

Розташування сингулярних точок в орторомбічних середовищах

Ю.В. Роганов¹, А. Стовас², В.Ю. Роганов³, 2022

¹Tesseral Technologies Inc., Київ, Україна

²Норвезький університет природничих та технічних наук, Тронхейм, Норвегія

³Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

Надійшла 2 лютого 2022 р.

Вивчено залежність розташування сингулярних точок орторомбічних (ОРТ) середовищ від коефіцієнтів пружності c_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$, та фазової швидкості v_f у сингулярних точках за припущення, що c_{11}, c_{22}, c_{33} більше c_{44}, c_{55}, c_{66} і $c_{55} < c_{44} < c_{66}$. У цьому випадку сингулярні точки виникають лише при перетині поверхонь повільності $S1$ - і $S2$ -хвиль. Для спрощення подання результатів значення c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$, фіксуються, а c_{ij} , $i < j$, змінюються у межах, у яких матриця пружності залишається позитивно визначеною. Отримано співвідношення між параметрами $d_{12} = c_{12} + c_{66}$, $d_{13} = c_{13} + c_{55}$, $d_{23} = c_{23} + c_{44}$, за яких у площинах симетрії ОРТ середовища існують 0, 1 або 2 сингулярні точки. Описано типи цих сингулярних точок та їх розташування на одиничному колі. Показано, що вибором параметрів d_{12} , d_{23} будь-яку сингулярну точку в площині симетрії 13 можна поєднати з граничним положенням сингулярної точки, що знаходиться поза площинами симетрії, або включити цю точку в сингулярну криву виродженого ОРТ середовища. Виведено вирази для півосей еліпса кінчної рефракції, який є зображенням у груповій області сингулярної точки з площини симетрії 13. Знайдено умови, за яких еліпс кінчної рефракції вироджується у відрізок або точку. Показано, що існує не більше одного ОРТ середовища з фіксованою фазовою швидкістю v_f $S1$ - і $S2$ -хвиль у заданому сингулярному напрямку \mathbf{n} . Розглянуто всі ОРТ середовища з різними сингулярними напрямками \mathbf{n} та фіксованою фазовою швидкістю $S1$ -, $S2$ -хвиль в точці \mathbf{n} . Розраховано індекс Пуанкаре у сингулярній точці \mathbf{n} і поставлено його у відповідність до проекції \mathbf{n} на площину симетрії 12. На площині симетрії 12 отримано дві області з індексами Пуанкаре $1/2$ та $-1/2$, які розділяє проекція сингулярної кривої у вигляді еліпса або гіперболи виродженого ОРТ середовища. Знайдено формули, що виражають параметри d_{12} , d_{13} , d_{23} виродженого ОРТ середовища через значення c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$, та швидкість v_f $S1$ -, $S2$ -хвиль на сингулярній кривій. Сингулярна крива виродженого ОРТ середовища представлена як перетин одиничної сфери з еліптичним конусом. Доведено, що вироджене ОРТ середовище при $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$ або $c_{11} = c_{33}$, $c_{44} = c_{66}$ є трансверсально-ізотропним середовищем з вертикальною або горизонтальною віссю симетрії відповідно. Результати продемонстровано на кількох прикладах.

Ключові слова: сингулярна точка, фазова швидкість, вектор поляризації, матриця Крістофеля, орторомбічне середовище.

Вступ. Використання квазіпоперечних хвиль дає додаткову інформацію про пружні параметри середовища. Однак хвильові поля цього типу бувають досить складними і містять каустики, зумовлені увігнутістю поверхонь повільності $S1$ - і $S2$ -хвиль. Також можуть бути напрямки, вздовж яких поверхні повільності $S1$ - і $S2$ -хвиль збігаються. Такі напрямки називають акустичними осями, сингулярними напрямками або сингулярними точками. В околі сингулярних точок вектори поляризації швидко змінюють напрямки [Alshits, Shuvalov, 1984; Shuvalov, 1998], а на хвильовому фронті виникають каустики, кінчна рефракція та інші артефакти [Alshits, Lothe, 1979]. За наявності син-

гулярних точок виникають проблеми з моделюванням хвильових полів та інверсією сейсмічних даних [Crampin, 1991]. У зв'язку з цим багато праць присвячено розробці методів визначення сингулярних точок [Khatkevich, 1962; Alshits, Lothe, 1979; Holm, 1992; Darinskii, 1994; Schoenberg, Helbig, 1997; Boulanger, Hayes, 1998; Norris, 2004; Vavryčuk, 2005; Роганов и др., 2019]. У працях [Alshits et al., 1985; Shuvalov, Every, 1997] показано, що існують три типи сингулярних точок: конічні, клиноподібні та дотичні. Для різних типів сингулярних точок автори вивели апроксимації поверхонь повільності в околі цих точок і вивчили будову векторних полів поляризації $S1$ - і $S2$ -хвиль. У статтях [Musgrave, 1981; 1985] виконано детальну класифікацію орторомбічних (ОРТ) середовищ за наявністю та розташуванням сингулярних точок, яка містить понад 100 категорій.

Як продовження цих досліджень розглядається залежність розташування сингулярних точок ОРТ середовищ від зведених коефіцієнтів пружності c_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$, і фазової швидкості $S1$ - і $S2$ -хвиль v_f у сингулярних точках. При цьому передбачається, що значення c_{11}, c_{22}, c_{33} більше значень c_{44}, c_{55}, c_{66} . У такому разі сингулярні точки виникають лише внаслідок перетину поверхонь повільності $S1$ - і $S2$ -хвиль. Для спрощення результатів шість діагональних елементів матриці пружності c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$ фіксуються, а три недіагональні елементи c_{ij} , $i < j$, змінюються в межах, за яких матриця пружності залишається позитивно визначеною. У статті наведено лише випадок, коли $c_{55} < c_{44} < c_{66}$. Інші випадки отримано відповідною перестановкою індексів матриці пружності.

У площинах симетрії визначено значення параметрів $d_{12} = c_{12} + c_{66}$, $d_{13} = c_{13} + c_{55}$, $d_{23} = c_{23} + c_{44}$, за яких існують 0, 1 або 2 сингулярні точки. Описано типи цих сингулярних точок та їх розташування на одиничному колі. Показано, що вибором параметрів d_{12}, d_{23} кожну сингулярну точку в площині симетрії 13 можна поєднати з граничним положенням сингулярної точки, що знаходиться поза площинами симетрії, або включити цю точку в сингулярну криву виродженого ОРТ середовища.

Виведено вирази для півосей еліпса конічної рефракції, який є відображенням в груповій області сингулярної точки з площини 13. Знайдено умови, за яких еліпс конічної рефракції вироджується у відрізок або точку.

Показано, що існує не більше одного ОРТ середовища з фазовою швидкістю v_f $S1$ - і $S2$ -хвиль у сингулярному напрямку \mathbf{n} .

Розглянуто властивості ОРТ середовищ з фіксованою фазовою швидкістю v_f $S1$ - і $S2$ -хвиль у різних сингулярних напрямках \mathbf{n} . Для цих середовищ розраховано індекс Пуанкаре $S1$ - або $S2$ -хвилі у відповідній сингулярній точці і віднесено його до проекції сингулярного вектора \mathbf{n} на площину симетрії 12 ОРТ середовища. В результаті на площині 12 отримаємо дві області з індексами Пуанкаре $1/2$ та $-1/2$. Ці області розділяє крива у вигляді еліпса або гіперболи, яка є проекцією сингулярної кривої виродженого ОРТ середовища. При заданих c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$, і значенні v_f — швидкості $S1$ -, $S2$ -хвиль на сингулярній кривій, знайдено формули для інших пружних параметрів d_{12}, d_{13}, d_{23} виродженого ОРТ середовища. Сингулярна крива виродженого ОРТ середовища представлена як перетин одиничної сфери з еліптичним конусом. Ця крива в загальному випадку не є плоскою кривою.

Результати продемонстровано на кількох прикладах.

Теорія. Орторомбічне середовище описується матрицею Крістофеля:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} c_{11}n_1^2 + c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2 & d_{12}n_1n_2 & d_{13}n_1n_3 \\ d_{12}n_1n_2 & c_{66}n_1^2 + c_{22}n_2^2 + c_{44}n_3^2 & d_{23}n_2n_3 \\ d_{13}n_1n_3 & d_{23}n_2n_3 & c_{55}n_1^2 + c_{44}n_2^2 + c_{33}n_3^2 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

де c_{ij} — приведені елементи матриці пружності, n_i — компоненти напрямного вектора, $d_{12} = c_{12} + c_{66}$, $d_{13} = c_{13} + c_{55}$, $d_{23} = c_{23} + c_{44}$. Позначимо $\Delta_{ij} = c_{ii} - c_{jj}$, $i \neq j$.

Припустимо, що

$$c_{11}, c_{22}, c_{33} > c_{66} > c_{44} > c_{55} > 0, \quad d_{12} \geq 0, \quad d_{13} \geq 0, \quad d_{23} \geq 0. \quad (1.2)$$

Надалі прийємо, що значення c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$, фіксовані, а d_{12} , d_{13} , d_{23} змінюються зі збереженням позитивної визначеності матриці пружності (c_{ij}) [Musgrave, 1981, 1985]. Отже, виконуються нерівності

$$0 \leq d_{12} < c_{66} + \sqrt{c_{11}c_{22}}, \quad 0 \leq d_{13} < c_{55} + \sqrt{c_{11}c_{33}}, \quad 0 \leq d_{23} < c_{44} + \sqrt{c_{22}c_{33}},$$

$$c_{11}(d_{23} - c_{44})^2 + c_{22}(d_{13} - c_{55})^2 + c_{33}(d_{12} - c_{66})^2 - 2(d_{23} - c_{44})(d_{13} - c_{55})(d_{12} - c_{66}) < c_{11}c_{22}c_{33}. \quad (1.3)$$

При виконанні нерівностей (1.2) в орторомбічному середовищі відсутні сингулярні точки, розташовані на осях симетрії.

