

## Распространение волн в периодических жидкотвердых слоистых средах

© Ю. В.Роганов<sup>1</sup>, В. Ю. Роганов<sup>2</sup>, 2016

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Киев, Украина

<sup>2</sup>Институт кибернетики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 25 августа 2016 г.

Представлено членом редколлегии Ю. К. Тяпкиным

Выведено дисперсійне рівняння для хвиль Флоке, що поширюються в бінарному горизонтально-шаруватому рідкотвердому середовищі. Дисперсійне рівняння представлено добутком чотирьох множників, що дає змогу пояснити розбиття області параметрів (частота, горизонтальна повільність) на зони проходження і поглинання. Показано, що перехід цих множників у нуль відповідає хвилям Флоке з горизонтальною груповою швидкістю. Розглянуто властивості хвиль, що поширюються горизонтально. Отримано формули для відношень компонент векторів поляризації і амплітуд парціальних хвиль. Теорію проілюстровано на одному прикладі.

**Ключові слова:** періодичне рідкотверде середовище, дисперсійне рівняння, хвиля Флоке, крива повільності, індикатриса швидкостей.

**Введение.** Распространению волн в периодических упругих твердых горизонтально-слоистых средах посвящено много работ [Бреховских, 1973; Сибирияков и др., 1980; Braga, Herrmann, 1992; Chicone, 1999; Roganov, Stovas, 2012]. Большой интерес представляют среды с периодическим повторением жидких и твердых слоев, поскольку они являются моделями пород с трещинами, насыщенными жидкостью. Если жидкость является идеальной, т. е. с нулевой вязкостью, то при распространении волны на границах между жидкими и твердыми слоями возникают разрывы касательных компонент скоростей смещений, а касательные компоненты напряжений равны нулю. Это приводит к специфическим свойствам волновых полей в таких композитах. Например, наличие двух в среднем продольных волн, распространяющихся вдоль слоев (двух симметричных мод), и присутствие большой анизотропии даже при сколь угодно малой мощности жидких слоев. Следует отметить, что в случае слоистых сред с твердыми слоями, если устремить мощности некоторых слоев к нулю, их влияние на распространяющиеся волны прекращается.

В дальнейшем рассматривается только случай, когда жидкость, заполняющая слои, является идеальной, а границы слоев расположены горизонтально.

В статье [Рыгов, 1956] приведены дисперсионные соотношения для плоских волн, распространяющихся в периодических жидкотвердых средах вдоль слоев и перпендикулярно слоям. Представляя распространяющуюся волну в каждом слое взвешенной суммой плоских волн разного типа, автор получил однородную линейную систему уравнений с неизвестными амплитудами. Эта система уравнений определяется краевыми условиями на границах между жидкими и твердыми слоями, а ее определителем является дисперсионное соотношение. Затем автор вычислил низкочастотные пределы дисперсионных соотношений для описанных типов плоских волн, получив результат, что вдоль слоев при низких частотах могут распространяться две в среднем продольные волны (симметричные моды) и одна в среднем поперечная волна (антисимметричная мода). Эти результаты содержатся в книге [Бреховских, 1973]. В. А. Корнеев [Korneev, 2011] вывел уравнение для скоростей распространения вдоль слоев симметричных мод и исследовал их изменение в зависимости от частоты и отношения мощностей жидкого и твердого слоев.

Л. А. Молотков [Молотков, 1979], используя пятимерный формализм, выполнил предельный переход к нулевой частоте в пропагаторе для периода жидкотвердой среды. В результате он вывел дифференциальные уравнения, описывающие распространение волн в полученной однородной

среде, похожей по свойствам на среду Био [Молотков, 1979, 2001]. Волновые процессы в этой среде описываются пятью параметрами, которые определяют компоненты векторов смещений и тензоров напряжений в жидком  $(u_x^{(1)}, u_z, \tau_{zz})$  и твердом  $(u_x^{(2)}, u_z, \tau_{xx}^{(2)}, \tau_{zz})$  слоях. Переменные без верхнего индекса непрерывны. Из формул исключены касательные напряжения  $\tau_{xz}^{(1)}$  и  $\tau_{xz}^{(2)}$ , которые для низких частот считаются равными нулю во всей среде. В работах [Молотков, Хило, 1983; Молотков, 1988] авторы преобразовали полученные дифференциальные уравнения в спектральную область и представили их корни для точечного источника интегралами Меллина. Эти интегралы они вычислили по методу перевала и получили приближенные формулы для индикатрис групповых скоростей двух мод. Индикатрисы групповых скоростей имеют три пересечения с положительной полуосью, которым соответствуют три волны, распространяющиеся вдоль слоев. Они показали, что волна с наибольшей скоростью является квазипродольной, а волна с немного меньшей скоростью — продольно-пластинчатой. Скорость третьей волны зависит от отношения мощностей жидких и твердых слоев и стремится к нулю, если это отношение мало.

