

Метод найменших квадратів в оцінюванні точності проєкцій приземної температури повітря в Україні за ансамблями регіональних кліматичних моделей

*С.В. Краковська¹, Л.В. Паламарчук¹, Є.Л. Азаров², А.Ю. Чигарева¹,
Т.М. Шпиталь¹, 2022*

¹Український гідрометеорологічний інститут ДСНС України та НАН України, Київ, Україна

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Надійшла 25 липня 2022 р.

Дослідження присвячено пошуку оптимального методичного підходу для корекції відхилень від реальних кліматичних показників значень приземної температури повітря на території України, отриманих у прогнозах ансамблів регіональних кліматичних моделей (РКМ) на підставі використання регресійного аналізу, а саме методу найменших квадратів (МНК) з різними варіантами його застосування. Процедура включала: пошук вагових коефіцієнтів рівнянь лінійної регресії для мінімізації величини відхилення прогнозу від даних спостережень для кожної моделі та кожного вузла сітки 10 РКМ для двох кліматичних періодів 1961—1990 і 1991—2010; отримання на основі рівнянь зі встановленими коефіцієнтами усереднених похибок ансамблів моделей для різних варіантів застосування МНК; визначення меж застосування таких методичних підходів до формування оптимального ансамблю.

Серед усіх варіантів використання функцій-прогнозів виявлено, що найбільшу точність мав варіант застосування МНК до різниць (зсувів) значень між періодами, коли використовували щомісячні значення кліматичного показника. В цілому застосування щомісячних значень показало найкраще наближення модельних даних до фактичних, якими були дані з бази E-OBS.

Виявлено, що у визначений період наближення МНК суттєво краще за середнє, але перевага втрачається, якщо отримані вагові коефіцієнти використовувати для розрахунків на іншому періоді. В подальшому запропонований підхід можна модернізувати в напрямі детальнішої кластеризації у часі та просторі, що дасть можливість ще більше наблизити модельні дані до фактичних. Утім результати дослідження ставлять під сумнів доцільність застосування такого підходу до прогнозу кліматичних полів, оскільки вони не є стаціонарними і можуть значно трансформуватися з часом. У такому разі арифметичне осереднення та осереднення зсувів або дельта-метод залишаються оптимальним вибором формування прогностичного ансамблю РКМ.

Ключові слова: метод найменших квадратів, регіональна кліматична модель, оптимальний ансамбль моделей, корекція відхилень, дельта-метод, E-OBS.

Вступ. Сучасні дослідження зміни клімату великою мірою базуються на результатах розрахунків математичних моделей, які містять прогностичні рівняння для опису основних фізичних процесів у кліматичній системі. Залежно від просторового охоплення ці моделі поділяють на глобальні, які моделюють процеси планетарного масштабу, і регіональні, в яких зазвичай кроки у просторі та часі у разі менші, що дає змогу використовувати їх для багатьох прикладних завдань [Doblas-Reyes et al., 2021].

Водночас використання глобальних і регіональних кліматичних моделей потребує постійного удосконалення способів оцінювання точності прогностичних даних для отримання найбільш достовірних результатів. При використанні декількох моделей для про-

гнозування кліматичних параметрів у регіоні як мінімум необхідно сформувати алгоритми оцінок достовірності як за окремими моделями, так і за їхніми ансамблями [Краковская, 2018; Паламарчук, Краковська, 2018; Хохлов та ін., 2021; Collados-Lara et al., 2022]. У багатьох сучасних кліматичних дослідженнях аналізується точність прогнозування окремих моделей та їх ансамблів для однієї чи декількох середніх кліматичних характеристик, їх мінливості у часі та просторі, повторюваності та інтенсивності екстремальних значень метеопараметрів, а також окремих явищ чи утворень, наприклад баричних індексів, атмосферних фронтів та інше [Lehner et al., 2020; Doblás-Reyes et al., 2021]. Переважно така процедура виконується статистичним оцінюванням відхилень рядів модельних і спостережених даних [Пруссов, Сніжко, 2017]. Зауважимо, що такі оцінки результатів моделювання можуть бути частиною процедури верифікації, яку необхідно проводити перед початком використання результатів моделювання у дослідженнях. Верифікацію проводять як для величин, отриманих у вузлах сітки в конкретний момент часу, так і для осереднених за часом та/або площею [Паламарчук, Краковська, 2018].

Практика кліматологічного оцінювання показала більшу точність ансамблевих результатів, отриманих для прогнозування параметрів регіонального клімату, порівняно з окремими моделями [Kharin, Zwiers, 2002; Cornes et al., 2018; Краковская, 2018; Gutiérrez et al., 2019; Замфірова, Хохлов, 2020; Gutiérrez et al., 2021]. Тому в представленому дослідженні було застосовано саме ансамблевий підхід для оцінки кліматичного прогнозування.

Зазвичай за результатами моделювання з використанням регіональних кліматичних моделей (РКМ) можна сформувати різні ансамблі з різною кількістю моделей залежно від мети дослідження. Одним з головних критеріїв оптимальності ансамблю вважатимуться найближчі до реальних значень параметри ансамблевих даних [Паламарчук, Краковська, 2018].

У статті [Краковская, 2018] розглянуто близько десятка ансамблів з 14 РКМ, що сформовані різною кількістю моделей. Серед них визначався оптимальний ансамбль як набір не менш ніж трьох РКМ, при цьому його середньоквадратична похибка, порівняно з фактичними кліматичними даними, була близька до мінімальної з усіх протестованих ансамблів. Додатковими умовами виступали величини абсолютних і середньоквадратичних похибок річних та місячних значень. Таким чином, визначений оптимальний ансамбль складався з максимальної (10 РКМ) кількості моделей.

Інші підходи використання та корекції даних РКМ із застосуванням ансамблів представлені у публікації [Doblás-Reyes et al., 2021]. Ці підходи з корекції віхилень містять методи оцінювання точності кліматичних характеристик, отриманих з глобальних і регіональних кліматичних моделей, відносно аналогічних, отриманих за даними спостережень. Залежно від мети та завдань можна застосовувати коригування для однієї або декількох характеристик. Зокрема, для зменшення відхилень для декількох характеристик, наприклад, середньої температури повітря та кількості опадів, кращі результати отримано з використанням методу корекції квантильного мапування за рахунок балансування внеску похибок окремих показників у результуюче значення. Проте для одного кліматичного показника, наприклад, середньої добової температури повітря, отримано покращення результатів після використання всіх методів статистичного масштабування [Gutiérrez et al., 2019]. Методи отримання найкращого прогнозу включали регресійні моделі із застосуванням перехідних функцій, що визначалися методами машинного навчання та штучного інтелекту [Bano-Medina et al., 2020], та метод аналогів [Pierce et al., 2014], який показав дещо гірші результати для середньої добової температури повітря.

Основними залишаються такі методи коригування відхилень модельних значень: адитивні методи, коли дані моделі коригують додаванням константи; перемасштабування, коли дані моделі коригують множенням на коефіцієнт; і більш гнучкий підхід із квантильним мапуванням, коли коригують різні діапазони розподілу величини окремо. Також для багаторічних середніх досить часто застосовується дельта-метод, коли дані проєкцій модифікуються відповідно до змін, отриманих на основі моделювання, у майбутні відносно минулого базового періода. За таким методом розрахунків проєкцій цей підхід, що визначається просторово-часовими залежностями та структурою вхідних полів елементів у базовий період, обмежений у застосуванні для отримання проєкцій у сценаріях із значними змінами стану кліматичної системи [Maraun, 2016].

Зауважимо, що у публікації [Doblas-Reyes et al., 2021] описано переважно методи оцінювання похибок окремих моделей, а також зазначено, що ансамблі кліматичних моделей відіграють важливу роль у кількісному оцінюванні достовірності результатів моделювання, оскільки разом з наданням інформації про часову мінливість величини в окремих моделях і про достовірний інтервал модельних оцінок ансамблі можна застосовувати, щоб оцінити ступінь достовірності сценаріїв з визначеним відсотком імовірності. Загалом щодо формування ансамблів для регіональних кліматичних прогнозів у цій публікації впевнено зроблено висновок про те, що ансамблі слід формувати таким чином, щоб моделі, які нереалістично відтворюють процеси, релевантні для поставленої мети, були відкинуті, але водночас проєкції обраного ансамблю мають охоплювати відповідний діапазон достовірності сценарію.

Незважаючи на значний прогрес і розвиток методів формування ансамблів із кліматичних моделей, нині не встановлено стандартизовану процедуру визначення оптимального ансамблю. Тому пошук нових способів вирішення цієї проблеми залишається досі актуальним.

Мета цього дослідження — оцінювання точності ансамблевого моделювання відносно фактичних даних у визначених періодах і пошук оптимального методичного підходу для прогнозування кліматичного показника шляхом застосування методу найменших квадратів на прикладі приземної температури повітря для території України.

Ставилося завдання розробити процедуру корекції відхилень від реальних кліматичних показників значень приземної температури повітря, отриманих у прогнозах ансамблів з усіх наявних РКМ на основі використання регресійного аналізу, а саме методу найменших квадратів (МНК) з різними варіантами його застосування. На цій основі було оцінено точність кожного з варіантів застосування МНК та проаналізовано можливість застосування цих варіантів на території України для прогнозування температури повітря. Процедура складалась із: пошуку коефіцієнтів рівнянь лінійної регресії для мінімізації величини відхилення прогнозу від даних спостережень для кожної моделі та кожного вузла сітки РКМ за різних початкових умов; отримання на основі рівнянь з встановленими коефіцієнтами оцінок точності ансамблів моделей для різних варіантів застосування МНК; визначення меж застосування таких методичних підходів до формування оптимального ансамблю.