Сингулярна точка (напрямок) — це значення напрямного вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, коли збігаються фазові швидкості $S1$ - і $S2$ -хвиль. Швидкість $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярному напрямку \mathbf{n} позначимо v_f .

Розташування сингулярних точок у площинах симетрії. Положення сингулярної точки орторомбічного середовища у площині симетрії (m, k) $m, k = 1, 2, 3$, $m < k$, визначається рівністю нулю трьох діагональних 2×2 -мінорів матриці $\mathbf{K} - v_f^2 \mathbf{I}$, де v_f — фазова швидкість, \mathbf{I} — одинична 3×3 -матриця. Інші три (недіагональні) мінори цієї матриці в площинах симетрії дорівнюють нулю тотожно.

Отримана система рівнянь зводиться до одного рівняння для змінної $x = n_k^2 / n_m^2$:

$$x^2 + 2R_{mk}x + T_{mk} = 0, \quad (1.4)$$

де

$$R_{12} = \frac{-d_{12}^2 + \Delta_{15}\Delta_{24} + \Delta_{65}\Delta_{64}}{2\Delta_{64}\Delta_{24}}, \quad T_{12} = \frac{\Delta_{15}\Delta_{65}}{\Delta_{64}\Delta_{24}}, \quad R_{13} = \frac{d_{13}^2 - \Delta_{16}\Delta_{34} - \Delta_{45}\Delta_{65}}{2\Delta_{45}\Delta_{34}}, \quad T_{13} = \frac{\Delta_{16}\Delta_{65}}{\Delta_{45}\Delta_{34}},$$

$$R_{23} = \frac{-d_{23}^2 + \Delta_{26}\Delta_{35} - \Delta_{45}\Delta_{64}}{2\Delta_{45}\Delta_{35}}, \quad T_{23} = -\frac{\Delta_{26}\Delta_{64}}{\Delta_{45}\Delta_{35}}. \quad (1.5)$$

Залежно від значень R_{mk} і T_{mk} рівняння (1.4) має різну кількість позитивних коренів [Musgrave, 1981, 1985]:

- 1) якщо $R_{mk}^2 < T_{mk}$ або $(R_{mk} > 0$ і $T_{mk} > 0)$ — 0 позитивних коренів;
- 2) якщо $T_{mk} < 0$ — 1 позитивний корінь;
- 3) якщо $R_{mk} < 0$ і $R_{mk}^2 > T_{mk} > 0$ — 2 позитивні корені;
- 4) якщо $R_{mk} < 0$ і $R_{mk}^2 = T_{mk}$ — 1 дворазовий позитивний корінь.

Дискримінанти $D_{mk} = R_{mk}^2 - T_{mk}$ рівняння (1.4) для різних m, k задають формулами

$$D_{12} = \frac{(d_{12} + (\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}))(d_{12} + (\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} - \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}))(d_{12} - (\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} - \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}))(d_{12} - (\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}))}{4\Delta_{64}^2\Delta_{24}^2}, \quad (1.6)$$

$$D_{13} = \frac{(d_{13} + (\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} + \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}))(d_{13} + |\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}|)(d_{13} - |\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}|)(d_{13} - (\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} + \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}))}{4\Delta_{45}^2\Delta_{34}^2}, \quad (1.7)$$

$$D_{23} = \frac{\left(d_{23}^2 - \Delta_{26}\Delta_{35} + \Delta_{45}\Delta_{64}\right)^2 + 4\Delta_{26}\Delta_{64}\Delta_{45}\Delta_{35}}{4\Delta_{45}^2\Delta_{35}^2} > 0. \quad (1.8)$$

Оскільки $\Delta_{15} > \Delta_{65}$ і $\Delta_{24} > \Delta_{64}$, то $\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} > \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}$. Проте вираз $\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}$, що входить в D_{13} , може мати будь-який знак. У формулах (1.5) всі $\Delta_{ij} > 0$. Тому $T_{12} > 0$, $T_{13} > 0$, $T_{23} < 0$.

У площинах 12 і 13 залежно від параметрів d_{12} і d_{13} можуть бути дві або одна — дворазова, або відсутні сингулярні точки взагалі.

У площині 23 завжди є одна сингулярна точка (суттєва), оскільки $T_{23} < 0$ за будь-якого d_{23} . Значення d_{23} змінюється у межах $\left[0, c_{44} + \sqrt{c_{22}c_{33}}\right]$. За цих значень d_{23} сингулярна точка знаходиться на дузі кола $n_2^2 + n_3^2 = 1$. При $d_{23} = 0$

$$n_2^2 = \frac{\Delta_{35}}{\Delta_{34} + \Delta_{65}}, \quad n_3^2 = \frac{\Delta_{64}}{\Delta_{34} + \Delta_{65}}. \quad (1.9)$$

У площині 12 відсутність сингулярних точок визначається виконанням будь-якої з нерівностей $D_{12} < 0$ або $R_{12} > 0$. Врахувавши співвідношення (1.5), (1.6) і нерівність

$$\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} - \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}} < \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24} + \Delta_{65}\Delta_{64}} < \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}, \quad (1.10)$$

отримуємо, що сингулярні точки у площині 12 відсутні, якщо

$$0 \leq d_{12} < \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}. \quad (1.11)$$

При $d_{12} = \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}$ існує одна дворазова сингулярна точка з координатами

$$n_{1(c)}^2 = \frac{\sqrt{\Delta_{24}\Delta_{64}}}{\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{65}} + \sqrt{\Delta_{24}\Delta_{64}}}, \quad n_{2(c)}^2 = \frac{\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{65}}}{\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{65}} + \sqrt{\Delta_{24}\Delta_{64}}}. \quad (1.12)$$

При $\sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}} < d_{12} < c_{66} + \sqrt{c_{11}c_{22}}$ існують дві сингулярні точки, розташовані на дузі кола $n_1^2 + n_2^2 = 1$. Кінцеві точки дуги визначаються двома коренями рівняння (1.4) з $d_{12} = c_{66} + \sqrt{c_{11}c_{22}}$.

У площині 13 відсутність сингулярних точок визначається виконанням будь-якої з нерівностей $D_{13} < 0$ або $R_{13} > 0$. З огляду на співвідношення (1.5) та (1.6) і нерівність

$$\left|\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}\right| < \sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34} + \Delta_{45}\Delta_{65}} < \sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} + \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}} \quad (1.13)$$

отримуємо, що сингулярні точки в площині 13 відсутні, якщо

$$d_{13} > \left|\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}\right|. \quad (1.14)$$

При $d_{13} = \left|\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}\right|$ існує одна дворазова сингулярна точка. При $0 \leq d_{13} < \left|\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}}\right|$ існують дві сингулярні точки.

Рівняння (1.4) для невідомого $x = n_3^2 / n_1^2$ можна подати у вигляді

$$d_{13}^2 x = -(\Delta_{45}x - \Delta_{16})(\Delta_{34}x - \Delta_{65}). \quad (1.15)$$

Оскільки $x > 0$, то вираз у правій частині (1.15) не має бути від'ємним. Тому x належить

відрізку з кінцями $x_1 = \Delta_{65} / \Delta_{34}$ та $x_2 = \Delta_{16} / \Delta_{45}$ і будь-яка точка цього відрізка є коренем рівняння (1.15) для відповідного d_{13} . Дворазова сингулярна точка відповідає кореню $x_c = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{\Delta_{16} \Delta_{65}} / \sqrt{\Delta_{34} \Delta_{45}}$ при $d_{13} = \left| \sqrt{\Delta_{16} \Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45} \Delta_{65}} \right|$. Отже, сингулярні точки в площині 13 розташовані на дузі кола $n_1^2 + n_3^2 = 1$ і обмежені точками

$$n_{1(1)}^2 = \frac{\Delta_{45}}{\Delta_{16} + \Delta_{45}}, \quad n_{3(1)}^2 = \frac{\Delta_{16}}{\Delta_{16} + \Delta_{45}}, \quad n_{1(2)}^2 = \frac{\Delta_{34}}{\Delta_{65} + \Delta_{34}}, \quad n_{3(2)}^2 = \frac{\Delta_{65}}{\Delta_{65} + \Delta_{34}}. \quad (1.16)$$

На цій дузі знаходиться дворазова сингулярна точка:

$$n_{1(c)}^2 = \frac{\sqrt{\Delta_{45} \Delta_{34}}}{\sqrt{\Delta_{45} \Delta_{34}} + \sqrt{\Delta_{16} \Delta_{65}}}, \quad n_{3(c)}^2 = \frac{\sqrt{\Delta_{16} \Delta_{65}}}{\sqrt{\Delta_{45} \Delta_{34}} + \sqrt{\Delta_{16} \Delta_{65}}}. \quad (1.17)$$

Образом сингулярної точки з площини 13 у груповій області є еліпс з піввіссю a_{13} у площині симетрії 13 і піввіссю b_{13} у перпендикулярному напрямку (див. додаток), де

$$a_{13} = \frac{\left| -\Delta_{16} \Delta_{65} n_1^4 + \Delta_{34} \Delta_{45} n_3^4 \right|}{2 n_1 n_3 (Q_{13} + Q_{31}) \sqrt{Z_{13}}}, \quad b_{13} = \frac{\left| n_1 d_{12} \sqrt{Q_{13}} - n_3 d_{23} \sqrt{Q_{31}} \right|}{2 Z_{13} \sqrt{Q_{13} + Q_{31}}}, \quad (1.18)$$

$$Q_{13} = -\Delta_{65} n_1^2 + \Delta_{34} n_3^2, \quad Q_{31} = \Delta_{16} n_1^2 - \Delta_{45} n_3^2, \quad Z_{13} = c_{66} n_1^2 + c_{44} n_3^2. \quad (1.19)$$

Піввісь $a_{13} = 0$, якщо $\Delta_{16} \Delta_{65} n_1^4 = \Delta_{34} \Delta_{45} n_3^4$, це відбувається у дворазовій сингулярній точці (1.17). Якщо при цьому $b_{13} \neq 0$, то сингулярна точка є клиноподібною. У такому випадку поверхні повільностей $S1$ - і $S2$ -хвиль дотикаються в напрямку осі a_{13} .