М. Шонберг в работах [Schoenberg, 1983, 1984] вывел дисперсионное уравнение для жидкотвердой периодической среды. Это уравнение справедливо для всех частот и волновых чисел (или горизонтальных медленностей). После предельного перехода к нулевой частоте им получено уравнение кривой медленности, которое в дальнейшем обобщено для многослойной периодической жидкотвердой среды. Из уравнения кривой медленности найдено параметрическое уравнение индикатрисы групповых скоростей. М. Шонберг отметил хорошее соответствие полученных аналитических выражений результатам экспериментов в ультразвуковом диапазоне частот. Заменяя волновые числа частными производными, он получил дифференциальные уравнения для однородной среды, приближенно описывающие распространение волн в слоистых жидкотвердых средах при низких частотах. Теория М. Шонберга основана на использовании пропагатора для среды с чередующимися жидкими и твердыми слоями. Пропагатор позволяет пересчитывать вертикальные компоненты смещений и давления из одного жидкого слоя в другой с правильным учетом условий на промежуточных границах. Оба параметра волнового поля, используемые при пересчете, являются непрерывными на всех границах раздела, а пропагатор является  $2 \times 2$  матрицей как для пропагатора в среде с только жидкими слоями. Такой подход дает основание использовать матрицу монодромии (пропагатор для периода) и теорию Флоке [Floquet, 1883; Braga, Neftman, 1992] при описании плоских волн, распространяющихся в жидкотвердых периодических средах. В рамках этого подхода плоскость параметров (горизонтальная медленность, частота) делится на зоны прохождения и поглощения. Зонам прохождения соответствуют однородные плоские волны, а зонам поглощения — затухающие. М. Шонберг в статье [Schoenberg, 1984] привел пример такого разбиения плоскости параметров. Этим автором также получены некоторые соотношения для низких частот между компонентами смещений в жидких и твердых слоях.

А. Н. Норрис и М. А. Гринфильд [Norris, Grinfeld, 1995] показали эквивалентность уравнения поверхности медленности для периодической жидкотвердой среды, полученного в рамках теории Био, уравнению, полученному М. Шонбергом [Schoenberg, 1984] пропагаторным методом.

Применение пропагаторов для жидкотвердой среды в контексте пятимерного формализма представлено в книге [Молотков, 1984], а в контексте дельта-операторной техники для анизотропных жидкотвердых сред — в статье [Роганов, 2013].

В данной статье продолжено изучение волн Флоке, распространяющихся в бинарных периодических жидкотвердых средах. Используя метод, предложенный М. Шонбергом [Schoenberg, 1983, 1984], авторы вывели новое аналитическое выражение для матрицы монодромии и получили дисперсионное уравнение, представленное произведением четырех множителей, которые ответственны за расположение границ зон прохождения и параметры волн Флоке, распространяющихся вдоль слоев.

**Теория и численный пример.** Рассмотрим распространение плоских волн в бесконечной периодической горизонтально-слоистой среде с двумя слоями в периоде. Предположим, что один из слоев является твердым и изотропным с мощностью  $d$ , плотностью  $\rho$ , скоростями  $\alpha$ ,  $\beta$  продольных и поперечных волн соответственно, а другой слой имеет мощность  $h$ , заполнен идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_f$  и скоростью акустической волны  $\alpha_f$ .

Излагаемая теория иллюстрируется на примере периодической жидкотвердой среды с двумя слоями в периоде из статьи [Корнеев, 2011]. Эта среда описывается параметрами  $\alpha = 4000$  м/с,

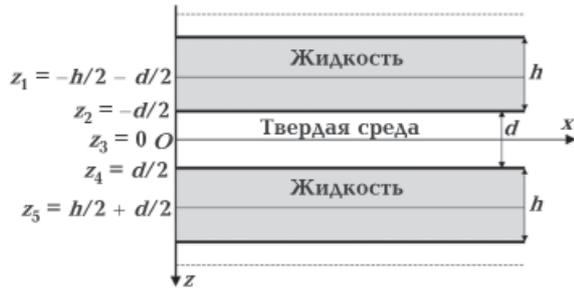


Рис. 1 Периодическая двуслойная жидкотвердая среда.

$\beta = 2200$  м/с,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $d = 1$  м,  $\alpha_f = 1500$  м/с,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 0,001$  м. Аспектное число для этой среды  $h/d = 0,001$ .

Выберем систему координат так, чтобы ось  $Ox$  была горизонтальна и проходила через середину твердого слоя, а ось  $Oz$  была вертикальна и направлена вниз (рис. 1).

Все плоские волны в рассматриваемой среде с горизонтальной медленностью  $p$  и круговой частотой  $\omega = 2\pi f$  содержат фазовый множитель  $\exp[i\omega(px - t)]$ , который в статье исключен из соответствующих формул.

Обозначим соответственно  $\xi = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - p^2}$ ,  $\eta = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - p^2}$  и  $\xi_f = \sqrt{\frac{1}{\alpha_f^2} - p^2}$  вертикальные медленности продольных и поперечных волн в твердом слое и акустической волны в жидком слое,  $H = d + h$  — мощность периода.

Если  $z$  принадлежит твердому слою, то  $\mathbf{a}(z) = (a_{pd}, a_{sd}, a_{pu}, a_{su})^T$  означает вектор, компонентами которого являются амплитуды продольных ( $p$ ) и поперечных ( $s$ ) волн, распространяющихся вниз ( $d$ ) и вверх ( $u$ ). В этом случае вектор скоростей смещений и напряжений  $\mathbf{v}(z) = (u_1, u_3, \tau_{13}, \tau_{33})^T$  находится по формуле  $\mathbf{v}(z) = \mathbf{E}\mathbf{a}(z)$ , где столбцами матрицы  $\mathbf{E}$  служат четыре вектора, состоящих из нормированных скоростей смещений и напряжений плоских волн разного типа в твердой среде:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha p & \beta \eta & \alpha p & \beta \eta \\ \alpha \xi & -\beta p & -\alpha \xi & \beta p \\ -2\rho\alpha\beta^2 p \xi & -\rho\beta(1 - 2\beta^2 p^2) & 2\rho\alpha\beta^2 p \xi & \rho\beta(1 - 2\beta^2 p^2) \\ -\rho\alpha(1 - 2\beta^2 p^2) & 2\rho\beta^3 p \eta & -\rho\alpha(1 - 2\beta^2 p^2) & 2\rho\beta^3 p \eta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Аналогично обозначим  $\mathbf{b}(z) = (b_d, b_u)^T$  вектор амплитуд плоских волн, если  $z$  принадлежит жидкому слою. Вектор, состоящий из вертикальных компонент скоростей смещений и вертикальных напряжений  $\mathbf{w}(z) = (u_3, \tau_{33})^T$ , находится по формуле  $\mathbf{w}(z) = \mathbf{E}_f \mathbf{b}(z)$ , где