Надалі розроблені та оцінені методичні підходи використовували як для деталізованих у просторі та часі сценаріїв зміни клімату загалом в Україні, так і для визначення окремих кліматичних показників у регіонах [Паламарчук, Краковська, 2018; Краковська та ін., 2018, 2019; Краковська, Шпиталь, 2018].

Вихідні дані. Для оцінювання результатів моделювання використано дані бази E-OBS, які сформовані щоденними метеорологічними спостереженнями для Європи [Comes et al., 2018], і прогностичні дані 10 РКМ багаторічної середньої температури повітря за

два періоди: 1961—1990 та 1991—2010 рр. [Краковская, 2018]. Зауважимо, що дані бази E-OBS попередньо були верифіковані в межах території України для періодів, розглянутих у статті [Шедеменко та ін., 2012].

На основі даних щоденних спостережень E-OBS розраховувалися кліматичні показники температурного режиму: середні багаторічні місячні та річна температури повітря для території України у вузлах сітки. Аналогічні кліматичні прогностичні показники було отримано з урахуванням щоденних даних РКМ. У цьому дослідженні використовувалися результати 10 РКМ, ансамбль з яких у статті [Краковская, 2018] був визначений як оптимальний. Для всіх наборів даних використовували розрахункову сітку з просторовим розділенням $0,25^{\circ} \times 0,25^{\circ}$.

Як було зазначено, перед проведенням будь-якого аналізу розрахунків РКМ на майбутні періоди необхідно проводити верифікацію модельних результатів реальними спостереженнями в минулі періоди для того, щоб переконатися, що обрані РКМ та їх ансамблі здатні достовірно відтворювати кліматичні умови в заданому регіоні. Для верифікації використовується статистична оцінка двох рядів кліматичних даних: ансамблевих модельних значень РКМ і даних з бази E-OBS. За результатами верифікації можна оцінити точність прогнозування окремими РКМ та їх ансамблями, щоб визначити оптимальний варіант для належного відтворення кліматичних параметрів, що аналізуються.

У табл. 1 показано середні похибки за досліджувані періоди для окремих РКМ та ансамблю моделей, створеного на їх основі. Ансамблеві дані отримували як осереднені за набором із 10 моделей. Так, значення модуля різниці середнього арифметичного багаторічної середньої температури повітря змінюються від 0,83 до 3,51 °C у період 1961—1990 рр., від 0,78 до 2,85 °C — у період 1991—2010 рр. Мінімальні середні квадратичні відхилення отримано для РКМ RM5.1 (Aladin), як і у випадку різниць середнього арифметичного значення, максимальні — для RACMO2, за винятком другого періоду. З ана-

Т а б л и ц я 1 . Модулі середніх і середніх квадратичних відхилень модельних значень багаторічних температур повітря (°C) від даних E-OBS за періоди 1961—1990 та 1991—2010 рр.

| Регіональні кліматичні моделі | | Середнє відхилення | | Середнє квадратичне | |
|-------------------------------|----------------|--------------------|-----------|---------------------|-----------|
| Назва РКМ | Позначення РКМ | 1961—1990 | 1991—2010 | 1961—1990 | 1991—2010 |
| REMO | f_1 | 0,90 | 0,86 | 1,16 | 1,09 |
| RCA3-E | f_2 | 1,35 | 1,32 | 1,57 | 1,56 |
| RegCM3 | f_3 | 1,72 | 1,62 | 1,92 | 1,89 |
| RACMO2 | f_4 | 3,51 | 2,85 | 3,79 | 3,15 |
| RM5.1 (Aladin) | f_5 | 0,86 | 0,78 | 1,08 | 0,96 |
| HadRM3Q0 | f_6 | 1,49 | 1,32 | 1,81 | 1,72 |
| CLM | f_7 | 1,55 | 1,90 | 1,90 | 2,31 |
| RCA3-H | f_8 | 1,70 | 0,83 | 2,29 | 0,97 |
| RCA3-B | f_9 | 1,29 | 1,46 | 1,54 | 1,89 |
| HIRHAM | f_{10} | 1,47 | 2,70 | 1,85 | 3,31 |
| Ансамбль з 10 РКМ | | 0,83 | 0,66 | 1,08 | 0,86 |

лізу даних табл. 1 бачимо, що відхилення ансамблевих показників для обох періодів є меншими, ніж у кожній окремої моделі. Найближчими до показників ансамблевого середнього виявилися результати RM5.1 (Aladin) і REMO. Зауважимо, що є випадки, коли модель (РКМ RСАЗ-Н) показує різну точність моделювання для різних кліматичних періодів, що необхідно враховувати при виборі оптимального ансамблю.

У представленому дослідженні використані змодельовані та верифіковані дані, які розглянуто як звичайні функції $(f_1, f_2, \dots, f_{10})$, аргументом яких є координати у часі (рік, місяць) та просторі (обрана сітка), а значенням — відповідна величина приземної температури повітря. Тоді прогнозом буде функція з тими ж аргументами, а її значення буде коригуватися на основі мінімізації відхилень від фактичних значень, якими виступатимуть дані E-OBS.

Далі розглянемо алгоритм побудови лінійних функцій-прогнозів та їх комбінацій на основі отриманих результатів моделювання, а також способи оцінювання та вибору такого комплексу розрахункових даних, який буде оптимально наближати функцію-прогноз до реальних показників.

Методика досліджень. Теоретичне обґрунтування мінімізації похибок ансамблів РКМ. Для вдосконалення методів формування оптимальних ансамблів з комбінацій РКМ сформулюємо основні підходи та введемо низку позначень, необхідних для побудови алгоритмів оцінювання результатів прогнозів.

Нехай множина A — це точки площини, а множина $T = [t_1; t_2]$ — відрізок часу, що відповідає періоду досліджень. Будемо називати прогнозом функцію $f: A \times T \rightarrow \mathbb{R}$, задану на декартовому добутку множин A і T зі значеннями в множині дійсних чисел.

Розглянемо в середньоквадратичній метриці відстань між прогнозами f та фактичними значеннями g :

$$\rho_2(f, g) = \sqrt{\int_{A \times T} (f(x, t) - g(x, t))^2 dt dx}.$$

Позначимо функцію

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \rho_2(g, \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n).$$

Для визначення оптимальної функції M застосуємо наступну лему.

Нехай f, f_1, f_2, \dots, f_n функції прогнозів. Тоді серед лінійних комбінацій

$$f \alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

існує єдиний найкращий прогноз наближення в середньоквадратичній метриці до фактичних значень. Інакше кажучи, існує набір коефіцієнтів $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$, для якого

$$M(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*) \leq M(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Для визначення коефіцієнтів α_i^* скористаємося відомим положенням: глобальний мінімум функції $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ буде досягатися при такому ж аргументі, що і у квадрата цієї функції:

$$\begin{aligned} M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2 &= \int_{A \times T} (f - (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n))^2 = \\ &= \int_{A \times T} (f^2 - 2 \sum \alpha_i f_i f + \sum_{i \neq j} 2 \alpha_i \alpha_j f_i f_j + \sum \alpha_i^2 f_i^2)^2 = \int_{A \times T} f^2 - 2 \sum \alpha_i \int_{A \times T} f_i f + \sum_{i \neq j} 2 \alpha_i \alpha_j \int_{A \times T} f_i f_j + \\ &+ \sum \alpha_i^2 \int_{A \times T} f_i^2 = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Щоб функція набувала найменше $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значення, необхідно, щоб усі її частинні похідні набували значення 0, тому що ця функція визначена на всьому просторі аргументів:

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)'_{\alpha_i} = 2 \sum \alpha_j \int_{A \times T} f_i f_j - 2 \int_{A \times T} f_i f = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Покладемо $c_{i,j} = \int_{A \times T} f_i f_j$, $c_i = \int_{A \times T} f_i f$ і скоротимо всі рівняння на 2, тоді отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} c_{1,1} \alpha_1 + c_{1,2} \alpha_2 + \dots + c_{1,n} \alpha_n = c_1, \\ \dots \\ c_{i,1} \alpha_1 + c_{i,2} \alpha_2 + \dots + c_{i,n} \alpha_n = c_i, \\ \dots \\ c_{n,1} \alpha_1 + c_{n,2} \alpha_2 + \dots + c_{n,n} \alpha_n = c_n. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язок такої системи можна знайти, використовуючи метод Гауса, поступово заміною змінних, або метод Крамера, який дає змогу встановити явне значення коефіцієнтів через визначники відповідних матриць [Прусов, Сніжко, 2017]:

$$\alpha_i^* = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,i-1} & c_1 & c_{1,i+1} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \dots & c_{2,i-1} & c_2 & c_{2,i+1} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,i-1} & c_{n-1} & c_{n-1,i+1} & \dots & c_{n-1,n} \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,i-1} & c_n & c_{n,i+1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Отримані коефіцієнти дають змогу записати функцію для розрахунку оптимального наближення комбінацій функцій (прогнозів) до кліматичних даних E-OBS:

$$f \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^* = \alpha_1^* f_1 + \dots + \alpha_n^* f_n, \quad \alpha_i^* \in \mathbb{R}.$$

Найкраще наближення до даних E-OBS визначатиметься за найменшою середньо-квадратичною відстанню прогнозу ансамблю РКМ.