Розташування сингулярних точок поза площинами симетрії. Позначимо

$$f_{12} = \frac{d_{13} d_{23}}{d_{12}}, \quad f_{13} = \frac{d_{12} d_{23}}{d_{13}}, \quad f_{23} = \frac{d_{12} d_{13}}{d_{23}}. \quad (1.20)$$

Тоді

$$d_{12} = \sqrt{f_{13} f_{23}}, \quad d_{13} = \sqrt{f_{12} f_{23}}, \quad d_{23} = \sqrt{f_{12} f_{13}}. \quad (1.21)$$

Якщо всі числа d_{12} , d_{13} , d_{23} не дорівнюють нулю, то положення сингулярної точки, що знаходиться поза площинами симетрії орторомбічного середовища, визначається рівністю нулю трьох недиагональних мінорів матриці (1.1), тобто позитивним коренем лінійної системи рівнянь щодо змінних n_1^2 , n_2^2 , n_3^2 [Schoenberg, Helbig, 1997]:

$$\begin{aligned} (c_{11} - f_{23}) n_1^2 + c_{66} n_2^2 + c_{55} n_3^2 &= v_f^2, & c_{66} n_1^2 + (c_{22} - f_{13}) n_2^2 + c_{44} n_3^2 &= v_f^2, \\ c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2 + (c_{33} - f_{12}) n_3^2 &= v_f^2, \end{aligned} \quad (1.22)$$

де v_f^2 — фазова швидкість $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярній точці.

Віднявши рівняння 2 і 3, або 1 і 2 цієї системи, отримаємо однорідну систему рівнянь для визначення n_1^2 , n_2^2 , n_3^2 :

$$\begin{aligned} \Delta_{65} n_1^2 + (\Delta_{24} - f_{13}) n_2^2 + (-\Delta_{34} + f_{12}) n_3^2 &= 0, \\ (\Delta_{16} - f_{23}) n_1^2 + (-\Delta_{26} + f_{13}) n_2^2 - \Delta_{45} n_3^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Зокрема, при $n_2 = 0$ однорідна система (1.23) еквівалентна двом рівностям

$$Q_{13} = f_{12}n_3^2, \quad Q_{31} = f_{23}n_1^2 \quad (1.24)$$

і має ненульовий корінь щодо змінних n_1^2, n_3^2 за виконання умови

$$(f_{23} - \Delta_{16})(f_{12} - \Delta_{34}) - \Delta_{45}\Delta_{65} = 0. \quad (1.25)$$

Для будь-якої точки $(n_1, 0, n_3)$, що знаходиться на дузі (1.16), з рівняння (1.24) можна однозначно визначити значення f_{12}, f_{23} та перерахувати їх у параметри $d_{13} = \sqrt{f_{12}f_{23}}$ і $d_{23} / d_{12} = \sqrt{f_{12} / f_{23}}$. За різних f_{13} та знайдених значень f_{12}, f_{23} отримаємо різні ОРТ середовища з кратною сингулярною точкою $(n_1, 0, n_3)$ в площині симетрії 13.

Якщо виконується (1.25), то з (1.18), (1.20) і (1.24) випливає, що піввісь b_{13} для сингулярної точки в площині 13 дорівнює нулю. У цьому випадку сингулярна точка, яка розташована поза площинами симетрії, поєднується із сингулярною точкою в площині 13 і ця точка стає дворазовою клиноподібною з нульовою піввіссю b_{13} . В окремому випадку при поєднанні її з дворазовою сингулярною точкою (1.17) з площини 13 вона стає точкою дотичного типу з двома нульовими півосями [Alshits, Lothe, 1979; Shuvalov, 1998].

Корені системи (1.23) можна подати у вигляді

$$n_1^2 = kU_1, \quad n_2^2 = kU_2, \quad n_3^2 = kU_3, \quad (1.26)$$

де

$$\begin{aligned} U_1 &= -(f_{12} - \Delta_{35})(f_{13} - \Delta_{26}) - \Delta_{45}\Delta_{64}, \quad U_2 = (f_{12} - \Delta_{34})(f_{23} - \Delta_{16}) - \Delta_{45}\Delta_{65}, \\ U_3 &= -(f_{13} - \Delta_{24})(f_{23} - \Delta_{15}) + \Delta_{64}\Delta_{65}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тому для існування сингулярної точки, розташованої поза площинами симетрії, повинні виконуватися три нерівності:

$$U_1 > 0, \quad U_2 > 0, \quad U_3 > 0 \quad \text{або} \quad U_1 < 0, \quad U_2 < 0, \quad U_3 < 0. \quad (1.28)$$

Значення коефіцієнта k впливає із умови $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Достатньою умовою відсутності коренів у системи (1.23) є позитивність або негативність усіх коефіцієнтів одного з рівнянь (1.23). Наприклад, якщо

$$d_{12} = \sqrt{\Delta_{16}\Delta_{26}}, \quad d_{13} = \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{35}}, \quad d_{23} = \sqrt{\Delta_{24}\Delta_{34}}, \quad (1.29)$$

то ОРТ середовище називається еліптичним [Stovas et al., 2021]. Для такого середовища існує лише одна сингулярна точка, що розташована у площині 23. Справді, при виконанні нерівностей (1.2) справедливі нерівності $\Delta_{15} > \Delta_{16}$, $\Delta_{24} > \Delta_{26}$, $\Delta_{35} > \Delta_{34}$, з яких випливає, що $\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{26}} < \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{24}} + \sqrt{\Delta_{65}\Delta_{64}}$ і $\sqrt{\Delta_{16}\Delta_{34}} - \sqrt{\Delta_{45}\Delta_{65}} < \sqrt{\Delta_{15}\Delta_{35}}$. Тому виконуються нерівності (1.11) і (1.14), вони забезпечують відсутність сингулярних точок у площинах симетрії 12 і 13. Відсутність сингулярної точки поза площинами симетрії впливає з того, що коефіцієнти першого рівняння системи (1.23) є позитивними. Останнє твердження доводиться підстановкою значень d_{12}, d_{13}, d_{23} з (1.29) в (1.20) і (1.23) та врахуванням нерівностей $\Delta_{15} > \Delta_{16}$, $\Delta_{24} > \Delta_{26}$, $\Delta_{35} > \Delta_{34}$.

Якщо $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, то система рівнянь (1.23) є виродженою. Її рівняння пропорційні і визначають не сингулярну точку, а сингулярну лінію.

З рівнянь $U_1 = 0$ і $U_2 = 0$ можна виразити f_{12} і f_{23} через f_{13} :

$$f_{12} = \Delta_{35} - \frac{\Delta_{45}\Delta_{64}}{f_{13} - \Delta_{26}}, \quad f_{23} = \Delta_{15} + \frac{\Delta_{65}\Delta_{64}}{f_{13} - \Delta_{24}}. \quad (1.30)$$

Щоб знайти параметри виродженого ОРТ середовища, розв'яжемо друге рівняння системи (1.22) відносно f_{13} і виключимо змінну n_3 за умови $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$:

$$f_{13} = \Delta_{24} + \frac{\Delta_{64} n_1^2 + c_{44} - v_f^2}{n_2^2}. \quad (1.31)$$

Підставивши значення f_{12} , f_{13} , f_{23} з (1.30) і (1.31) у будь-яке з рівнянь (1.23) і виключивши одну зі змінних n_3 , n_2 , n_1 , з використанням співвідношення $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ отримуємо рівняння сингулярної кривої для виродженого ОРТ середовища в проєкціях на площини симетрії 12, 13, 23:

$$\frac{\Delta_{64} n_1^2}{v_f^2 - c_{44}} + \frac{\Delta_{65} n_2^2}{v_f^2 - c_{55}} = 1, \quad (1.32)$$

$$-\frac{\Delta_{45} n_1^2}{v_f^2 - c_{44}} - \frac{\Delta_{65} n_3^2}{v_f^2 - c_{66}} = 1, \quad (1.33)$$

$$\frac{\Delta_{45} n_2^2}{v_f^2 - c_{55}} - \frac{\Delta_{64} n_3^2}{v_f^2 - c_{66}} = 1. \quad (1.34)$$

Після віднімання рівнянь (1.32) і (1.33) і ділення на Δ_{65} отримуємо рівняння сингулярної кривої виродженого середовища у вигляді конуса другого порядку:

$$\frac{n_1^2}{v_f^2 - c_{44}} + \frac{n_2^2}{v_f^2 - c_{55}} + \frac{n_3^2}{v_f^2 - c_{66}} = 0. \quad (1.35)$$

Рівняння (1.35) має дійсні корені лише у випадку, якщо $c_{55} < v_f^2 < c_{44}$ або $c_{44} < v_f^2 < c_{66}$. Якщо v_f^2 належить інтервалу (c_{55}, c_{44}) , то проєкція сингулярної кривої (1.32) є гіперболою, яка проходить через точки

$$n_1^{(1)} = 0, \quad n_2^{(1)} = \sqrt{(v_f^2 - c_{55}) / \Delta_{65}} \quad \text{і} \quad n_1^{(2)} = \sqrt{(c_{44} - v_f^2) / \Delta_{45}}, \quad n_2^{(2)} = \sqrt{(v_f^2 - c_{55}) / \Delta_{45}}.$$

Якщо v_f^2 належить інтервалу (c_{44}, c_{66}) , то ця проєкція є еліпсом з півосями:

$$n_1 = \sqrt{(v_f^2 - c_{44}) / \Delta_{64}}, \quad n_2 = \sqrt{(v_f^2 - c_{55}) / \Delta_{65}}.$$

При цьому очевидно, що півосі не перевищують одиницю.

