, 16, 423—444. <https://doi.org/10.1002/nsg.12002>.
- Romashchenko, M.I., Bohaienko, V.O., Matiash, T.V., Kovalchuk, V.P., & Krucheniuk, A.V. (2021). Numerical simulation of irrigation scheduling using fractional Richards equation. *Irrigation Science*, 39(3), 385—396. <https://doi.org/10.1007/s00271-021-00725-3>.
- Ulyanchuk-Martyniuk, O., Michuta, O., & Ivanchuk, N. (2020). Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(10), 18—26. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210044>.
- Vlasyuk, A., Zhukovsky, V., Zhukovska, N., & Shatnyi, S. (2020). Parallel computing optimization of two-dimensional mathematical modeling of contaminant migration in catalytic porous media. *2020 10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT), Germany* (pp. 23—28). <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208878>.