Зауважимо, що у розглянутому випадку функції прогнозів (результати РКМ) — це функції, визначені на скінченній множині $A \times T$, де множина A — вузли розрахункової сітки для розділення $0,25^\circ$ території України (у розглянутому випадку кількість вузлів 1161), а $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{12}\}$ — місяці року. Тому, щоб визначити значення інтегралів у рівнянні (1) та в інших, будемо вважати, що інтегрування проводиться за дискретною мірою, що дорівнює одиниці у кожній точці $A \times T$. Тоді для довільної функції f інтеграл можна записати як звичайну суму:

$$\int_{A \times T} f(x, t) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 1161, \\ 1 \leq j \leq 12}} f(x_i, t_j).$$

Варіанти застосування методу найменших квадратів. У проведеному дослідженні використовувалися різні варіанти застосування методу найменших квадратів. Загалом функції-прогнози f для ансамблю 10 РКМ з табл. 1 мають вигляд

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{10} f_{10} + \text{const} = g.$$

Власне, пошук вагових коефіцієнтів $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ рівнянь лінійної регресії для кожної з 10 РКМ є однією з важливих процедур розв'язання поставленої у дослідженні задачі.

Уведемо позначення та опишемо алгоритм розрахунків вагових коефіцієнтів для різних варіантів застосування методу найменших квадратів.

Очевидно, що для ансамблю моделей, який є арифметичним осередненням десяти прогнозів РКМ (S_p), вагові коефіцієнти кожного прогнозу дорівнюватимуть 0,1, а $\text{const} = 0$.

Наступним варіантом застосування МНК є рівняння лінійної регресії з вільним членом, коли немає умови для вагових коефіцієнтів і $\text{const} \neq 0$. Такі прогнози позначатимемо як МНК1 і МНК2 для періодів 1961—1990 та 1991—2010 рр. відповідно.

Коефіцієнти прогнозу МНК1 і МНК2 отримано за допомогою методу найменших квадратів за моделями $f_1; f_2; \dots, f_{10}$ з табл. 1, з одинадцятьою функцією g — за фактичними даними. Коефіцієнти прогнозу МНК1М і МНК2М визначаються так само, як і для МНК1 і МНК2, але вони розраховуються для кожного місяця окремо у відповідні періоди.

Ще одним варіантом застосування методу найменших квадратів була умова рівності суми вагових коефіцієнтів 1, тобто

$$\begin{aligned} f\alpha_1, \dots, \alpha_n &= \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= 1, \alpha_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для розрахунку коефіцієнтів потрібно мінімізувати число:

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2 = \int_{A \times T} (f - (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n))^2. \quad (4)$$

Для зручності введемо нові позначення: $r_i = f_n - f_i, 1 \leq i \leq n-1; r_n = f_n - f; k_{i,j} = \int_{A \times T} r_i r_j$. Тоді рівняння (4) можна записати аналогічно до (1) як

$$\begin{aligned} M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2 &= \int_{A \times T} (\alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_{n-1} r_{n-1} - r_n)^2 = \sum_{i,j \leq n-1} 2\alpha_i \alpha_j \int_{A \times T} r_i r_j + \\ &+ \sum_{i \leq n-1} \alpha_i^2 \int_{A \times T} r_i^2 - 2\sum_{i \leq n-1} \alpha_i \int_{A \times T} r_n r_i + \int_{A \times T} r_n^2 = \sum_{i,j \leq n-1} 2\alpha_i \alpha_j k_{i,j} + \sum_{i \leq n-1} \alpha_i^2 k_{i,i} - \\ &- 2\sum_{i \leq n-1} \alpha_i k_{n,i} + k_{n,n} = S(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Щоб ця функція набувала найменшого значення, потрібно, щоб усі її частинні похідні набували значення 0, бо ця функція визначена по всьому простору аргументів:

$$S(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})'_{\alpha_i} = 2\sum_j \alpha_j k_{i,j} - 2k_{n,i} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Здійснивши ряд перетворень, отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} k_{1,1}\alpha_1 + k_{1,2}\alpha_2 + \dots + k_{1,n-1}\alpha_{n-1} = k_{n,1}, \\ \dots \\ k_{i,1}\alpha_1 + k_{i,2}\alpha_2 + \dots + k_{i,n-1}\alpha_{n-1} = k_{n,i}, \\ \dots \\ k_{n-1,1}\alpha_1 + k_{n-1,2}\alpha_2 + \dots + k_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} = k_{n,n-1}. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи можна знайти методом Гауса поступовою заміною змінних або методом Крамера аналогічно виразам (2, 3). Отримані коефіцієнти $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{n-1}^*, \alpha_n^* \in \mathbb{R}$ дають змогу записати функцію вигляду

$$f_{S_{mnk}} = \alpha_1^* f_1 + \dots + \alpha_{n-1}^* f_{n-1} + \left(1 - \alpha_1^* - \alpha_2^* - \dots - \alpha_{n-1}^*\right) f_n,$$

яку можна використати для визначення мінімальної середньоквадратичної відстані між прогнозними даними ансамблів РКМ і фактичними.

Уведемо позначення для цього варіанта із сумою вагових коефіцієнтів, що дорівнює одиниці, як СМНК1 і СМНК2 для обох періодів, а СМНК1М і СМНК2М — для варіанта розрахунків для кожного місяця та періоду відповідно.

Одним з поширених і широко застосовуваних методів корекції похибок моделей є так званий дельта-метод (див., наприклад: [Паламарчук, Краковська, 2018]). У цьому разі визначають різниці значень модельних кліматичних показників між періодами, які фактично відображатимуть зміну кліматичного показника у часі та які можна розглядати як його прогнозні значення. Власне кажучи, можна застосувати наведені варіанти мінімізації похибок ансамблів РКМ не до значень показників, а до їх різниць, які надалі будемо називати зсувами.

Розглянемо зсуви значень показників РКМ з першого періоду на другий:

$$s_i(x, t) = f_i^{(2)}(x, t) - f_i^{(1)}(x, t), \quad i \in 1, 2, \dots, 10,$$

де $f_i^{(2)}$ — відповідний прогноз, визначений за даними другого періоду, а $f_i^{(1)}$ — першого.

Позначимо оптимальне наближення до фактичних даних другого періоду серед прогнозів як

$$S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = f^{(1)} + \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

де $f^{(1)}$ — це фактичні дані за перший період. Тоді відхилення значення величини в другому періоді можна записати у вигляді

$$f^{(2)} - S_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \left(f^{(2)} - f^{(1)}\right) - (\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n),$$

Очевидно, що для пошуку вагових коефіцієнтів цього рівняння можна застосувати ті самі варіанти методу найменших квадратів, які описані вище. Прогноз такого вигляду позначимо Зс (зсув, або дельта-метод), тобто СрЗс позначатиме середнє арифметичне зсувів. Зауважимо, що до зсувів (різниць значень у другому і першому періодах) річних значень застосовували МНК із сумою коефіцієнтів, що дорівнює одиниці, і такий варіант позначали СМНКЗс. Результати застосування МНК з вільним членом у рівнянні регресії для зсувів окремо для кожного місяця відповідно позначили МНКЗсМ.

Отримані результати і їх обговорення. Визначені та описані варіанти застосування МНК до корекції даних ансамблю 10 РКМ дали змогу отримати набори відповідних вагових коефіцієнтів і оцінити точність відкоригованих значень. Отже, для рівнянь лінійної регресії з однаковими вхідними даними були отримані вагові коефіцієнти для різних варіантів застосування МНК, з їх використанням розраховано значення відповідної функції-прогнозу для кожного вузла сітки. Відповідно до мети роботи розрахунки були спрямовані на мінімізацію відстані між модельними та фактичними даними. Серед осереднених у часі (місяць/рік) та по території наборів функцій-прогнозів доцільно провести ранжування і визначити оптимальний варіант застосування МНК для подальшого його використання в дослідженнях.

Точність визначених функцій-прогнозів оцінювали через розрахунок і статистичну оцінку відхилень отриманих значень та відповідних фактичних кліматичних показників

за місяцями та за рік. У табл. 2 і 3 наведено середні арифметичні, а у додатку 1 — середньоквадратичні похибки розрахованих функцій-прогнозів відносно даних E-OBS, що є фактичними кліматичними даними річних і місячних значень у відповідні періоди.

Зазначимо, що отримані дані крім основи для оцінювання точності моделювання можна розглядати як попередні прогнози. Так, різниці значень функцій-прогнозу температури повітря у вузлах сітки в базовий (минулий) період та наступний період можна розглядати як прогноз зміни кліматичного показника, а результат осереднення прогнозних даних за всіма вузлами розрахункової сітки — як регіональний прогноз кліматичного показника або використовувати як міру успішності інших регіональних прогнозів.

У табл. 2 і 3 усереднені за площею похибки прогнозів розташовані за принципом зростання величин різниць річних значень зліва направо. Прогнози для середнього арифметичного з 10 РКМ (Ср, СрЗс) розраховано з ваговими коефіцієнтами 0,1 як для річних, так і для місячних значень. Річні значення інших прогнозів розраховано з використанням вагових коефіцієнтів, які наведено у табл. 4, в обидва періоди та із застосуванням зсувів на другий період. Розраховані вагові коефіцієнти рівнянь регресії щомісячних значень 10 РКМ для МНК та СМНК для обох періодів наведено в додатку 2. Похибки значень температури повітря в окремі місяці, які наведено в табл. 2 і 3 у стовпчиках без літери «М» в кінці, отримували, використовуючи коефіцієнти з табл. 4, тобто однакові для всіх місяців. Зауважимо, що це робилося як теоретичний експеримент з метою оцінювання можливості заощадження часу на розрахунки щомісячних коефіцієнтів. Проте порівнявши дані, наприклад МНК1 і МНК1М (див. табл. 2), бачимо, що похибки зростають більш ніж удвічі.