Знайдемо значення f_{12} , f_{13} , f_{23} для виродженого середовища, що залежать тільки від діагональних елементів матриці пружності та фазової швидкості v_f S_1 - і S_2 -хвиль на сингулярній лінії. Для цього розв'яжемо рівняння (1.22) відносно f_{12} , f_{13} , f_{23} . З отриманих формул, використавши співвідношення (1.32) і $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, виключимо змінні n_2 і n_3 . У результаті отримаємо вирази для f_{12} , f_{13} , f_{23} , які не містять усі змінні n_1 , n_2 , n_3 :

$$f_{12} = \Delta_{35} + \Delta_{64} + \frac{\Delta_{64} \Delta_{65}}{v_f^2 - c_{66}}, \quad f_{13} = \Delta_{24} - \Delta_{65} + \frac{\Delta_{45} \Delta_{65}}{v_f^2 - c_{55}}, \quad f_{23} = \Delta_{16} + \Delta_{45} - \frac{\Delta_{45} \Delta_{64}}{v_f^2 - c_{44}}. \quad (1.36)$$

Рівняння (1.36) розв'язуємо відносно v_f^2 , і отримуємо еквівалентні формули для фазової швидкості v_f^2 S_1 -, S_2 -хвиль на сингулярній кривій:

$$v_f^2 = c_{66} + \frac{\Delta_{64} \Delta_{65}}{f_{12} - \Delta_{35} - \Delta_{64}}, \quad v_f^2 = c_{55} + \frac{\Delta_{45} \Delta_{65}}{f_{13} - \Delta_{24} + \Delta_{65}}, \quad v_f^2 = c_{44} - \frac{\Delta_{45} \Delta_{64}}{f_{23} - \Delta_{16} - \Delta_{45}}. \quad (1.37)$$

З нерівностей (1.2), (1.3) і співвідношень (1.20), (1.21) можна отримати обмеження значень v_f^2 , за яких існує вироджене середовище. Однак ці аналітичні вирази досить складні і в статті не наведено. Для визначення, чи існує вироджене середовище при чисельно заданих c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$, і v_f^2 , знаходимо d_{12} , d_{13} , d_{23} за формулами (1.36), (1.21) і перевіряємо виконання нерівностей (1.3).

Зазначимо, що для кожної сингулярної точки в площині симетрії 13 існує одне вироджене ОРТ середовище, сингулярна лінія якого проходить через цю точку. Його параметри f_{12} , f_{23} визначають із співвідношення (1.24), а параметр f_{13} знаходять з рівнянь $U_1 = 0$ або $U_3 = 0$.

Цікавим є випадок, коли сингулярна крива на одиничній сфері є коло. З формули (1.35) випливає, що в такому разі замість однієї з нерівностей $c_{55} < c_{44} < c_{66}$ має бути рівність. Нехай, наприклад, $c_{55} = c_{44} < c_{66}$. У цьому випадку при $c_{44} < v_f^2 < c_{66}$ конус (1.35) круговий, а сингулярна крива на одиничній сфері — це коло з радіусом r_3 в площині, перпендикулярній до осі n_3 , де

$$r_3^2 = \frac{v_f^2 - c_{44}}{\Delta_{64}}. \quad (1.38)$$

Аналогічно, у разі, коли $c_{55} < c_{44} = c_{66}$ при $c_{55} < v_f^2 < c_{44}$, сингулярна крива на одиничній сфері — це коло радіуса r_2 в площині, перпендикулярній до осі n_2 , де

$$r_2^2 = \frac{c_{44} - v_f^2}{\Delta_{45}}. \quad (1.39)$$

Прикладами вироджених ОРТ середовищ із сингулярними кривими є вертикальні та горизонтальні трансверсально-ізотропні (ВТІ та ГТІ) середовища. ОРТ середовище називається ВТІ або ГТІ середовищем, якщо його коефіцієнти пружності задовольняють відповідно рівності (1.40) або (1.41) [Fedorov, 1968]:

$$c_{11} = c_{22}, c_{13} = c_{23}, c_{44} = c_{55}, c_{12} = c_{11} - 2c_{66}, \quad (1.40)$$

$$c_{11} = c_{33}, c_{12} = c_{23}, c_{44} = c_{66}, c_{13} = c_{11} - 2c_{55}. \quad (1.41)$$

За фіксованих значень c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$ формули (1.40), (1.41) визначають однопараметричні сімейства ВТІ і ГТІ середовищ, що залежать від c_{13} та c_{12} відповідно.

Формули (1.42) і (1.43) дають можливість розглядати сімейства ВТІ та ГТІ середовищ залежно від фазової швидкості v_f на сингулярній кривій (колі):

$$v_{f, \text{ВТІ}}^2 = c_{66} + \frac{\Delta_{16} \Delta_{64}^2}{(c_{13} + c_{44})^2 - \Delta_{16} (\Delta_{35} + \Delta_{64})}, \quad (1.42)$$

$$v_{f, \text{ГТІ}}^2 = c_{55} + \frac{\Delta_{15} \Delta_{45}^2}{(c_{12} + c_{44})^2 - \Delta_{15} (\Delta_{26} - \Delta_{45})}. \quad (1.43)$$

Доведемо, що коли діагональні елементи матриці пружності задовольняють рівності $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$ і виконуються нерівності $c_{44} < v_f^2 < c_{66} - \Delta_{64} / (\Delta_{34} + \Delta_{64})$, то вироджене ОРТ середовище з параметрами (1.36) є ВТІ середовищем. Справді, з формул (1.36) випливає, що $f_{12} = \Delta_{34} + \Delta_{64} - \Delta_{64}^2 / (c_{66} - v_f^2)$, $f_{13} = f_{23} = \Delta_{16}$. Тому відповідно до (1.21) $d_{12} = \Delta_{16}$, $d_{13} = d_{23} = f_{12}$. Отже, $c_{12} = c_{11} - 2c_{66}$, $c_{13} = c_{23}$, і виконуються всі співвідношення (1.40) для ВТІ середовища. З умови $f_{12} > 0$ випливає, що $v_f^2 < c_{66} - \Delta_{64}^2 / (\Delta_{34} + \Delta_{64})$. Зазначимо, що при значенні $v_f = c_{44}$ сингулярне коло вироджується в точку, а при $v_f^2 = c_{66} - \Delta_{64}^2 / (\Delta_{34} + \Delta_{64})$ квадрат радіуса сингулярного кола дорівнює $\Delta_{34} / (\Delta_{34} + \Delta_{64})$.

Аналогічно доводиться твердження: якщо діагональні елементи матриці пружності задовольняють рівності $c_{11} = c_{33}$, $c_{44} = c_{66}$ і виконуються нерівності

$$c_{55} + \frac{\Delta_{45}^2 \Delta_{15}}{\left(c_{44} + \sqrt{c_{11} c_{22}}\right)^2 - \Delta_{24} \Delta_{15} + \Delta_{45} \Delta_{15}} < v_f^2 < c_{44}, \quad (1.44)$$

то вироджене ОРТ середовище з параметрами (1.36) є ГТІ середовищем. Нижня межа v_f^2 у нерівностях (1.44) впливає з нерівності (1.3) для d_{12} .

У класифікації сингулярних точок велику роль відіграє індекс Пуанкаре [Alshits, Lothe, 1979; Shuvalov, 1998]. Цей індекс дорівнює кількості обертів вектора поляризації $S1$ - або $S2$ -хвилі при повному повороті навколо сингулярної точки. Поворот виконується проти годинникової стрілки вздовж маленького кола, розташованого в площині, що перпендикулярна до напрямного вектора сингулярної точки. Оскільки вектори поляризації $S1$ - і $S2$ -хвиль взаємно перпендикулярні, індекс Пуанкаре не залежить від їх типу. У найбільш загальному випадку, при повному повороті навколо сингулярної точки, вектор поляризації повертається лише на 180° і приходиться у вихідну точку в протилежному напрямку. Залежно від напрямку обертання вектора поляризації — проти годинникової стрілки або за годинниковою стрілкою — індекс відповідно дорівнює $1/2$ або $-1/2$. Такі сингулярні точки називаються кінчними, а образ сингулярної точки в груповій області — еліпсом внутрішньої рефракції. Метод обчислення півосей еліпса внутрішньої рефракції викладено у праці [Fedorov, 1968], а індексів Пуанкаре — в статтях [Alshits, Lothe, 1979; Shuvalov, 1998] і стисло описано у додатку.

Розглянемо орторомбічне середовище, що має сингулярну точку поза площинами симетрії з сингулярним напрямком $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Вважатимемо, що фіксована фазова швидкість v_f $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярному напрямку \mathbf{n} , а діагональні елементи матриці пружності задовольняють нерівності (1.2). Із системи рівнянь (1.22) можна однозначно визначити f_{12} , f_{13} , f_{23} , а потім із співвідношення (1.21) знайти параметри d_{12} , d_{13} , d_{23} . Якщо виконуються нерівності (1.3) та система рівнянь (1.22) є невиродженою, отримаємо параметри орторомбічного середовища з фазовою швидкістю v_f $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярному напрямку $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Отримані середовища для різних сингулярних напрямків \mathbf{n} будемо зображувати точками $\mathbf{n}_{pr} = (n_1, n_2)$ з першого квадранта. Індеси Пуанкаре в напрямках \mathbf{n} для цих середовищ дорівнюють $1/2$ та $-1/2$. Відповідно до індексу Пуанкаре, точки \mathbf{n}_{pr} об'єднуються у дві області. Ці області розділяє крива (1.32), яка є сингулярною кривою виродженого ОРТ середовища з параметрами (1.36), у якому сингулярні точки розташовані на кривій (1.35) і індекс Пуанкаре в напрямку цих сингулярних точок дорівнює нулю.

Чисельні приклади. У чисельних прикладах і на рисунках зведені коефіцієнти пружності і швидкості наведено відповідно у розмірностях $\text{км}^2/\text{с}^2$ і $\text{км}/\text{с}$.

Для ілюстрації викладених вище тверджень розглянемо орторомбічні середовища, в яких діагональні елементи матриці пружності збігаються з елементами стандартного ОРТ середовища [Schoenberg, Helbig, 1997]:

$$c_{11} = 9,0, \quad c_{22} = 9,84, \quad c_{33} = 5,9375, \quad c_{44} = 2,0, \quad c_{55} = 1,6, \quad c_{66} = 2,182, \quad (1.45)$$

а інші задані рівностями $c_{12} = d_{12} - c_{66}$, $c_{13} = d_{13} - c_{55}$, $c_{23} = d_{23} - c_{44}$. Матриця Крістоффеля для такого середовища визначається формулою (1.1). Значення d_{12} , d_{13} , d_{23} відповідають за наявність і кількість сингулярних напрямків у площинах симетрії 12, 13, 23.