$$\mathbf{E}_f = \begin{pmatrix} \alpha_f \xi_f & -\alpha_f \xi_f \\ -\alpha_f \rho_f & -\alpha_f \rho_f \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Матрицы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_f$  имеют соответственно обратные матрицы:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2 p}{\alpha} & \frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\alpha \xi} & -\frac{p}{2\rho\alpha \xi} & -\frac{1}{2\rho\alpha} \\ \frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\beta \eta} & -\beta p & -\frac{1}{2\rho\beta} & \frac{p}{2\rho\beta \eta} \\ \frac{\beta^2 p}{\alpha} & -\frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\alpha \xi} & \frac{p}{2\rho\alpha \xi} & -\frac{1}{2\rho\alpha} \\ \frac{1 - 2\beta^2 p^2}{2\beta \eta} & \beta p & \frac{1}{2\rho\beta} & \frac{p}{2\rho\beta \eta} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_f^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_f^{-1} \xi_f^{-1} & -\alpha_f^{-1} \rho_f^{-1} \\ -\alpha_f^{-1} \xi_f^{-1} & -\alpha_f^{-1} \rho_f^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Введем диагональные матрицы:

$$\Lambda = \text{diag}(\exp(i\omega \xi d/2), \exp(i\omega \eta d/2), \exp(-i\omega \xi d/2), \exp(-i\omega \eta d/2)), \quad (5)$$

$$\Lambda_f = \text{diag}\left(\exp(i\omega\xi_f h/2), \exp(-i\omega\xi_f h/2)\right), \quad (6)$$

а также матрицы-пропагаторы  $\mathbf{Q} = \mathbf{E}_f \Lambda_f \mathbf{E}_f^{-1}$  и  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \Lambda^2 \mathbf{E}^{-1}$  для жидкого и твердого слоев, где  $i = \sqrt{-1}$ .

Знаки столбцов матриц  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_f$  выбраны так, чтобы симметричные и антисимметричные моды описывались соответственно равенствами  $a_{pd} = a_{pu}$ ,  $a_{sd} = a_{su}$ ,  $b_d = b_u$  и  $a_{pd} = -a_{pu}$ ,  $a_{sd} = -a_{su}$ ,  $b_d = -b_u$ .

**Матрица монодромии для жидкотвердой среды и дисперсионное уравнение.** Используя матричный метод Томсона—Хаскелла [Thomson, 1950; Haskell, 1953], можно связать значения векторов  $\mathbf{w}(z) = (u_3, \tau_{33})^T$  и  $\mathbf{v}(z) = (u_1, u_3, \tau_{13}, \tau_{33})^T$  для разных глубин, находящихся в одном слое (см. рис. 1), линейными соотношениями:

$$\mathbf{w}(z_2) = \mathbf{Q} \mathbf{w}(z_1), \quad (7)$$

$$\mathbf{v}(z_4) = \mathbf{P} \mathbf{v}(z_2), \quad (8)$$

$$\mathbf{w}(z_5) = \mathbf{Q} \mathbf{w}(z_4). \quad (9)$$

На границах жидкотвердых слоев непрерывны компоненты волнового поля  $u_3$ ,  $\tau_{33}$  и, следовательно,

$$\mathbf{w}(z_4) = \mathbf{F} \mathbf{v}(z_4), \quad (10)$$

где  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Пусть  $\mathbf{v}(z_2) = (u_1, u_3, \tau_{13}, \tau_{33})^T$ . Из соотношений  $\tau_{13}(z_2) \equiv \tau_{13} = 0$  и  $\tau_{13}(z_4) = 0$  следует, что  $\mathbf{P}_{31} u_1 + \mathbf{P}_{32} u_3 + \mathbf{P}_{34} \tau_{33} = 0$ . Поэтому  $u_1 = -\mathbf{P}_{31}^{-1} \mathbf{P}_{32} u_3 - \mathbf{P}_{31}^{-1} \mathbf{P}_{34} \tau_{33}$  и справедливо соотношение

$$\mathbf{v}(z_2) = \mathbf{G} \mathbf{w}(z_2), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P}_{32} / \mathbf{P}_{31} & -\mathbf{P}_{34} / \mathbf{P}_{31} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и  $\mathbf{P}_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{P}$ .

Применяя последовательно преобразования (7), (11), (8), (10), (9), получим пропагатор (матрицу монодромии) [Якубович, Старжинский, 1972], связывающий параметры волнового поля  $\mathbf{w}(z)$ , относящиеся к срединам соседних жидких слоев  $\mathbf{w}(z_5) = \mathbf{M} \mathbf{w}(z_1)$ ,

где

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{Q}. \quad (12)$$

Аналогичный подход построения пропагатора для жидкотвердой среды предложил М. Шонберг [Schoenberg, 1983, 1984].