Вищу точність отримано для варіантів застосування МНК із щомісячними ваговими коефіцієнтами для періоду розрахунків (див. табл. 2, 3). Також для застосування цього варіанта МНК отримано відносну рівність відхилень упродовж року, що свідчить про успішність відтворення річного ходу температури повітря без значних штучних стрибків

Т а б л и ц я 2 . Усереднені похибки прогнозів для середніх річних і середніх місячних значень приземної температури повітря (°С) у період 1961—1990 рр. для різних варіантів використання МНК

| Період/ Варіанти | МНК1М | СМНК1М | МНК1 | СМНК1 | Ср | СМНК2М | МНК2 | МНК2М | СМНК2 |
|---------------------|-------|--------|------|-------|------|--------|------|-------|-------|
| Рік | 0,16 | 0,19 | 0,56 | 0,60 | 0,75 | 0,95 | 1,05 | 1,07 | 1,07 |
| 1 | 0,19 | 0,25 | 0,86 | 1,00 | 1,34 | 2,30 | 1,23 | 2,02 | 1,30 |
| 2 | 0,20 | 0,21 | 0,57 | 0,56 | 0,81 | 1,58 | 0,51 | 1,53 | 0,57 |
| 3 | 0,18 | 0,22 | 0,65 | 0,68 | 0,57 | 0,47 | 0,66 | 0,40 | 0,51 |
| 4 | 0,18 | 0,25 | 0,33 | 0,36 | 1,16 | 0,34 | 1,40 | 0,36 | 1,32 |
| 5 | 0,17 | 0,18 | 0,77 | 0,84 | 1,16 | 0,28 | 0,64 | 0,24 | 0,63 |
| 6 | 0,15 | 0,17 | 0,31 | 0,48 | 0,26 | 0,66 | 1,02 | 0,23 | 0,98 |
| 7 | 0,14 | 0,16 | 0,72 | 0,82 | 1,33 | 2,82 | 3,06 | 2,43 | 3,18 |
| 8 | 0,14 | 0,14 | 0,35 | 0,37 | 0,88 | 0,70 | 2,21 | 2,98 | 2,53 |
| 9 | 0,11 | 0,12 | 0,49 | 0,46 | 0,28 | 0,27 | 0,57 | 0,34 | 0,76 |
| 10 | 0,15 | 0,19 | 0,64 | 0,54 | 0,60 | 0,92 | 0,77 | 0,58 | 0,53 |
| 11 | 0,14 | 0,14 | 0,30 | 0,29 | 0,33 | 0,60 | 0,29 | 1,02 | 0,24 |
| 12 | 0,17 | 0,19 | 0,77 | 0,76 | 0,28 | 0,52 | 0,28 | 0,68 | 0,28 |

Т а б л и ц я 3 . Усереднені похибки прогнозів для середніх річних і середніх місячних значень приземної температури повітря (°C) у період 1991 – 2010 рр. для різних варіантів використання МНК

| Період / Варіанти | МНК3сМ | МНК2М | СМНК2М | СМНК3с | МНК2 | СМНК2 | МНК1 | Ср | Ср3с | СМНК1 | МНК1М | СМНК1М |
|-------------------|--------|-------|--------|--------|------|-------|------|------|------|-------|-------|--------|
| Рік | 0,11 | 0,16 | 0,18 | 0,35 | 0,40 | 0,41 | 0,54 | 0,58 | 0,59 | 0,77 | 1,05 | 1,24 |
| 1 | 0,14 | 0,17 | 0,19 | 0,68 | 0,43 | 0,45 | 0,68 | 0,73 | 0,90 | 0,86 | 1,99 | 2,76 |
| 2 | 0,12 | 0,16 | 0,17 | 0,35 | 0,45 | 0,42 | 0,74 | 0,70 | 0,38 | 0,80 | 0,80 | 1,28 |
| 3 | 0,13 | 0,15 | 0,20 | 0,26 | 0,69 | 0,72 | 0,77 | 0,51 | 0,21 | 0,47 | 2,29 | 1,98 |
| 4 | 0,11 | 0,20 | 0,23 | 0,40 | 0,52 | 0,48 | 0,41 | 1,16 | 0,21 | 0,82 | 1,24 | 1,60 |
| 5 | 0,11 | 0,17 | 0,20 | 0,34 | 0,41 | 0,57 | 0,46 | 1,05 | 0,30 | 0,98 | 0,26 | 0,73 |
| 6 | 0,10 | 0,14 | 0,18 | 0,35 | 0,33 | 0,32 | 0,42 | 0,36 | 0,21 | 0,85 | 0,24 | 0,26 |
| 7 | 0,11 | 0,14 | 0,18 | 0,30 | 0,43 | 0,51 | 0,45 | 0,31 | 1,39 | 0,90 | 1,25 | 1,17 |
| 8 | 0,10 | 0,14 | 0,17 | 0,39 | 0,46 | 0,44 | 0,75 | 0,47 | 1,17 | 1,43 | 0,52 | 0,40 |
| 9 | 0,10 | 0,12 | 0,13 | 0,31 | 0,18 | 0,19 | 0,34 | 0,29 | 0,48 | 0,46 | 0,15 | 0,40 |
| 10 | 0,09 | 0,13 | 0,14 | 0,25 | 0,22 | 0,24 | 0,40 | 0,23 | 0,64 | 0,39 | 0,58 | 2,05 |
| 11 | 0,08 | 0,18 | 0,18 | 0,24 | 0,40 | 0,37 | 0,56 | 0,47 | 0,44 | 0,64 | 1,86 | 1,26 |
| 12 | 0,08 | 0,20 | 0,22 | 0,30 | 0,25 | 0,27 | 0,46 | 0,68 | 0,72 | 0,60 | 1,36 | 1,02 |

значень, що не відповідало б фактичному клімату. Так, у перший період для прогнозу МНК1М (див. табл. 2) і у другий період для МНК2М (див. табл. 3) отримано однакові похибки 0,16 °C за рік і близькі за значеннями для окремих місяців в межах 0,11—0,20 °C. Також для цього варіанта розрахунків маємо близькі між періодами та одні з найнижчих значення середньоквадратичних похибок (див. додаток 1), тобто отримані показники вказують на високу точність результатів і пріоритетність застосування даного варіанта МНК. До того ж, якщо врахувати, що цей підхід дає змогу оптимізувати і різниці значень як для всієї просторової сітки, так і по місяцях, його можна розглядати як один з

Т а б л и ц я 4 . Значення коефіцієнтів і констант рівнянь регресій для ансамблю з 10 РКМ у розрахунках річних значень приземної температури повітря для вказаних варіантів МНК

| Метод | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 | α_9 | α_{10} | const |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|-------|
| МНК1 | -0,02 | 0,71 | -0,11 | 0,21 | 0,07 | -0,01 | -0,07 | -0,07 | 0,15 | 0,23 | -1,3 |
| МНК2 | 0,03 | 0,10 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0 | 0,36 | -0,11 | 0,04 | 0 | -0,45 |
| СМНК1 | 0 | 0,40 | -0,39 | 0,58 | 0,06 | -0,09 | 0,14 | 0,22 | -0,13 | 0,19 | — |
| СМНК2 | 0,14 | -0,06 | -0,01 | 0,37 | 0,22 | -0,01 | 0,44 | 0 | 0 | -0,09 | — |
| СМНК3с | 0,52 | 0,86 | -0,59 | -0,53 | 0,49 | 0,07 | -0,05 | -0,1 | 0,07 | 0,27 | — |

можливих підходів для проведення гомогенізації кліматичних полів. Для варіантів розрахунків щомісячних рівнянь вагові коефіцієнти наведено в додатку 2.

Для розрахунків у другому періоді крім стандартних підходів використано і дельта-метод, або метод зсувів. Для цього варіанта використання МНК було отримано вагові коефіцієнти, наведені у табл. 5.

Зауважимо, що в табл. 4, 5 та в додатку 2 наведено вагові коефіцієнти, значення яких не можна розглядати як міру успішності окремих моделей в ансамблі. Деякі з коефіцієнтів навіть набувають нульових значень, але це не вказує на найнижчу точність цих окремих моделей, а є результатом розв'язання системи лінійних рівнянь для мінімізації похибки всього ансамблю РКМ.

З усіх застосованих підходів найкращі результати отримано саме для варіанта МНКЗсМ, для якого і відхилення були мінімальними (0,11 °С за рік), і отриманий розподіл за місяцями був рівномірним і в межах 0,08—0,14 °С. Отже, застосування такого підходу дало змогу максимально наблизити дані ансамблю РКМ до фактичних даних E-OBS. Інакше кажучи, отримані результати підтвердили перевагу використання дельта-методу для підвищення точності модельних прогнозів.