У площині симетрії 12 цього середовища знаходиться одна дворазова сингулярна точка при $d_{12} = 7,94$ і по дві сингулярні точки при $7,94 < d_{12} \leq 11,59$. Фазові швидкості

в сингулярних точках знаходяться в межах $1,62 \leq v_f \leq 1,99$. Кінці інтервалу фазових швидкостей досягаються при $d_{12} = 11,59$. У дворазовій сингулярній точці $v_f = 1,85$. На рис. 1, а зображена дуга одиничного кола в площині 12, яка заповнена сингулярними точками. На рис. 1, б показано графік залежності від параметра d_{12} двох гілок фазової швидкості $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярних точках. Фазова швидкість однозначно визначає положення сингулярної точки на одиничному колі.

У площині симетрії 13 знаходяться одна дворазова сингулярна точка при $d_{13} = 4,7$ і по дві сингулярні точки при $0 \leq d_{12} < 4,7$. Фазові швидкості в сингулярних точках знаходяться в межах $2,01 \leq v_f \leq 2,16$. Кінці інтервалу швидкостей досягаються при $d_{12} = 0$. У дворазовій сингулярній точці $v_f = 2,07$. На рис. 2, а зображена дуга одиничного кола в площині 13, заповнена сингулярними точками. На рис. 2, б показано графік залежності двох гілок фазової швидкості $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярних точках від параметра d_{13} .

У площині симетрії 23 існує одна сингулярна точка при кожному $0 \leq d_{23} < 9,624$. Фазові швидкості в сингулярних точках знаходяться в межах $1,616 \leq v_f \leq 2,158$. Кінці інтервалу швидкостей досягаються відповідно при $d_{23} = 9,624$ і $d_{23} = 0$. На рис. 3, а зображена дуга одиничного кола в площині симетрії 23, заповнена сингулярними точками. На рис. 3, б показано графік залежності фазової швидкості $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярних точках від параметра d_{23} .

На рис. 4 маленькими кружечками та маленькими ромбиками зображено проєкції (n_1, n_2) на площину 12 сингулярних напрямків $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ для орторомбічних середовищ зі значенням фазової швидкості v_f $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярній точці \mathbf{n} : а) $v_f^{(1)} = 1,32$ км/с та б) $v_f^{(2)} = 1,43$ км/с. Ці значення вибрано з умов $c_{55} < (v_f^{(1)})^2 < c_{44}$ та $c_{44} < (v_f^{(2)})^2 < c_{66}$. Маленькими кружечками позначено точки (n_1, n_2) для середовищ з індексами Пуанкаре $1/2$, а маленькими ромбиками — з індексами Пуанкаре $-1/2$. Області для середовищ різного типу у випадку (а) поділяє гіпербола, а у випадку (б) — еліпс. Розділювальним кривим відповідають два вироджених ОРТ середовища з діагональними елементами з матриці пружності (1.45).

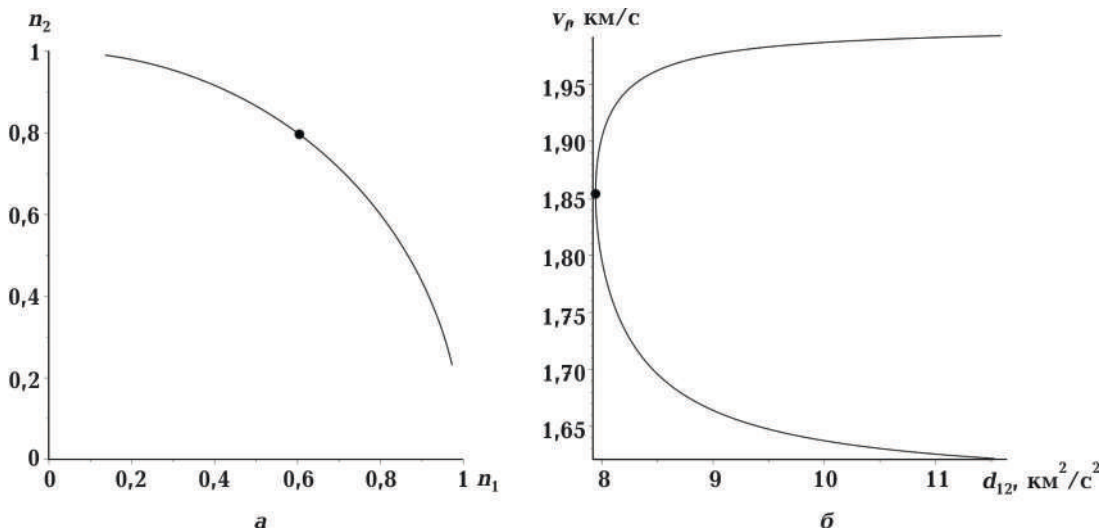


Рис. 1. Дуга одиничного кола, заповнена сингулярними точками з площин симетрії 12 орторомбічних середовищ з параметрами (1.45) при різних d_{12} (а); залежність фазової швидкості v_f (км/с) у сингулярній точці від параметра d_{12} (б). Колом позначено положення дворазової сингулярної точки.

Fig. 1. Arc of unit circle filled with singular points from symmetry planes 12 for orthorhombic media with parameters (1.45) for different d_{12} (а); dependence of phase velocity v_f (km/s) at the singular point on the parametr d_{12} (б). Circle marks position of double singular point.

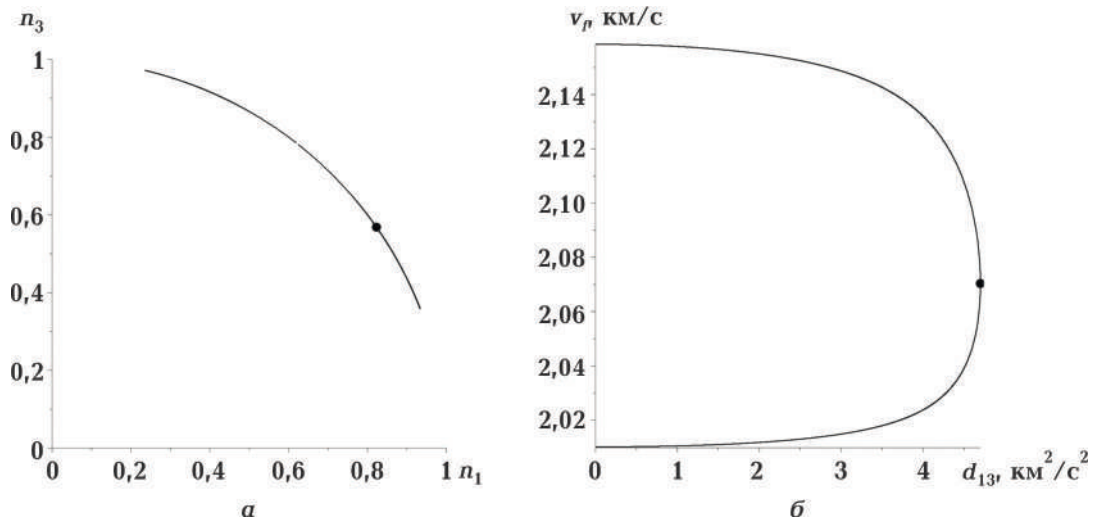


Рис. 2. Дуга одиничного кола, заповнена сингулярними точками з площин симетрії 13 орторомбічних середовищ з параметрами (1.45) при різних d_{13} (а); залежність фазової швидкості v_f (км/с) у сингулярній точці від параметра d_{13} (б). Кругечком позначено положення дворазової сингулярної точки.

Fig. 2. Arc of unit circle filled with singular points from symmetry planes 13 for orthorhombic media with parameters (1.45) for different d_{13} (a); dependence of phase velocity v_f (km/s) at the singular point on the parametr d_{13} (б). Circle marks position of double singular point.

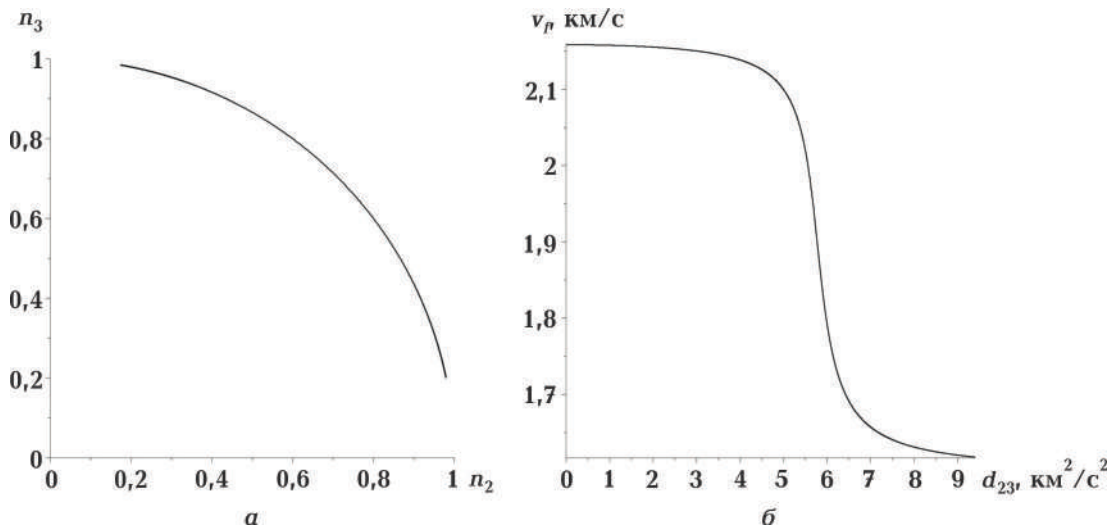


Рис. 3. Дуга одиничного кола, заповнена сингулярними точками з площин симетрії 23 орторомбічних середовищ з параметрами (1.45) при різних d_{23} (а); залежність фазової швидкості v_f (км/с) у сингулярній точці від параметра d_{23} (б).