Обозначим

$$t_q = \text{tg}(\omega q(d+h)/2), \quad t_\xi = \text{tg}(\omega \xi d/2), \quad t_\eta = \text{tg}(\omega \eta d/2), \quad t_f = \text{tg}(\omega \xi_f h/2),$$

$$m_{\xi\eta} = 4\xi\beta^4 p^2 \eta t_\xi + (1 - 2\beta^2 p^2)^2 t_\eta, \quad m_{\eta\xi} = 4\xi\beta^4 p^2 \eta t_\eta + (1 - 2\beta^2 p^2)^2 t_\xi, \quad k = \frac{\rho_f \xi}{\rho \xi_f},$$

$$r_{11} = (m_{\eta\xi} + k t_f) / \xi, \quad r_{12} = (m_{\xi\eta} t_f + k t_\xi t_\eta) \xi_f / \eta, \quad (13)$$

$$r_{21} = (-m_{\eta\xi} t_f + k) \xi_f / \xi, \quad r_{22} = (m_{\xi\eta} - k t_\xi t_\eta t_f) / \eta. \quad (14)$$

Вычисление по формуле (12) показывает, что

$$\mathbf{M} = (r_{21} r_{22} + r_{11} r_{12})^{-1} \begin{pmatrix} r_{21} r_{22} - r_{11} r_{12} & -2i\rho_f^{-1} r_{12} r_{21} \\ -2i\rho_f r_{11} r_{22} & r_{21} r_{22} - r_{11} r_{12} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Согласно теории Флоке для периодической среды [Braga, Herrman, 1992; Chicone, 1999;

Roganov, Stovas, 2012], вектор  $\mathbf{w}(z)$  можно представить как произведение  $\mathbf{w}(z) = \exp(i\omega qz)\mathbf{S}(z)$ , где  $\mathbf{S}(z) = \mathbf{S}(z+H)$  — периодическая функция. Следовательно,  $\mathbf{w}(z_5) = \exp(i\omega qH)\mathbf{w}(z_1)$  и  $\lambda \equiv \exp(i\omega qH)$  является собственным числом матрицы  $\mathbf{M}$ . Значение  $q$  — вертикальная медленность интерференционной волны Флоке, а собственные векторы матрицы  $\mathbf{M}$  определяют векторы поляризации в жидких слоях на глубинах  $z_1+nH$ , где  $n$  — целое число. Векторы поляризации повторяются с периодом  $H$ . На других глубинах в пределах периода векторы поляризации вычисляются умножением собственных векторов матрицы  $\mathbf{M}$  на соответствующие пропагаторы.

Из соотношения (15) следует, что  $\det(\mathbf{M})=1$ . Поэтому справедливы равенства:

$$\cos(i\omega qH) = \frac{1-t_q^2}{1+t_q^2} = \text{Tr}(\mathbf{M})/2 = \frac{r_{21}r_{22} - r_{11}r_{12}}{r_{21}r_{22} + r_{11}r_{12}} = \frac{1-r_{11}r_{12}r_{21}^{-1}r_{22}^{-1}}{1+r_{11}r_{12}r_{21}^{-1}r_{22}^{-1}}. \quad (16)$$

Следовательно,

$$t_q^2 = \frac{r_{11}r_{12}}{r_{21}r_{22}}. \quad (17)$$

Равенство (17) является дисперсионным уравнением. Эквивалентное дисперсионное уравнение относительно  $\cos(i\omega qH)$  получено М. Шонбергом [Schoenberg, 1984]. Соотношение (17) определяет кинематические свойства плоских волн в периодической жидкотвердой среде. При фиксированной частоте  $\omega$  оно задает кривую медленности  $q=q(p,\omega)$  и позволяет рассматривать процесс распространения интерференционной совокупности плоских волн в периодической среде как единую плоскую волну Флоке [Floquet, 1883] с вертикальной медленностью  $q=q(p,\omega)$ .

В дальнейшем будем рассматривать только моды, для которых значения  $\omega\xi d$ ,  $\omega\eta d$ ,  $\omega\xi_f h$  и  $\omega qH$  не превосходят  $\pi$ .

Значения чисел  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  вещественны при любых параметрах  $p$  и  $\omega$ , даже когда в слоях плоские волны неоднородны. Знак правой части равенства (17) определяет разбиение плоскости параметров  $(p, \omega)$  на зоны прохождения и зоны поглощения, которым соответствуют однородные и неоднородные (затухающие) волны.

При  $p=0$  и небольшой частоте  $\omega$  все значения  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  положительны. Следовательно, точка  $(p, \omega)$  находится в зоне прохождения. Кроме того, при  $p > \max(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha_f^{-1})$  все значения  $\xi, \eta, \xi_f$  являются чисто мнимыми. Поскольку  $\text{tg}(ix) = i\text{th}(x)$ , то  $\text{tg}(ix) \rightarrow i$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Таким образом, при  $\omega \rightarrow \infty$  справедливо равенство  $t_\xi = t_\eta = t_f = i$ . Поэтому при  $\omega \rightarrow \infty$  и  $p > \max(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha_f^{-1})$  выполняются соотношения  $r_{11} = iS\xi^{-1}$ ,  $r_{12} = -S\xi_f\eta^{-1}$ ,  $r_{21} = S\xi_f\xi^{-1}$ ,  $r_{22} = iS\eta^{-1}$ , где  $S = 4p^2\beta^4\xi\eta + (1 - 2\beta^2p^2)^2 + k$ .