З табл. 2 і 3 бачимо, що найменш успішним було використання вагових коефіцієнтів, отриманих на даних іншого періоду. Так, у першому періоді точність усіх варіантів МНК2 (МНК2, СМНК2, МНК2М і СМНК2М) виявилась нижчою за ансамбль, отриманий як арифметичне середнє (Ср). Аналогічно для другого періоду всі варіанти МНК1 з використанням коефіцієнтів, отриманих для першого періоду, мали найменшу точність. Таке зменшення точності результатів прогнозів, очевидно, свідчить про те, що використання коефіцієнтів, отриманих в один період, для іншого не має сенсу, і достовірнішими будуть результати ансамблю з осередненням.

Також нижчу точність було отримано для варіантів застосування МНК із сумою коефіцієнтів, яка дорівнює одиниці, для обох періодів (СМНК1, СМНК2), що підтверджує недоцільність використання такого підходу в майбутньому.

Таблиця 5. Значення коефіцієнтів та вільного члена рівнянь регресій для окремих місяців та 10 РКМ, отриманих для варіанта МНКЗсМ для періоду 1991—2010 рр.

| Місяць | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 | α_9 | α_{10} | const |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|-------|
| 1 | 0,70 | 0,59 | -1,11 | -0,31 | 0,82 | -0,33 | 0,24 | -0,08 | -0,13 | 0,12 | 1,29 |
| 2 | -0,60 | 0,07 | 0,35 | 0,19 | 0,33 | 0,61 | -0,09 | -0,02 | 0,05 | 0,70 | -0,65 |
| 3 | 0,25 | -0,44 | -0,44 | 0,13 | 0,81 | 0,52 | 0,03 | 0,11 | 0,08 | 0,55 | -0,38 |
| 4 | 0,23 | -0,50 | 0,46 | 0,37 | 0,11 | -0,04 | 0,03 | -0,07 | 0,07 | 0,31 | -0,44 |
| 5 | 0,14 | -1,18 | -0,39 | -0,50 | 0,10 | 0,07 | 0,03 | 0,03 | -0,01 | -0,35 | 0,85 |
| 6 | 0,43 | -0,23 | 0,04 | -0,03 | -0,02 | -0,09 | 0,05 | -0,06 | 0,01 | 0,59 | 0,11 |
| 7 | -0,40 | 0,06 | -0,44 | -0,38 | 0,03 | 0,10 | 0,14 | 0,05 | 0,04 | -0,35 | 1,85 |
| 8 | 0,31 | -0,72 | -1,14 | 0,70 | 0,02 | -0,01 | 0,09 | -0,01 | 0 | -0,05 | 1,89 |
| 9 | 0,17 | -0 | 0,52 | 0,21 | -0,24 | -0,28 | 0,06 | 0,18 | -0,04 | -0,19 | 0,26 |
| 10 | 0,35 | -0,07 | 0,08 | 0,67 | 0,12 | -0,27 | -0,11 | -0,00 | 0,01 | -0,22 | -0,59 |
| 11 | 0,10 | -0,00 | 0,02 | -0,20 | 0,57 | -0,04 | 0,01 | -0,02 | -0,04 | 0,26 | -0,25 |
| 12 | 0,06 | -0,19 | 0,11 | 0,02 | -0,09 | -0,04 | 0,09 | 0,02 | -0,08 | -0,24 | 0,19 |

Якщо врахувати, що традиційним методом формування ансамблю є осереднення даних моделювання окремих РКМ, то отримані в даному дослідженні оцінки точності варіантів, що базувалися на осередненні (Ср, СрЗс), свідчать про те, що їх точність менша за інші МНК, але знаходиться в межах $0,6\text{—}0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ за рік і менша за $1,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ для окремих місяців, що розглядається як задовільний результат у більшості досліджень.

Незважаючи на те, що використання розглянутих варіантів МНК, а саме МНКЗсМ, мало вищу точність, такий підхід ґрунтується на використанні фактичних даних, що неможливо реалізувати для майбутніх періодів. У такому разі використання осереднення є оптимальним вибором методу формування ансамблю.

Зауважимо, що отримання оцінок забезпечувалося даними РКМ попереднього покоління з проєкту ENSEMBLES [Vander Linden, Mitchell, 2009]. Втім описані методичні підходи застосування МНК і використання функцій прогнозів для наближення результатів моделювання до реальних даних є цінними, оскільки підтверджують висновки про переваги використання ансамблів РКМ, сформованих осередненням даних моделей, а також показують можливості їх оптимізації. Очевидно, що самі методичні підходи можуть бути застосовані і до ансамблів, сформованих з РКМ, що мають розділення $0,1 \times 0,1^{\circ}$, наприклад для проєкту EuroCORDEX, дані якого на сьогодні широко використовуються в оцінках зміни клімату в Європі і Україні [Замфірова, Хохлов, 2020, Хохлов та ін., 2021; Gutiérrez et al., 2021; Osypov et al., 2021].

Висновки. На основі розглянутих сучасних підходів до оцінювання точності кліматичного моделювання підтверджено раніше отримані висновки про перевагу застосування ансамблевого підходу порівняно з використанням даних окремих моделей. У дослідженні не ставилася мета визначення однієї найкращої моделі, а швидше за все оцінювання різних способів наближення результатів ансамблевого моделювання до фактичних значень на основі використання регресійного аналізу, а саме методу найменших квадратів.

Запропоновано алгоритм оцінювання точності та мінімізації похибок ансамблевих даних моделювання РКМ приземної температури повітря на території України на основі МНК, який автоматизовано і реалізовано у вигляді комп'ютерних програм. Для різних варіантів застосування МНК розраховано вагові коефіцієнти і оцінено точність результуючих значень ансамблів РКМ для двох кліматичних періодів 1961—1990 і 1991—2010 рр.

Серед усіх варіантів використання функцій-прогнозів найбільшу точність мав варіант застосування МНК до різниць (зсувів) значень між періодами, коли використовували щомісячні значення. Загалом застосування щомісячних значень показало найкраще наближення модельних даних до фактичних, якими виступали дані з бази E-OBS. Встановлено перевагу застосування МНК з вільним членом і дійсними значеннями вагових коефіцієнтів над варіантом, коли їх сума дорівнювала одиниці.

Виявлено, що у визначений період наближення МНК суттєво краще за середнє, але перевага втрачається, якщо отримані вагові коефіцієнти використовувати для розрахунків на іншому періоді. Тому в дослідженні встановлено, що оптимальним методом формування прогностичного ансамблю РКМ буде осереднення.

Надалі запропонований підхід можна модернізувати в напрямі детальнішої кластеризації у часі та просторі, що дасть змогу ще більше наблизити модельні дані до фактичних, але отримані в дослідженні результати ставлять під сумнів доцільність застосування такого підходу до прогнозу кліматичних полів, оскільки вони не стаціонарні і можуть значно трансформуватися з часом. У такому разі арифметичне осереднення та осереднення зсувів або дельта-метод залишаються оптимальним вибором для формування ансамблів РКМ.

Подяка. Автори вдячні виконавцям проєктів ENSEMBLES, ECA&D та укладачам бази E-OBS за вільний доступ до даних, що використані в цьому дослідженні. Ми щиро дякуємо Збройним Силам України, волонтерам та всім, хто боронить і допомагає у боротьбі проти російської агресії, без самовідданості яких написання цієї статті було б неможливим. Ми вдячні Тарасу Тимошкевичу за плідне обговорення від ідеї до результатів дослідження.

Додаток 1

Т а б л и ц я Д.1.1. Середньоквадратичні похибки прогнозів указаних варіантів застосування МНК для періоду 1961 – 1990 рр.

| Період/ Варіанти | МНК1М | СМНК1М | МНК1 | СМНК1 | Ср | СМНК2М | МНК2 | МНК2М | СМНК2 |
|---------------------|-------|--------|------|-------|------|--------|------|-------|-------|
| Рік | 0,23 | 0,27 | 0,73 | 0,77 | 0,93 | 1,30 | 1,38 | 1,44 | 1,45 |
| 1 | 0,30 | 0,39 | 1,08 | 1,20 | 1,44 | 2,38 | 1,30 | 1,36 | 2,11 |
| 2 | 0,29 | 0,30 | 0,77 | 0,81 | 0,97 | 1,65 | 0,64 | 0,69 | 1,61 |
| 3 | 0,24 | 0,30 | 0,83 | 0,89 | 0,75 | 0,58 | 0,80 | 0,64 | 0,51 |
| 4 | 0,25 | 0,32 | 0,42 | 0,45 | 1,25 | 0,43 | 1,50 | 1,40 | 0,45 |
| 5 | 0,23 | 0,24 | 0,90 | 0,98 | 1,23 | 0,34 | 0,72 | 0,73 | 0,30 |
| 6 | 0,19 | 0,22 | 0,42 | 0,58 | 0,32 | 0,72 | 1,13 | 1,09 | 0,29 |
| 7 | 0,19 | 0,22 | 0,81 | 0,87 | 1,37 | 2,85 | 3,09 | 3,22 | 2,45 |
| 8 | 0,19 | 0,20 | 0,51 | 0,50 | 0,94 | 0,76 | 2,25 | 2,57 | 3,00 |
| 9 | 0,17 | 0,19 | 0,55 | 0,51 | 0,32 | 0,36 | 0,64 | 0,82 | 0,40 |
| 10 | 0,22 | 0,30 | 0,74 | 0,64 | 0,67 | 0,97 | 0,70 | 0,60 | 0,64 |
| 11 | 0,22 | 0,23 | 0,49 | 0,48 | 0,42 | 0,73 | 0,49 | 0,39 | 1,09 |
| 12 | 0,25 | 0,27 | 0,92 | 0,89 | 0,39 | 0,59 | 0,39 | 0,42 | 0,78 |