Fig. 3. Arc of unit circle filled with singular points from planes of symmetry 23 for orthorhombic media with parameters (1.45) for different d_{23} (a); dependence of phase velocity v_f (km/s) at the singular point on the parametr d_{23} (б).

Недіагональні елементи матриць пружності цих середовищ відповідно дорівнюють (км²/с²):

$$c_{12}^{(a)} = 5,98511, \quad c_{13}^{(a)} = 4,06495, \quad c_{23}^{(a)} = 4,16834. \quad (1.46)$$

$$c_{12}^{(б)} = 4,41715, \quad c_{13}^{(б)} = 2,97929, \quad c_{23}^{(б)} = 3,39959. \quad (1.47)$$

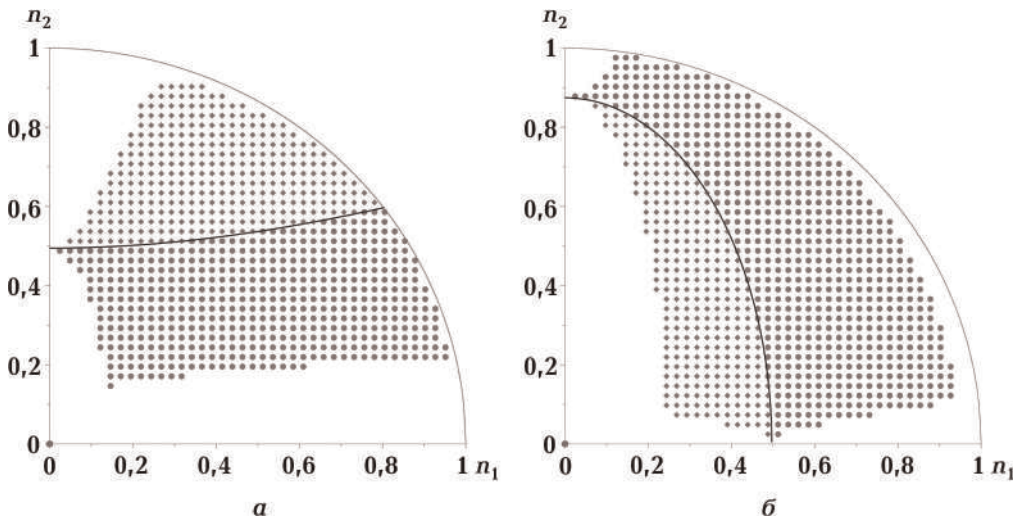


Рис. 4. Зображення сингулярних точок ОРТ середовищ, розташованих поза площинами симетрії в першому квадранті для фіксованої фазової швидкості: $v_f = 1,32$ м/с (а), $v_f = 1,43$ м/с (б). Маленькими кружечками позначено сингулярні точки з індексом Пуанкаре $1/2$, а маленькими ромбіками — з індексом Пуанкаре $-1/2$. Області з різними знаками індексу Пуанкаре поділяють сингулярні криві виродженого ОРТ середовища: гіпербола (а), еліпс (б).

Fig. 4. Singular points of orthorhombic media located in-between the symmetry planes in the first quadrant for a fixed phase velocity: $v_f = 1.32$ m/s (a), $v_f = 1.43$ m/s (b). Small circles mark singular points with Poincaré index $1/2$, and small rhombuses — with Poincaré index $-1/2$. Areas with different signs of the Poincaré index are separated by singular curves: hyperbola (a), ellipse (b).

У цих вироджених середовищах сингулярні точки знаходяться на кривих, що є перетином одиничної сфери з конусом (1.35) при відповідних значеннях v_f . На рис. 5, а, б показана різниця фазових швидкостей $S1$ - і $S2$ -хвиль (км/с) для різних напрямків у проекції (n_1, n_2) . На рисунках позначено лінії, на яких різниця швидкостей дорівнює нулю. Це лінії, що складаються із сингулярних точок. На сингулярних лініях фазові швидкості $S1$ - і $S2$ -хвиль однакові і постійні.

На рис. 6, а, б показано вектори поляризації $S1$ - і $S2$ -хвиль для розглянутих вище ОРТ середовищ у проекції (n_1, n_2) . На рисунках бачимо, що поля векторів поляризації $S1$ - і $S2$ -хвиль мають розриви, розташовані вздовж сингулярних ліній.

На рис. 7 показано лінії перетину конуса (1.35) з одиничною сферою напрямків \mathbf{n} (сингулярні лінії) для вироджених ОРТ середовищ з параметрами: (1.46) (а); (1.47) (б). У випадку (а) $v_f^{(1)} = 1,32$ км/с, у випадку (б) $v_f^{(2)} = 1,43$ км/с. Сингулярні лінії для вироджених середовищ, відмінних від ВТІ та ГТІ, не є плоскими, а їх проекції на координатні площини є еліпсами або гіперболами (1.32)—(1.34).

Висновки. У статті досліджено сингулярні точки орторомбічних (ОРТ) середовищ з фіксованими діагональними елементами зведеної матриці пружності c_{ii} , $i = 1, \dots, 6$, за умови, що $c_{11}, c_{22}, c_{33} > c_{66} > c_{44} > c_{55}$. У цьому випадку лист фазової швидкості qP -хвилі не перетинається з листами $S1$ - і $S2$ -хвиль.

Для різних значень параметрів $c_{12} = d_{12} - c_{66}$, $c_{13} = d_{13} - c_{55}$, $c_{23} = d_{23} - c_{44}$, за яких матриця пружності є позитивно визначеною, було виведено аналітичні вирази для положень сингулярних точок у площинах симетрії. Доведено, що у площинах симетрії 12 та 13 розміщуються дворазові сингулярні точки. Виведено формули довжин півосей еліпсів внутрішньої рефракції для сингулярних точок у площинах симетрії і показано, що у дворазових

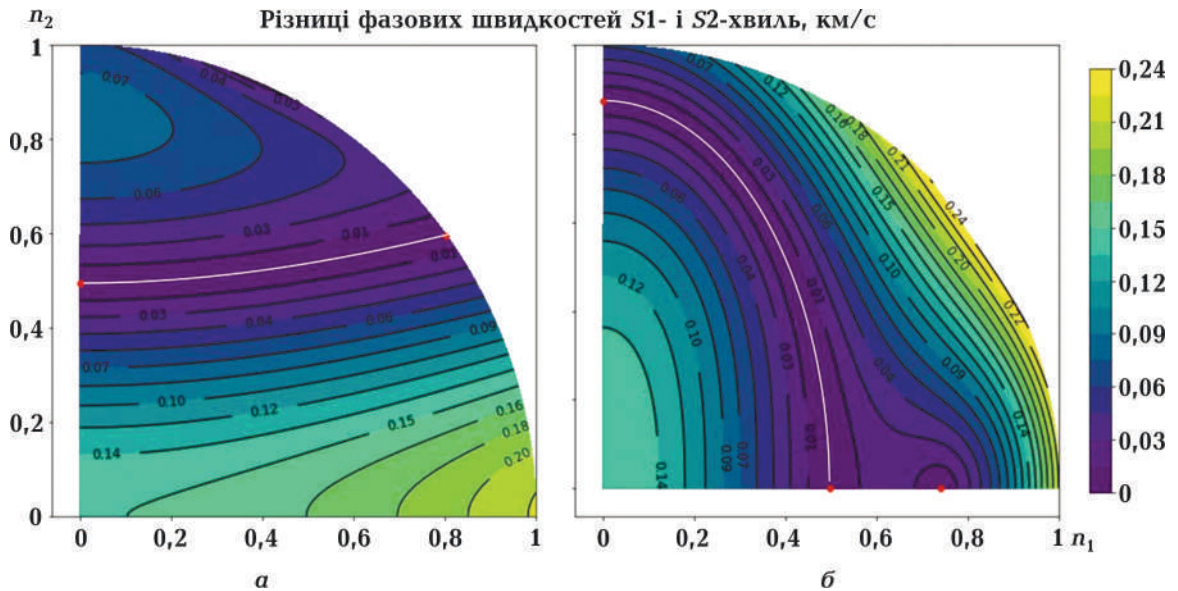


Рис. 5. Різниця фазових швидкостей $S1$ - і $S2$ -хвиль для вироджених орторомбічних середовищ з параметрами (1.46) (а), (1.47) (б). На білих лініях різниця фазових швидкостей $S1$ - і $S2$ -хвиль дорівнюють нулю. Червоними колами позначено сингулярні точки в площинах симетрії.

Fig. 5. Differences of phase velocities of $S1$ - and $S2$ -waves for degenerate orthorhombic media with parameters (1.46) (a), (1.47) (b). On the white lines, the differences in the phase velocities of the $S1$ - and $S2$ -waves are equal to 0. The red circles mark the singular points in the symmetry planes.

сингулярних точках одна з півосей дорівнює нулю. Показано, що обнулення трансверсальної півосі відбувається при параметрах d_{12} , d_{13} , d_{23} , коли сингулярна точка, що знаходиться поза площинами симетрії, поєднується з точкою, що знаходиться у площині симетрії.