Из формулы (17) следует, что в этом случае либо  $t_q^2 = -1$  и точка  $(p, \omega)$  принадлежит зоне поглощения, либо  $S=0$ , что соответствует волне Шолте, распространяющейся вдоль границы двуслойной жидкотвердой среды. При указанных условиях все значения  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  обращаются в нуль одновременно. Поэтому при больших частотах зоны прохождения сжимаются и приближаются к линии, для которой  $S(p)=0$ .

Для рассматриваемого примера на рис. 2 серым цветом показаны зоны прохождения в логарифмическом масштабе. Такое расположение зон типично для жидкотвердых периодических сред с двумя слоями в периоде. Зоны ограничиваются линиями, для которых  $r_{ij}(p, \omega)=0$ ,  $i, j=1, 2$ . На рисунке видно, что область, ограниченная линиями  $r_{12}=0$  и  $r_{21}=0$ , вырождается, начиная с частоты около 200 Гц.

Как будет показано ниже, соотношения  $r_{11}=0$ ,  $r_{12}=0$  определяют соответственно параметры  $(p, \omega)$  антисимметричных и симметричных волн, распространяющихся горизонтально. Равенство нулю множителей  $r_{21}, r_{22}$  соответствует двум типам волн, имеющим горизонтальные групповые скорости: с горизонтальными колебаниями в средине твердых слоев и вертикальными колебаниями в средине жидких слоев ( $r_{21}=0$ ), либо наоборот ( $r_{22}=0$ ).

В точке  $A(p_A, \omega_A)$  кривые, заданные соотношениями  $r_{11}(p, \omega)=0$  и  $r_{12}(p, \omega)=0$ , пересекаются. Поэтому при  $\omega < \omega_A$  симметричная волна ограничивает вторую зону прохождения справа, а антисимметричная волна — третью зону слева. При  $\omega > \omega_A$  положения симметричной и антисимметричной волн изменяются на противоположные: антисимметричная волна ограничивает вторую зону прохождения, а симметричная — третью. В данном случае при фиксированной частоте  $\omega$  урав-

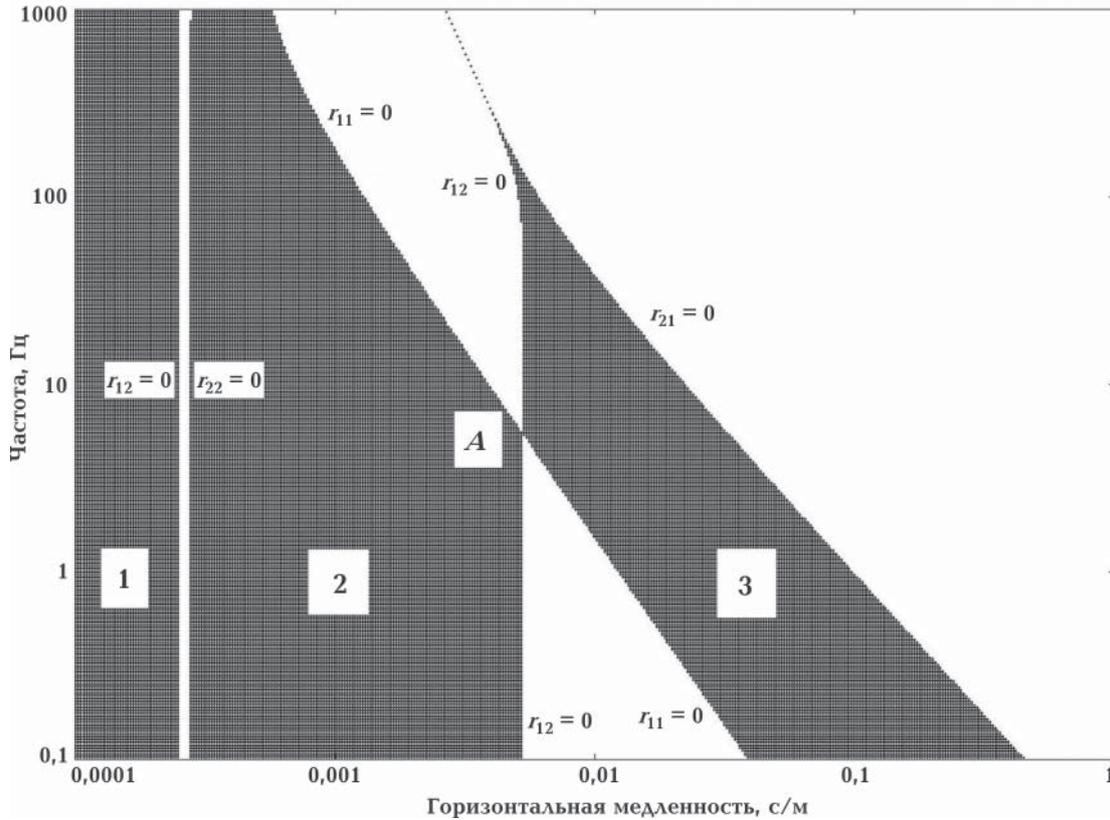


Рис. 2. Три зоны прохождения для плоских волн, распространяющихся в периодической жидкотвердой среде в зависимости от горизонтальной медленности  $p$  и частоты  $F=\omega/2\pi$ . Зоны прохождения ограничены линиями  $r_{ij}(p,\omega)=0$ .

нение  $r_{12}(p,\omega)=0$  имеет два корня, а остальные уравнения  $r_{ij}(p,\omega)=0$  — по одному корню. Корни уравнений  $r_{12}(p,\omega)=0$  и  $r_{22}(p,\omega)=0$  слабо зависят от частоты.