Т а б л и ц я Д.1.2. Середньоквадратичні похибки прогнозів указаних варіантів застосування МНК для періоду 1991 – 2010 рр.

| Період/ Варіанти | МНК3сМ | МНК2М | СМНК2М | МНК3с | МНК2 | СМНК2 | Ср | Ср3с | СМНК1 | МНК1М | МНК1 | СМНК1М |
|---------------------|--------|-------|--------|-------|------|-------|------|------|-------|-------|------|--------|
| Рік | 0,15 | 0,22 | 0,26 | 0,44 | 0,53 | 0,55 | 0,72 | 0,75 | 0,78 | 0,93 | 1,33 | 1,53 |
| 1 | 0,19 | 0,27 | 0,28 | 0,74 | 0,56 | 0,60 | 0,95 | 1,02 | 1,02 | 1,06 | 2,05 | 2,87 |
| 2 | 0,16 | 0,21 | 0,25 | 0,43 | 0,62 | 0,58 | 1,02 | 0,43 | 0,99 | 0,97 | 0,92 | 1,48 |
| 3 | 0,17 | 0,22 | 0,27 | 0,33 | 0,78 | 0,80 | 0,91 | 0,28 | 0,66 | 0,58 | 2,44 | 2,16 |
| 4 | 0,15 | 0,28 | 0,31 | 0,51 | 0,61 | 0,58 | 0,49 | 0,29 | 1,26 | 0,90 | 1,34 | 1,67 |
| 5 | 0,14 | 0,23 | 0,26 | 0,42 | 0,47 | 0,62 | 0,56 | 0,34 | 1,10 | 1,04 | 0,33 | 0,84 |
| 6 | 0,15 | 0,19 | 0,23 | 0,44 | 0,44 | 0,43 | 0,54 | 0,29 | 0,45 | 0,95 | 0,35 | 0,41 |
| 7 | 0,16 | 0,20 | 0,26 | 0,36 | 0,60 | 0,67 | 0,54 | 1,42 | 0,41 | 1,00 | 1,28 | 1,22 |
| 8 | 0,17 | 0,21 | 0,26 | 0,46 | 0,55 | 0,54 | 0,85 | 1,22 | 0,55 | 1,57 | 0,65 | 0,51 |
| 9 | 0,14 | 0,19 | 0,20 | 0,41 | 0,28 | 0,29 | 0,50 | 0,51 | 0,38 | 0,54 | 0,22 | 0,48 |
| 10 | 0,13 | 0,20 | 0,22 | 0,32 | 0,33 | 0,35 | 0,60 | 0,66 | 0,34 | 0,50 | 0,68 | 2,11 |
| 11 | 0,11 | 0,26 | 0,27 | 0,30 | 0,53 | 0,50 | 0,76 | 0,53 | 0,62 | 0,77 | 1,90 | 1,31 |
| 12 | 0,11 | 0,27 | 0,30 | 0,36 | 0,35 | 0,40 | 0,69 | 0,82 | 0,88 | 0,77 | 1,46 | 1,12 |

Таблиця Д.2.1. Значення коефіцієнтів та вільного члена рівнянь регресій для окремих місяців та 10 РКМ, отриманих для варіанта МНК1М, період 1961 – 1990 рр.

| Мі-сяць | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 | α_9 | α_{10} | const |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|-------|
| 1 | -0,05 | 0,1 | 0,14 | 0,95 | -0,1 | 0,12 | 0 | -0,11 | -0,04 | -0,06 | -2,8 |
| 2 | 0,07 | 0,04 | 0,28 | 1 | -0,22 | 0,15 | 0,01 | 0,15 | -0,39 | -0,19 | -0,75 |
| 3 | -0,15 | 0,17 | -0,11 | 1,18 | -0,16 | -0,23 | 0,68 | -0,34 | 0 | -0,26 | -0,69 |
| 4 | 0,22 | -0,37 | 0,72 | 0,02 | -0,18 | -0,41 | 0,55 | -0,05 | 0,55 | -0,39 | 2,8 |
| 5 | -0,08 | 0,03 | 0,38 | -0,48 | -0,17 | 0,12 | 0,42 | 0,12 | 0,38 | 0,14 | 3,31 |
| 6 | -0,11 | 0,07 | 0,47 | -0,13 | 0,27 | 0 | 0,17 | 0,35 | -0,28 | 0,09 | 3,12 |
| 7 | -0,27 | 0,12 | 0,4 | -0,04 | 0,31 | 0,25 | 0,12 | -0,05 | 0,08 | -0,06 | 1,1 |
| 8 | -0,24 | 0 | 0,16 | 0,3 | 0,17 | 0,13 | 0,01 | 0,38 | -0,08 | 0,1 | 1,3 |
| 9 | 0,05 | -0,17 | 0,15 | 0,23 | -0,02 | 0,14 | 0,27 | 0,2 | 0 | 0,01 | 1,98 |
| 10 | 0,26 | -0,17 | 0,38 | 0,17 | -0,13 | 0,12 | 0,34 | 0,35 | -0,59 | 0,03 | 3,79 |
| 11 | 0,07 | 0,03 | 0,47 | 0,24 | -0,16 | 0,33 | 0,21 | 0,13 | -0,29 | -0,16 | 0,37 |
| 12 | 0,1 | -0,11 | 0,5 | 0,07 | -0,19 | 0,03 | 0,04 | -0,18 | 0,37 | 0,24 | -1,31 |

Таблиця Д.2.2. Значення коефіцієнтів та вільного члена рівнянь регресій для окремих місяців та 10 РКМ, отриманих для варіант МНК2М, період 1991 – 2010 рр.

| Місяць | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 | α_9 | α_{10} | const |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|-------|
| 1 | -0,11 | 0,05 | 0,56 | 0,42 | -0,09 | -0,19 | 0,04 | 0,2 | -0,1 | 0 | -1,41 |
| 2 | -0,04 | 0,38 | 0,68 | 0,41 | -0,12 | -0,23 | -0,01 | 0,07 | -0,33 | 0 | -0,71 |
| 3 | 0,07 | -0,07 | 0,8 | 0,3 | -0,05 | -0,13 | 0,1 | -0,15 | -0,09 | 0 | 0,03 |
| 4 | 0 | 0,65 | 0,59 | 0,19 | 0,11 | -0,09 | -0,28 | -0,48 | 0,13 | 0 | 0,5 |
| 5 | 0,25 | 0,01 | 0,43 | -0,35 | -0,28 | 0,22 | 0,49 | 0,08 | 0,1 | 0 | 2,13 |
| 6 | 0,14 | -0,1 | 0,58 | -0,32 | 0,26 | 0,11 | 0,1 | 0,01 | 0,04 | 0 | 3,82 |
| 7 | 0 | -0,35 | 0,58 | -0,1 | 0,23 | 0,03 | 0,34 | 0,03 | 0,11 | 0 | 3,13 |
| 8 | 0,04 | -0,51 | 0,62 | 0,04 | 0,02 | 0,03 | 0,48 | 0,08 | 0 | 0 | 5,35 |
| 9 | -0,01 | -0,26 | 0,31 | 0,17 | -0,02 | 0,09 | 0,47 | 0,15 | 0,07 | 0 | 1 |
| 10 | 0,05 | -0,13 | 0,43 | -0,09 | -0,08 | 0,27 | 0,21 | 0,21 | 0,05 | 0 | 1,54 |
| 11 | -0,03 | -0,15 | 0,49 | 0,62 | -0,02 | 0,35 | -0,26 | -0,37 | 0,27 | 0 | -0,3 |
| 12 | -0,04 | 0,11 | 0,5 | 0,4 | -0,26 | -0,14 | 0,13 | 0,16 | 0,04 | 0 | -1,37 |

Т а б л и ц я Д.2.3. Значення коефіцієнтів рівнянь регресій з умовою, що їх сума дорівнює одиниці, для окремих місяців та 10 РКМ, отриманих для варіанта СМНК1М, період 1961 – 1990 рр.

| Мі-сяць | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 | α_9 | α_{10} |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| 1 | -0,06 | -0,17 | -0,26 | 0,89 | 0,16 | 0,33 | 0,65 | 0,16 | -0,34 | -0,37 |
| 2 | 0,02 | -0,02 | 0,51 | 1,22 | -0,17 | 0,14 | -0,06 | 0,35 | -0,69 | -0,29 |
| 3 | -0,42 | -0,22 | 0,01 | 1,64 | 0,16 | -0,01 | 0,78 | -0,15 | -0,22 | -0,57 |
| 4 | -0,01 | 0,31 | 0,24 | 0,01 | -0,03 | -0,17 | 0,61 | -0,11 | 0,43 | -0,27 |
| 5 | -0,21 | 0,12 | 0,23 | -0,4 | -0,23 | 0,22 | 0,26 | -0,18 | 1,16 | 0,03 |
| 6 | -0,1 | 0,14 | 0,25 | -0,22 | 0,15 | 0,12 | 0,16 | 0,23 | 0,16 | 0,12 |
| 7 | -0,28 | 0,51 | 0,33 | 0,04 | 0,17 | 0,11 | 0,07 | 0,18 | -0,1 | -0,03 |
| 8 | -0,35 | 0,2 | 0,18 | 0,32 | 0,27 | 0,15 | 0,01 | 0,30 | -0,13 | 0,04 |
| 9 | -0,06 | -0,14 | 0,1 | 0,31 | 0,1 | 0,41 | 0,23 | 0,41 | -0,15 | -0,22 |
| 10 | 0,4 | -0,15 | 0,34 | 0,07 | -0,02 | 0,09 | -0,25 | 0,13 | 0,56 | -0,16 |
| 11 | 0 | 0,09 | 0,61 | 0,18 | -0,14 | 0,36 | 0,03 | 0,13 | -0,13 | -0,13 |
| 12 | 0 | -0,18 | 0,78 | 0,11 | -0,10 | 0,09 | -0,22 | 0,25 | 0,06 | 0,21 |