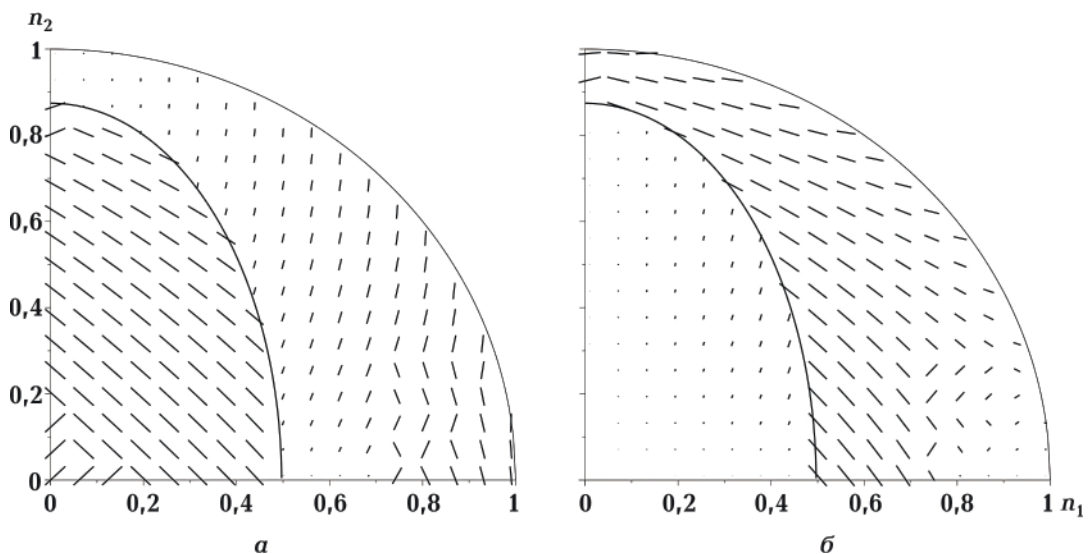


Рис. 6. Векторні поля поляризації виродженого орторомбічного середовища з параметрами (1.47) для $S1$ -хвилі (а), $S2$ -хвилі (б). Уздовж сингулярних ліній векторні поля поляризації розривні.

Fig. 6. Polarization vector fields of a degenerate orthorhombic medium with parameters (1.47) for an $S1$ -wave (a), $S2$ -wave (b). Along the singular lines, the polarization vector fields are discontinuous.

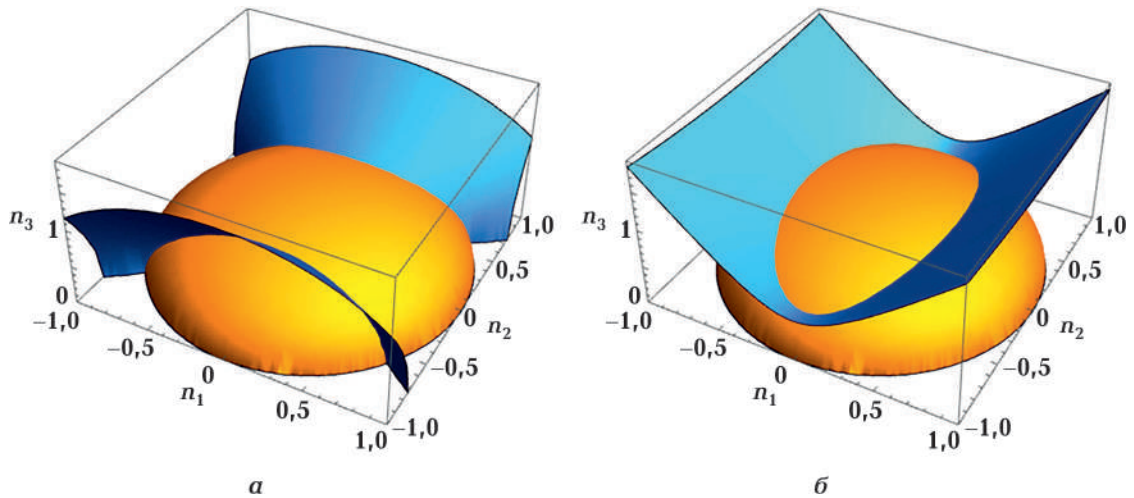


Рис. 7. Лінії перетину конуса (1.35) з одиничною сферою напрямків (сингулярні лінії) для вироджених ОРТ середовищ з параметрами: (1.46) (а), (1.47) (б).

Fig. 7. Lines of intersection of the cone (1.35) with the unit sphere of directions (singular lines) for degenerate ORT media with parameters: (1.46) (a), (1.47) (b).

Вивчення сингулярних точок, розташованих поза площинами симетрії, виконується при додатковому фіксуванні фазової швидкості v_f $S1$ -, $S2$ -хвиль у сингулярних точках. Кожній точці, розташованій поза площинами симетрії, зіставляється система трьох лінійних рівнянь, що характеризує її як сингулярну точку. З цієї системи визначаються параметри f_{12} , f_{13} , f_{23} , а потім d_{12} , d_{13} , d_{23} . Якщо отримана матриця пружності є позитивно визначеною, параметри d_{12} , d_{13} , d_{23} визначають єдине ОРТ середовище із заданою сингулярною точкою в першому октанті. Якщо система рівнянь вироджена, її розв'язком є лінія з сингулярними точками на одиничній сфері. ОРТ середовище зі сингулярною лінією називається виродженим. Для виродженого ОРТ середовища виведено формули, що визначають незалежні від напрямного вектора значення d_{12} , d_{13} , d_{23} . Також отримано рівняння конуса, що описує сингулярну криву. Проекції сингулярної кривої на площини симетрії 12, 13, 23 є еліпсами або гіперболами залежно від значення v_f . Показано, що при фіксованому значенні фазової швидкості v_f $S1$ -, $S2$ -хвиль на сингулярній кривій вона ділить зображення ОРТ середовищ на дві області з індексами Пуанкаре $1/2$ з різним знаком.

Доведено, що вироджене ОРТ середовище при $c_{11} = c_{22}$, $c_{44} = c_{55}$ або $c_{11} = c_{33}$, $c_{44} = c_{66}$ є трансверсально-ізотропним середовищем із вертикальною або горизонтальною віссю симетрії відповідно.

Результати продемонстровано на модифікованих моделях стандартного ОРТ середовища зі статті [Schoenberg, Helbig, 1997]. Для модифікованих моделей діагональні елементи матриць пружності збігаються з відповідними елементами стандартного ОРТ середовища, а недіагональні елементи змінюються у допустимих межах. Для цих середовищ вивчено розподіл сингулярних напрямків у площинах симетрії та поза площинами симетрії. Встановлена залежність цього розподілу від параметрів d_{12} , d_{13} , d_{23} та фазової швидкості v_f $S1$ - і $S2$ -хвиль у сингулярних точках. На двох прикладах вироджених ОРТ середовищ показано сингулярні лінії на одиничних сферах. На зображеннях полів векторів поляризації $S1$ - і $S2$ -хвиль цих середовищ бачимо, що вони зазнають розривів уздовж сингулярних ліній.

У сингулярній точці $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ виберемо нормовані взаємно перпендикулярні вектори поляризації за формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{qP} &= M_3^{-1} (d_{13} n_1 n_3, d_{23} n_2 n_3, g)^T, \quad \mathbf{e}_{S1} = M_2^{-1} (-d_{23} n_2 n_3, d_{13} n_1 n_3, 0)^T, \\ \mathbf{e}_{S2} &= M_2^{-1} M_3^{-1} (d_{13} g n_1 n_3, d_{23} g n_2 n_3, -M_2^2)^T, \end{aligned} \quad (1.48)$$

де

$$g = c_{55} n_1^2 + c_{44} n_2^2 + c_{33} n_3^2 - v_f^2, \quad M_2^2 = d_{13}^2 n_1^2 n_3^2 + d_{23}^2 n_2^2 n_3^2, \quad M_3^2 = M_2^2 + g^2. \quad (1.49)$$

Для двох векторів поляризації $\mathbf{e}_\alpha = (m_1, m_2, m_3)$ та $\mathbf{e}_\beta = (n_1, n_2, n_3)$ позначимо $\mathbf{K}_{\alpha,\beta}$ матрицю:

$$\mathbf{K}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} m_1 n_1 + c_{66} m_2 n_2 + c_{55} m_3 n_3 & d_{12} m_1 n_2 & d_{13} m_1 n_3 \\ d_{12} n_1 m_2 & c_{66} m_1 n_1 + c_{22} m_2 n_2 + c_{44} m_3 n_3 & d_{23} m_2 n_3 \\ d_{13} n_1 m_3 & d_{23} n_2 m_3 & c_{55} m_1 n_1 + c_{44} m_2 n_2 + c_{33} m_3 n_3 \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

У цих позначеннях параметричне рівняння еліпса внутрішньої рефракції має вигляд

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{p} \cos \varphi + \mathbf{q} \sin \varphi, \quad \varphi = 0 \dots 2\pi, \quad (1.51)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{K}_{S1, S1} + \mathbf{K}_{S2, S2}) \mathbf{n} / 2v_f^2, \quad \mathbf{p} = (\mathbf{K}_{S1, S1} - \mathbf{K}_{S2, S2}) \mathbf{n} / 2v_f^2, \\ \mathbf{q} &= (\mathbf{K}_{S1, S2} + \mathbf{K}_{S2, S1}) \mathbf{n} / 2v_f^2. \end{aligned} \quad (1.52)$$

З рівняння (1.51) випливає, що еліпс внутрішньої рефракції має півосі $\lambda_{1,2}$:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2 \pm \sqrt{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2)^2 - 4(\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2} \right). \quad (1.53)$$

Якщо $\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq 0$, то еліпс (1.51) невироджений і індекс Пуанкаре $S1$ - і $S2$ -хвиль у точці \mathbf{n} визначається за формулою [Shuvalov, 1998]

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}((\mathbf{e}_{S1} \times \mathbf{e}_{S2}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \operatorname{sgn}((\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}). \quad (1.54)$$

Для сингулярних точок, розташованих у площинах симетрії, можна, за формулами (1.48), (1.52) знайти компактні аналітичні вирази для \mathbf{p} , \mathbf{q} . Наприклад, для площини 13 справедливі формули

$$\mathbf{p} = \frac{-\Delta_{16} \Delta_{65} n_1^4 + \Delta_{34} \Delta_{45} n_3^4}{2n_1 n_3 (Q_{13} + Q_{31}) \sqrt{Z}} (-n_3, 0, n_1), \quad \mathbf{q} = \frac{n_1 d_{12} \sqrt{Q_{13}} - n_3 d_{23} \sqrt{Q_{31}}}{2Z \sqrt{Q_{13} + Q_{31}}} (0, 1, 0), \quad (1.55)$$