При значениях  $p$  и  $\omega$ , для которых  $r_{21}(p,\omega)=0$  или  $r_{22}(p,\omega)=0$ , знаменатель правой части соотношения (17) равен нулю. Следовательно, в этом случае  $t_q=\infty$  и

$$q(\omega, p) = \frac{\pi}{\omega H}. \quad (18)$$

Для такой волны Флоке  $\mathbf{w}(z_5) = \mathbf{M}\mathbf{w}(z_1) = \exp(i\omega q H)\mathbf{w}(z_1) = \exp(i\pi)\mathbf{w}(z_1) = -\mathbf{w}(z_1)$ . Данное равенство означает, что векторы поляризации в точках  $(x, z)$  и  $(x, z+H)$  имеют противоположные знаки. Следовательно, они одинаковы в точках  $(x, z)$  и  $(x, z+2H)$ .

Из соотношения (17) следует, что при  $t_q=\infty$  значение  $q'_p = \infty$ . Поэтому групповые скорости таких волн направлены горизонтально. Направления групповых скоростей значительно отличаются от направлений фазовых скоростей, для которых  $\text{tg}(\varphi_{ph}) = \frac{q}{p} = \frac{\pi}{p\omega H}$ . Из этого также следует, что кривая медленности для данной волны не существует в диапазоне углов  $(\varphi_{ph}, \pi - \varphi_{ph})$ .

Отметим, что если периодом считать не  $H$ , а  $2H$ , то волны Флоке, для которых  $r_{21}(p,\omega)=0$  или  $r_{22}(p,\omega)=0$ , можно описать методом, изложенным в статье [Рытов, 1956].

Дисперсионное уравнение для периода  $2H$  выражается формулой

$$\text{tg}^2 \omega H \tilde{q} = 4r_{11}r_{12}r_{21}r_{22} / (r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22})^2.$$

Поэтому для всех четырех волн, описываемых равенствами  $r_{ij}=0$ , вертикальная медленность  $\tilde{q} = 0$ . В таком представлении направления фазовой и групповой скоростей этих волн горизонтальны.

На рис. 3 изображены кривые медленности трех мод волн Флоке для частоты  $F=10$  Гц. Эти кривые находятся в разных интервалах горизонтальных медленностей  $p$  и соответствуют разным

модам плоских волн, распространяющимся в жидкотвердой среде. Для частоты  $F=10$  Гц кривая медленности  $AB$  выпуклая и описывает волны с большими фазовыми скоростями. Она практически совпадает с кривой медленности  $qP$ -волны в однородной вертикальной трансверсально-изотропной (ВТИ) среде, полученной осреднением Бакуса двуслойной периодической среды со скоростью поперечной волны  $\beta=0$  в жидком слое (рис. 4). Для полученной ВТИ-среды параметры Томсона равны:  $\varepsilon=0,0075$  и  $\delta=-0,42$ . Наличие большого отрицательного значения  $\delta$  является следствием условия проскальзывания на границах между твердыми и жидкими слоями. Поскольку  $\sqrt{1+2\varepsilon} \approx 1$ , скорости  $qP$ -волн вдоль и поперек слоев практически одинаковы. В то же время, отношение скорости ОГТ к скорости по вертикали равно  $\sqrt{1+2\delta} = 0,4$ . Можно показать, что при маленьких значениях аспектного отношения  $h/d$  значение  $\delta \approx -2g^2(1-g^2)$ , где  $g = \beta/\alpha$ . Оно достигает наибольшего отрицательного значения  $\delta=-0,5$  для среды с  $g = 1/\sqrt{2}$ . В этом случае  $v_{\text{ОГТ}} = v_{\text{верт}} \sqrt{1+2\delta} = 0$ .

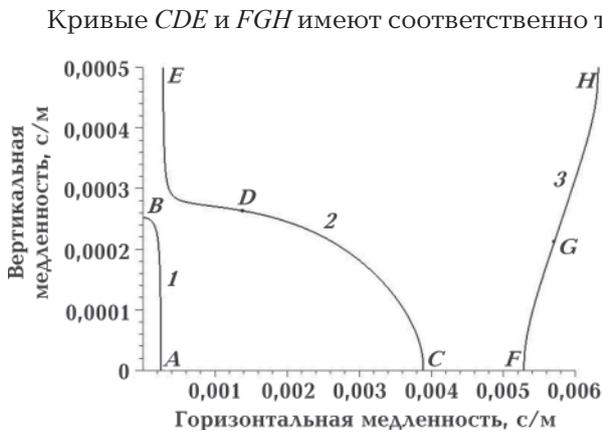


Рис. 3. Кривые медленности, удовлетворяющие уравнению (17) для частоты  $F=10$  Гц.

стоте  $\omega$ , определим индикатрисы групповых скоростей — зависимости групповых скоростей  $v_{gr}$  от групповых углов  $\psi_{gr}$ :

$$v_{gr}(\psi_{gr}) = \frac{\sqrt{1+q_p'^2}}{q-pq_p'}, \quad \text{tg}(\psi_{gr}) = -\frac{1}{q_p'} \quad (19)$$

где

$$q_p' = \frac{\partial q}{\partial p}$$

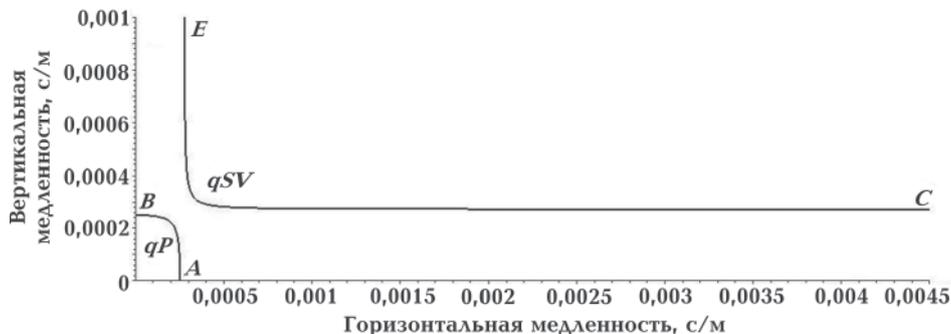


Рис. 4. Кривые медленности для однородной ВТИ-среды после осреднения Бакуса.