Т а б л и ц я Д.2.4. Значення коефіцієнтів рівнянь регресій з умовою, що їх сума дорівнює одиниці, для окремих місяців та 10 РКМ, отриманих для варіанта СМНК2М, період 1991 – 2010 рр.

| Мі-сяць | α_1 | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 | α_7 | α_8 | α_9 | α_{10} |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------|
| 1 | -0,25 | 0,17 | 0,81 | 0,18 | 0,09 | -0,26 | 0,33 | 0 | -0,29 | 0,21 |
| 2 | -0,17 | 0,29 | 0,87 | 0,38 | 0,05 | -0,30 | 0,24 | 0 | -0,37 | 0,01 |
| 3 | -0,11 | -0,08 | 0,55 | 0,65 | 0,13 | 0,02 | 0,25 | 0 | -0,23 | -0,19 |
| 4 | -0,39 | 1,14 | 0,23 | 0,23 | 0,12 | -0,12 | 0,33 | 0 | -0,34 | -0,21 |
| 5 | 0,23 | -0,18 | 0,38 | -0,11 | -0,13 | 0,39 | 0,44 | 0 | 0,42 | -0,43 |
| 6 | 0,19 | -0,08 | 0,39 | -0,31 | 0,14 | 0,19 | 0,38 | 0 | 0,17 | -0,06 |
| 7 | 0,01 | -0,28 | 0,72 | -0,34 | 0,16 | 0,13 | 0,41 | 0 | 0,26 | -0,07 |
| 8 | -0,18 | 0,05 | 0,51 | 0,06 | 0,30 | 0,18 | 0,08 | 0 | 0,09 | -0,10 |
| 9 | -0,01 | -0,34 | 0,29 | 0,25 | 0,07 | 0,12 | 0,42 | 0 | 0,15 | 0,06 |
| 10 | 0,04 | -0,19 | 0,38 | 0,00 | -0,07 | 0,38 | 0,27 | 0 | 0,28 | -0,10 |
| 11 | -0,13 | -0,06 | 0,55 | 0,63 | 0,01 | 0,33 | -0,15 | 0 | 0,21 | -0,39 |
| 12 | -0,07 | 0,16 | 0,61 | 0,10 | -0,09 | -0,08 | 0,34 | 0 | -0,13 | 0,17 |

Список літератури

- Замфірова М.С., Хохлов В.М. Режим температури повітря та опадів в Україні в 2021—2050 роках за даними ансамблю моделей CORDEX. *Укр. гідрометеоролог. журн.* 2020. № 25. С. 17—27. <https://doi.org/10.31481/uhmj.25.2020.02>.
- Краковская С.В. Оптимальный ансамбль региональных климатических моделей для оценки изменений температурного режима в Украине. *Природопользование.* 2018. Вып. 1. С. 114—126.
- Краковська С.В., Паламарчук Л.В., Гнатюк Н.В., Шпиталь Т.М. Проекції приземної температури та відносної вологості повітря в областях України до середини ХХІ ст. за даними ансамблів регіональних кліматичних моделей. *Геоінформатика.* 2018. № 3(67). С. 62—77.
- Краковська С.В., Паламарчук Л.В., Шпиталь Т.М. Кліматичні проєкції опалювального періоду в Україні до середини ХХІ сторіччя. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 6. С. 144—164. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i6.2019.190072>.
- Краковська С.В., Шпиталь Т.М. Дати переходу температури повітря через 0, 5, 10 і 15 °С і тривалість відповідних кліматичних сезонів з другої половини ХХ до середини ХХІ ст. в Україні. *Геоінформатика.* 2018. № 4(68). С. 74—92.
- Паламарчук Л.В., Краковська С.В. Регіональні зміни клімату України: Методичні вказівки до навчального курсу для студентів географічного факультету спеціальності «Метеорологія та кліматологія». Київ: ДП Прінт-Сервіс, 2018. 90 с.
- Прусов В.А., Сніжко С.І. *Методи прикладного системного аналізу в гідрометеорології: підручник.* Київ: Прінт Сервіс, 2017. 701 с.
- Хохлов В.М., Серга Е.М., Недострелова Л.В. Об'єктивний вибір симуляції з ансамблю регіональних кліматичних моделей *Укр. гідрометеоролог. журн.* 2021. № 28. С. 29—36. <https://doi.org/10.31481/uhmj.28.2021.03>.
- Шедеменко І.П., Краковська С.В., Гнатюк Н.В. Верифікація даних Європейської бази E-OBS щодо приземної температури та кількості опадів у адміністративних областях України. *Наук. праці УкрНДГМІ.* 2012. № 262. С. 71—90.
- Baño-Medina, J., Manzanaras, R., & Gutiérrez, J.M. (2020). Configuration and intercomparison of deep learning neural models for statistical downscaling. *Geoscientific Model Development*, 13(4), 2109—2124. <https://doi.org/10.5194/gmd-13-2109-2020>.
- Collados-Lara, A.-J., Gómez-Gómez, J.-D., Pulido-Velazquez, D., & Pardo-Igúzquiza, E. (2022). An approach to identify the best climate models for the assessment of climate change impacts on meteorological and hydrological droughts. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 599—616. <https://doi.org/10.5194/nhess-22-599-2022>.
- Cornes, R., van der Schrier, G., van den Besselaar, E.J.M., & Jones, P.D. (2018). An Ensemble Version of the E-OBS Temperature and Precipitation Datasets. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 123(17), 9391—9409. <https://doi.org/10.1029/2017JD028200>.
- Doblas-Reyes, F.J., Sörensson, A.A., Almazroui, M., Dosio, A., Gutowski, W.J., Haarsma, R., Hamdi, R., Hewitson, B., Kwon, W.-T., Lamptey, B.L., Maraun, D., Stephenson, T.S., Takayabu, I., Terray, L., Turner, A., & Zuo, Z. (2021). Linking Global to Regional Climate Change. In *Climate Change. The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of*

the Intergovernmental Panel on Climate Change (pp. 1363—1512). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009157896.012>.

Gutiérrez, J.M., Maraun, D., Widmann, M., Huth, R., Hertig, E., Benestad, R., Roessler, O., Wibig, J., Wilcke, R., Kotlarski, S., San Martí, D., Herrera, S., Bedia, J., Casanuev, A., Manzanas, R., Iturbide, M., Vrac, M., Dubrovsky, M., Ribalaygua, J., Pórtolos, J., Rätty, O., Räisänen, J., Hingray, B., Raynaud, D., Casado, M.J., Ramos, P., Zerenner, T., Turco, M., Bosshard, T., Štěpánek, P., Bartholy, J., Pongracz, R., Keller, D.E., Fischer, A.M., Cardoso, R.M., Soares, P.M.M., Czernecki, B., & Pagé, C. (2019). An intercomparison of a large ensemble of statistical down scaling methods over Europe: Results from the VALUE perfect predictor cross-validation experiment. *International Journal of Climatology*, 39(9), 3750—3785. <https://doi.org/10.1002/joc.5462>.

Gutiérrez, J.M., Jones, R.G., Narisma, G.T., Alves, L.M., Amjad, M., Gorodetskaya, I.V., Grose, M., Klutse, N.A.B., Krakovska, S., Li, J., Martínez-Castro, D., Mearns, L.O., Mernild, S.H., Ngo-Duc, T., van den Hurk, B., & Yoon, J.-H. (2021). Atlas. In *Climate Change. The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (pp. 1927—2058). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009157896.021>.

Kharin, V.V., & Zwiers, F.W. (2002). Climate Predictions with Multimodel Ensembles. *Journal of Climate*, (15), 793—799. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(2002\)015<0793:CPWME>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(2002)015<0793:CPWME>2.0.CO;2).

Lehner, F., Deser, C., Maher, N., Marotzke, J., Fischer, E. M., Brunner, L., Knutti, R., & Hawkins, E. (2020). Partitioning climate projection uncertainty with multiple large ensembles and CMIP5/6. *Earth System Dynamics*, (11), 491—508. <https://doi.org/10.5194/esd-11-491-2020>.

Maraun, D. (2016). Bias Correcting Climate Change Simulations — a Critical Review. *Current Climate Change Reports*, 2(4), 211—220. <https://doi.org/10.1007/s40641-016-0050-x>.

Osyrov, V., Speka, O., Chyhareva, A., Osadcha, N., Krakovska, S., & Osadchyi, V. (2021). Water resources of the Desna river basin under future climate. *Journal of Water and Climate Change*, 12(7), 3355—3372. <https://doi.org/10.2166/wcc.2021.034>.

Pierce, D.W., Cayan D.R., & Thrasher B.L. (2014). Statistical Downscaling Using Localized Constructed Analogs (LOCA). *Journal of Hydrometeorology*, 15(6), 2558—2585. <https://doi.org/10.1175/jhm-d-14-0082.1>.