де

$$Q_{13} = -\Delta_{65} n_1^2 + \Delta_{34} n_3^2, \quad Q_{31} = \Delta_{16} n_1^2 - \Delta_{45} n_3^2, \quad Z = c_{66} n_1^2 + c_{44} n_3^2. \quad (1.56)$$

Тому для сингулярних точок у площині симетрії 13 індекс Пуанкаре обчислюється за формулою

$$m = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(-\Delta_{16} \Delta_{65} n_1^4 + \Delta_{34} \Delta_{45} n_3^4) \cdot \operatorname{sgn}(n_1 d_{12} \sqrt{Q_{13}} - n_3 d_{23} \sqrt{Q_{31}}). \quad (1.57)$$

Згідно з обчисленнями, для сингулярних точок поза площинами симетрії $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ пропорційно виразу $F\mathbf{n}$, де

$$F = (v_f^2 - c_{55})(v_f^2 - c_{66})n_1^2 + (v_f^2 - c_{44})(v_f^2 - c_{66})n_2^2 + (v_f^2 - c_{44})(v_f^2 - c_{55})n_3^2. \quad (1.58)$$

Оскільки, на кривій (1.35) $F=0$, то індекс Пуанкаре (1.54) на сингулярній кривій теж дорівнює нулю. Разом з тим, якщо скористатися формулами (1.31) та підставити значення f_{12} , f_{13} , f_{23} в одне з рівнянь (1.23), отримаємо вираз, що визначає сингулярну криву для виродженого орторомбічного середовища. Цей вираз також пропорційний F . Тому сингулярна крива (1.35) поділяє зображення ОРТ середовищ з позитивними та негативними індексами Пуанкаре.

Список літератури

- Роганов Ю., Стовас А., Роганов В. (2019). Свойства акустических осей в триклинных средах. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 3. С. 3—17. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i3.2019.172417>.
- Alshits, V.I., & Lothe, J. (1979). Elastic waves in triclinic crystals I, II, III. *Soviet physics, crystallography*, 24, 387—392, 393—398, 644—648.
- Alshits, V.I., & Shuvalov, A.L. (1984). Polarization fields of elastic waves near the acoustic axes. *Soviet physics, crystallography*, 29, 373—378.
- Alshits, V.I., Sarychev, A.V., & Shuvalov, A.L. (1985). Classification of degeneracies and analysis of their stability in the theory of elastic waves. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 89, 922—938.
- Boulanger, Ph., & Hayes, M. (1998). Acoustic axes for elastic waves in crystals. Theory and applications. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 454, 2323—2346. <https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0261>.
- Crampin, S. (1991). Effects of point singularities on shear-wave propagation in sedimentary basins: *Geophysical Journal International*, 107, 531—543. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb01413.x>.
- Darinskii, B.M. (1994). Acoustic axes in crystals. *Soviet physics, crystallography*, 39, 697—703.
- Fedorov, F.I. (1968). *Theory of Elastic Waves in Crystals*. New York: Plenum Press, 375 p.
- Holm, P. (1992). Generic elastic media. *Physica Scripta*, 44, 122—127. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/1992/T44/019>.
- Khatkevich A.G. (1962). The acoustic axis in crystals. *Soviet physics, crystallography*, 7, 601—604.
- Musgrave, M.J.P. (1985). Acoustic axes in orthorhombic media. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 401, 131—143. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0091>.
- Musgrave, M.J.P. (1981). On an elastodynamic classification of orthorhombic media: *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 374, 401—429. <https://doi.org/10.1098/rspa>.
- Norris, A.N. (2004). Acoustic axes in elasticity. *Wave Motion*, 40, 315—328. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.02.005>.
- Schoenberg, M., & Helbig, K. (1997). Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fracture deearth. *Geophysics*, 62, 1954—1974. <https://doi.org/10.1190/1.1444297>.

- Shuvalov, A.L. (1998). Topological features of the polarization fields of plane acoustic waves in anisotropic media. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 454, 2911—2947. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0286>.
- Shuvalov, A.L., & Every, A.G. (1997). Shape of the acoustic slowness surface of anisotropic solids near points of conical degeneracy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 101, 2381—2382. <https://doi.org/10.1121/1.418251>.
- Stovas, A., Roganov, Yu., & Roganov V. (2021). Wave characteristics in elliptical orthorhombic medium. *Geophysics*, 86, C89—C99. <https://doi.org/10.1190/GEO2020-0509.1>.
- Vavryčuk, V. (2005). Acoustic axes in triclinic anisotropy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118, 647—653. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1954587>.

Location of singular points in orthorhombic media

Yu. V. Roganov¹, A. Stovas², V. Yu. Roganov³, 2022

¹Tesseral Technologies Inc., Kyiv, Ukraine

²Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway

³V. M. Glushkov Institute of Cybernetic of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The dependence of the location of singular points of orthorhombic (ORT) media on the stiffness coefficients c_{ij} , $i, j = 1, \dots, 6$, and phase velocity v_f at the singularity point is studied under the assumption that c_{11}, c_{22}, c_{33} are larger than c_{44}, c_{55}, c_{66} and $c_{55} < c_{44} < c_{66}$. In this case, singular points appear only at the intersection of slowness surfaces of $S1$ - and $S2$ -waves. To simplify the presentation of the results, the values c_{ij} , $i = 1, \dots, 6$, are fixed and c_{ij} , $i < j$ changed within the limits at which the stiffness matrix remains positive definite. We define the parameters, $d_{12} = c_{12} + c_{66}$, $d_{13} = c_{13} + c_{55}$, $d_{23} = c_{23} + c_{44}$, which result in 0, 1, or 2 singular points in the symmetry planes of the ORT medium. The types of these singular points and their location on the unit circle are described. It is shown that, by selecting parameters d_{12}, d_{23} , any singular point in the symmetry plane 13 can be combined with the limiting position of the singularity point in-between the symmetry planes, or this point can be included in the singular curve of the degenerate ORT medium. We derive equations for the semi-axes of an ellipse of conical refraction, which is the image of a singular point from plane 13 in the group domain. Conditions for degeneration of the ellipse of conical refraction into a segment or a point are defined. It is shown that there exists only one ORT medium with a fixed phase velocity v_f of $S1$ - and $S2$ -waves in a given singular direction \mathbf{n} . If we present the ORT media as projections of these vectors \mathbf{n} onto the plane 12 and mark the value of the Poincaré index of the $S1$ - or $S2$ -wave at the point \mathbf{n} , we get 2 regions with indices $1/2$ and $-1/2$ separated by projection of the singular curve in the form of an ellipse or hyperbola. We compute equations for d_{12}, d_{13}, d_{23} of a degenerate ORT medium in terms of the values, c_{ij} , $i = 1, \dots, 6$, and velocity v_f of $S1$ -, $S2$ -waves on a singular curve. The singular curve is defined by the intersection of a unit sphere with an elliptic cone. It is proved that a degenerate ORT medium for $c_{11} = c_{22}, c_{44} = c_{55}$ or $c_{11} = c_{33}, c_{44} = c_{66}$ is, respectively, a transversally isotropic medium with a vertical or horizontal axis of symmetry. The results are illustrated in several examples.

Key words: singular point, phase velocity, polarization vector, Christoffel matrix, orthorhombic medium.

References

- Roganov, Yu., Stovas, A., & Roganov, V. (2019). Properties of acoustic axes in triclinic media. *Geophysical Journal*, 41(3), 3—17. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i3.2019.172417> (in Russian).
- Alshits, V.I., & Lothe, J. (1979). Elastic waves in triclinic crystals I, II, III. *Soviet physics, crystallography*, 24, 387—392, 393—398, 644—648.
- Alshits, V.I., & Shuvalov, A.L. (1984). Polarization fields of elastic waves near the acoustic axes. *Soviet physics, crystallography*, 29, 373—378.
- Alshits, V.I., Sarychev, A.V., & Shuvalov, A.L. (1985). Classification of degeneracies and analysis of their stability in the theory of elastic waves. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 89, 922—938.
- Boulanger, Ph., & Hayes, M. (1998). Acoustic axes for elastic waves in crystals. Theory and applications. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 454, 2323—2346. <https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0261>.
- Crampin, S. (1991). Effects of point singularities on shear-wave propagation in sedimentary basins: *Geophysical Journal International*, 107, 531—543. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb01413.x>.
- Darinskii, B.M. (1994). Acoustic axes in crystals. *Soviet physics, crystallography*, 39, 697—703.
- Fedorov, F.I. (1968). *Theory of Elastic Waves in Crystals*. New York: Plenum Press, 375 p.
- Holm, P. (1992). Generic elastic media. *Physica Scripta*, 44, 122—127. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/1992/T44/019>.
- Khatkevich A.G. (1962). The acoustic axis in crystals. *Soviet physics, crystallography*, 7, 601—604.
- Musgrave, M.J.P. (1985). Acoustic axes in orthorhombic media. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 401, 131—143. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0091>.
- Musgrave, M.J.P. (1981). On an elastodynamic classification of orthorhombic media: *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 374, 401—429. <https://doi.org/10.1098/rspa>.
- Norris, A.N. (2004). Acoustic axes in elasticity. *Wave Motion*, 40, 315—328. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.02.005>.
- Schoenberg, M., & Helbig, K. (1997). Orthorhombic media: Modeling elastic wave behavior in a vertically fracture dearth. *Geophysics*, 62, 1954—1974. <https://doi.org/10.1190/1.1444297>.
- Shuvalov, A.L. (1998). Topological features of the polarization fields of plane acoustic waves in anisotropic media. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 454, 2911—2947. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0286>.
- Shuvalov, A.L., & Every, A.G. (1997). Shape of the acoustic slowness surface of anisotropic solids near points of conical degeneracy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 101, 2381—2382. <https://doi.org/10.1121/1.418251>.
- Stovas, A., Roganov, Yu., & Roganov V. (2021). Wave characteristics in elliptical orthorhombic medium. *Geophysics*, 86, C89—C99. <https://doi.org/10.1190/GEO2020-0509.1>.
- Vavryčuk, V. (2005). Acoustic axes in triclinic anisotropy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 118, 647—653. <http://dx.doi.org/10.1121/1.1954587>.