На рис. 5 представлены графики индикатрис групповых скоростей, рассчитанных по формулам (19). На них отмечены точки  $A-E$ , соответствующие аналогичным точкам на кривых медленности (см. рис. 3).

Индикатрисы групповых скоростей пересекают положительную горизонтальную полуось в точках  $H, F, C, E, A$ . Соответствующие плоские волны имеют горизонтальные групповые скорости, поскольку нормали к кривым медленности в этих точках горизонтальны (см. рис. 3). Из формулы (19) следует, что групповые скорости для этих волн равны  $1/p_i$ , где  $p_i$  — соответствующие горизонтальные медленности.

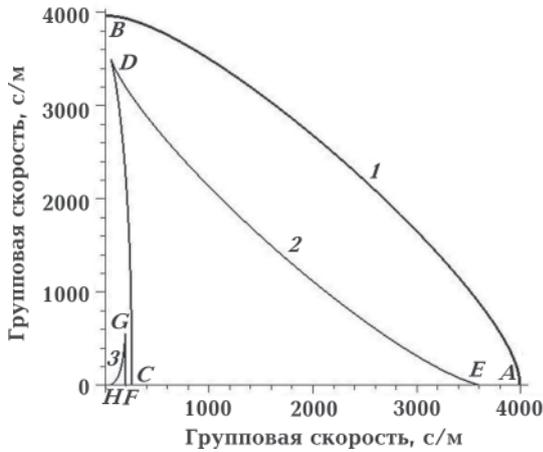


Рис. 5. Индикатрисы групповых скоростей для периодической жидкотвердой среды. Буквами  $A-E$  отмечены точки на индикатрисах, соответствующие аналогичным точкам на кривых медленности из рис. 3.

Для нашего примера область вогнутости на кривой медленности  $AB$  возникает при частотах, больших  $F=548$  Гц. Начиная с этой частоты, на индикатрисе групповых скоростей появляется вертикальная каустика.

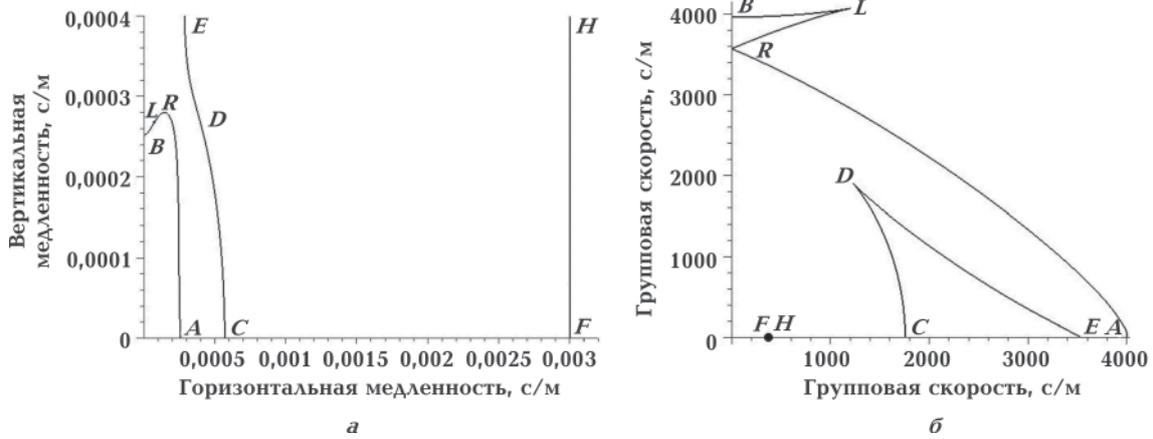


Рис. 6. Кривые медленности (а) и индикатрисы групповых скоростей (б) для частоты  $F=1000$  Гц.

**Векторы поляризации и амплитуды парциальных волн в средах жидкого и твердого слоев.**

Собственный вектор  $\mathbf{w}(z_1)$  матрицы  $\mathbf{M}$  находим из соотношения

$$\tilde{\mathbf{w}}(z_1) = (r_{21}r_{22} + r_{11}r_{12}) \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{22} - \lambda \\ -\mathbf{M}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(r_{21}r_{22} + r_{11}r_{12}) \sin(i\omega qH) \\ 2i\rho_f r_{11}r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2it_q r_{21}r_{22} \\ 2i\rho_f r_{11}r_{22} \end{pmatrix}.$$

После нормировки получаем

$$\mathbf{w}(z_1) = \begin{pmatrix} u_3 \\ \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_q r_{21} / r_{11} \\ -\rho_f \end{pmatrix}. \tag{21}$$

При  $\omega \rightarrow 0$

$$\mathbf{w}(z_1) = \begin{pmatrix} u_3 \\ \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\rho_1 \langle \rho \rangle^{-1} \\ -\rho_f \end{pmatrix}. \tag{22}$$

В жидкой среде выполняется уравнение  $\rho_f \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x}$ . В спектральной области этому уравнению соответствует равенство  $u_1 = -\rho_f^{-1} p \tau_{33}$ . Следовательно, вектор поляризации в середине жидкого слоя задается формулой

$$\mathbf{u}_f(z_1) = \begin{pmatrix} u_{1f} \\ u_{3f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ t_q r_{21} / r_{11} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

При  $\omega \rightarrow 0$

$$\mathbf{u}_f(z_1) = \begin{pmatrix} u_{1f} \\ u_{3f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \rho_f \langle \rho \rangle^{-1} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Низкочастотное приближение (24) можно использовать для вычисления векторов поляризации только для первой и второй мод.