Van der Linden, P., & Mitchell, J.F.B. (2009). ENSEMBLES: Climate Change and its Impacts: Summary of research and results from the ENSEMBLES project. Met Office Hadley Centre, Fitz Roy Road, Exeter EX1 3PB, UK. 160 p. Retrieved from https://ensembles-eu.metoffice.gov.uk/docs/Ensembles_final_report_Nov09.pdf.

The least squares method in estimating the accuracy of surface air temperature projections based on ensembles of regional climate models

S. V. Krakovska¹, L. V. Palamarchuk¹, Ye. L. Azarov², A. Yu. Chyhareva¹,
T. M. Shpytal¹, 2022

¹Ukrainian Hydrometeorological Institute of the State Emergency Service of Ukraine and the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

The study is devoted to the search for the optimal methodical approach for bias correction of surface air temperature from real climatic indicators for the territory of Ukraine, obtained in the projections of ensembles of regional climate models (RCM) based on the use of regression analysis, namely the least squares method (LSM) with various options of its application. The procedure included: searching for weight coefficients of linear regression equations to minimize the deviation of the forecast from the observations for each model and each grid node of the 10 RCM for two climatic periods 1961—1990 and 1991—2010; obtaining, on the basis of equations with established coefficients, the averaged errors of ensembles of models for various variants of LSM application; and determining the limits of the application of such methodical approaches to the formation of an optimal ensemble.

Among all options for using forecasting functions, it was found that the most accurate was the option of applying LSM to differences (shifts) in values between periods when one uses monthly values of the climate indicator. In general, the use of monthly values showed the best approximation of the model data to the observation data used from the E-OBS database.

It was found that in a certain period the approximation of the LSM is significantly better than the average, but the advantage is lost if the obtained weighting factors are used in another period. For further use, the proposed approach can be modernized in the direction of more detailed clustering in time and space, which will allow adjusting the model data even closer to the observed ones. However, our results make us doubt the feasibility of applying such an approach to the forecast of climate fields, since they are not stationary and can significantly transform over time. In this case, arithmetic averaging and averaging of shifts or the delta method remain the optimal choice for forming a prognostic ensemble of RCM.

Key words: least squares method, regional climate model, optimal ensemble of models, bias correction, delta method, E-OBS.

References

- Zamfirova, M.S., & Khokhlov, V.M. (2020). Air temperature and precipitation regime in Ukraine in 2021—2050 by CORDEX model ensemble. *Ukrainian Hydrometeorological Journal*, (25), 17—27. <https://doi.org/10.31481/uhmj.25.2020.02> (in Ukrainian).
- Krakovska, S.V. (2018). Optimal ensemble of regional climate models for the assessment of temperature regime change in Ukraine. *Prirodopolzovaniye*, (1), 114—126 (in Russian).
- Krakovska, S.V., Palamarchuk, L.V., Gnatiuk, N.V., Shpytal, T.M. (2018). Projections of air temperature and relative humidity in Ukraine regions to the middle of the 21st century based on regional climate model ensembles. *Geoinformatika*, (3), 62—77 (in Ukrainian).

- Krakovska, S.V., Palamarchuk, L.V., & Shpytal, T.M. (2019). Climatic projections of heating season in Ukraine up to the middle of the 21st century. *Geofizicheskiy Zhurnal*, 41(6), 144—164. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i6.2019.190072> (in Ukrainian).
- Krakovska, S.V., & Shpytal, T.M. (2018). Dates of air temperature transition over 0, 5, 10 and 15 °C and corresponding lengths of climatic seasons from the second part of the 20th to the middle of the 21st century in Ukraine. *Geoinformatika*, (4), 74—92 (in Ukrainian).
- Palamarchuk, L.V., & Krakovska, S.V. (2018). *Regional Climate Changes in Ukraine: Guidelines for the training course for students of the Faculty of Geography, specialty «Meteorology and Climatology»*. Kyiv: DP Print-Servis, 90 p. (in Ukrainian).
- Prusov, V.A., & Snizhko, S.I. (2017). *Methods of applied systematic analysis in hydrometeorology: textbook*. Kyiv: Print-Servis, 701 p. (in Ukrainian).
- Khokhlov, V., Serga, E., & Nedostrelova, L. (2021). Objective selection of model run from regional climate models ensemble. *Ukrainian Hydrometeorological Journal*, (28), 29—36. <https://doi.org/10.31481/uhmj.28.2021.03> (in Ukrainian).
- Shedemenko, I.P., Krakovska, S.V., & Gnatiuk, N.V. (2012). Verification of surface temperature and precipitation from European gridded dataset E-OBS for administrative regions in Ukraine. *Naukovi pratsi UkrNDHMI*, (262), 71—90 (in Ukrainian).
- Baño-Medina, J., Manzanar, R., & Gutiérrez, J.M. (2020). Configuration and intercomparison of deep learning neural models for statistical downscaling. *Geoscientific Model Development*, 13(4), 2109—2124. <https://doi.org/10.5194/gmd-13-2109-2020>.
- Collados-Lara, A.-J., Gómez-Gómez, J.-D., Pulido-Velazquez, D., & Pardo-Igúzquiza, E. (2022). An approach to identify the best climate models for the assessment of climate change impacts on meteorological and hydrological droughts. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 599—616. <https://doi.org/10.5194/nhess-22-599-2022>.
- Cornes, R., van der Schrier, G., van den Besselaar, E.J.M., & Jones, P.D. (2018). An Ensemble Version of the E-OBS Temperature and Precipitation Datasets. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 123(17), 9391—9409. <https://doi.org/10.1029/2017JD028200>.
- Doblas-Reyes, F.J., Sörensson, A.A., Almazroui, M., Dosio, A., Gutowski, W.J., Haarsma, R., Hamdi, R., Hewitson, B., Kwon, W.-T., Lamptey, B.L., Maraun, D., Stephenson, T.S., Takayabu, I., Terray, L., Turner, A., & Zuo, Z. (2021). Linking Global to Regional Climate Change. In *Climate Change. The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (pp. 1363—1512). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009157896.012>.
- Gutiérrez, J.M., Maraun, D., Widmann, M., Huth, R., Hertig, E., Benestad, R., Roessler, O., Wibig, J., Wilcke, R., Kotlarski, S., San Martí, D., Herrera, S., Bedia, J., Casanuev, A., Manzanar, R., Iturbide, M., Vrac, M., Dubrovsky, M., Ribalaygua, J., Pórtolos, J., Rätty, O., Räisänen, J., Hingray, B., Raynaud, D., Casado, M.J., Ramos, P., Zerenner, T., Turco, M., Bosshard, T., Štěpánek, P., Bartholy, J., Pongracz, R., Keller, D.E., Fischer, A.M., Cardoso, R.M., Soares, P.M.M., Czernacki, B., & Pagé, C. (2019). An intercomparison of a large ensemble of statistical downscaling methods over Europe: Results from the VALUE perfect predictor cross-validation experiment. *International Journal of Climatology*, 39(9), 3750—3785. <https://doi.org/10.1002/joc.5462>.
- Gutiérrez, J.M., Jones, R.G., Narisma, G.T., Alves, L.M., Amjad, M., Gorodetskaya, I.V., Grose, M., Klutse, N.A.B., Krakovska, S., Li, J., Martínez-Castro, D., Mearns, L.O., Mernild, S.H., Ngo-Duc, T., van den Hurk, B., & Yoon, J.-H. (2021). Atlas. In *Climate Change. The Physical Science*

Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (pp. 1927—2058). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781009157896.021>.

Khariin, V.V., & Zwiers, F.W. (2002). Climate Predictions with Multimodel Ensembles. *Journal of Climate*, (15), 793—799. [https://doi.org/10.1175/1520-0442\(2002\)015<0793:CPWME>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0442(2002)015<0793:CPWME>2.0.CO;2).

Lehner, F., Deser, C., Maher, N., Marotzke, J., Fischer, E. M., Brunner, L., Knutti, R., & Hawkins, E. (2020). Partitioning climate projection uncertainty with multiple large ensembles and CMIP5/6. *Earth System Dynamics*, (11), 491—508. <https://doi.org/10.5194/esd-11-491-2020>.

Maraun, D. (2016). Bias Correcting Climate Change Simulations — a Critical Review. *Current Climate Change Reports*, 2(4), 211—220. <https://doi.org/10.1007/s40641-016-0050-x>.

Osyrov, V., Speka, O., Chyhareva, A., Osadcha, N., Krakovska, S., & Osadchy, V. (2021). Water resources of the Desna river basin under future climate. *Journal of Water and Climate Change*, 12(7), 3355—3372. <https://doi.org/10.2166/wcc.2021.034>.

Pierce, D.W., Cayan D.R., & Thrasher B.L. (2014). Statistical Downscaling Using Localized Constructed Analogs (LOCA). *Journal of Hydrometeorology*, 15(6), 2558—2585. <https://doi.org/10.1175/jhm-d-14-0082.1>.

Van der Linden, P., & Mitchell, J.F.B. (2009). ENSEMBLES: Climate Change and its Impacts: Summary of research and results from the ENSEMBLES project. Met Office Hadley Centre, Fitz Roy Road, Exeter EX1 3PB, UK. 160 p. Retrieved from https://ensembles-eu.metoffice.gov.uk/docs/Ensembles_final_report_Nov09.pdf.