Из равенства (23) определим, когда вектор  $\mathbf{u}_f(z_1)$  горизонтален или вертикален. Для этого заметим, что  $|u_{3f}/u_{1f}| = |t_q r_{21}/r_{11}| = \sqrt{r_{12} r_{21} / (r_{11} r_{22})}$ . Следовательно,  $u_{1f}/u_{3f} = 0$ , если  $r_{11} = 0$  или  $r_{22} = 0$ . Аналогично,  $u_{3f}/u_{1f} = 0$ , если  $r_{12} = 0$  или  $r_{21} = 0$ . Кроме того, в первом квадранте неравенство  $u_{1f}/u_{3f} < 0$  справедливо, если  $r_{21}/r_{11} < 0$ . Поэтому оно выполняется только для третьей моды (см. рис. 2).

Амплитуды нисходящих  $b_d$  и восходящих  $b_u$  парциальных волн в середине жидкого слоя находятся по формуле  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_d \\ b_u \end{pmatrix} = \mathbf{E}_f^{-1} \mathbf{w}(z_1)$ . Следовательно,

$$b_d : b_u = (r_{21} t_q + r_{11} \xi_f) : (-r_{21} t_q + r_{11} \xi_f). \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что  $u_{1f} = 0 \Leftrightarrow b_d = -b_u$  и  $u_{3f} = 0 \Leftrightarrow b_d = b_u$ .

Вектор амплитуд  $\mathbf{a}(z_3) = (a_{pd}, a_{sd}, a_{pu}, a_{su})^T$  парциальных волн, из которых состоит волна Флоке в середине твердого слоя, находится из соотношения  $\mathbf{a}(z_3) = \mathbf{N} \mathbf{w}(z_1)$ , где  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{Q}$  — пропатор из середины жидкого слоя в середину твердого слоя с учетом краевых условий на промежуточной границе  $z_2$ . Вычисления показывают, что после нормировки амплитуды парциальных волн удовлетворяют равенствам

$$a_{pd} = (1 - 2\beta^2 p^2) (r_{11} s_\eta + t_q r_{22} \xi^{-1} \eta c_\eta), \quad (26)$$

$$a_{pu} = (1 - 2\beta^2 p^2) (r_{11} s_\eta - t_q r_{22} \xi^{-1} \eta c_\eta), \quad (27)$$

$$a_{sd} = -2\alpha \beta p (r_{11} \xi s_\xi + t_q r_{22} \eta c_\xi), \quad (28)$$

$$a_{su} = -2\alpha \beta p (r_{11} \xi s_\xi - t_q r_{22} \eta c_\xi), \quad (29)$$

$$b_d = \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} \eta \xi_f^{-1} r_{22} (1 - it_q) (r_{11} \xi_f + t_q r_{21}) c_\xi c_\eta c_f, \quad (30)$$

$$b_u = \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} \eta \xi_f^{-1} r_{22} (1 - it_q) (r_{11} \xi_f - t_q r_{21}) c_\xi c_\eta c_f. \quad (31)$$

Вектор  $\mathbf{v}(z_3) = (u_{1E}, u_{3E}, \tau_{13E}, \tau_{33E})^T$  скоростей смещений и напряжений волны Флоке в середине твердого слоя получим из соотношения  $\mathbf{v}(z_3) = \mathbf{E} \mathbf{a}(z_3)$ . Подставляя формулы (26)—(31) в формулу для  $\mathbf{v}(z_3)$ , находим отношение компонент скоростей смещений в середине твердого слоя:

$$\frac{u_{1E}}{u_{3E}} = \frac{p r_{11} \left( (1 - 2\beta^2 p^2) s_\eta - 2\beta^2 \xi \eta s_\xi \right)}{t_q \eta r_{22} \left( (1 - 2\beta^2 p^2) c_\eta + 2\beta^2 p^2 c_\xi \right)} \quad (32)$$

и отношение компонент вектора скорости смещений в середине твердого слоя к аналогичным компонентам в середине жидкого слоя:

$$\frac{u_{1E}}{u_{1f}} = \frac{\rho_f \left( (1 - 2\beta^2 p^2) s_\eta - 2\beta^2 \xi \eta s_\xi \right)}{\rho \eta r_{22} (1 - it_q) c_\xi c_\eta c_f}, \quad (33)$$

$$\frac{u_{3E}}{u_{3f}} = \frac{\rho_f \left( (1-2\beta^2 p^2) c_\eta + 2\beta^2 p^2 c_\xi \right)}{\rho r_{21} (1-it_q) c_\xi c_\eta c_f}. \quad (34)$$

Компонента  $u_3$  непрерывна и при  $\omega \rightarrow 0$  выполняется равенство  $u_{3E} = u_{3f}$ .  
Из соотношений (32) и (33) следует, что при  $\omega \rightarrow 0$

$$\frac{u_{1E}}{u_{3E}} = \frac{p < \rho > (1-2\beta^2 / \alpha^2)}{q\rho(1-v_{PL}^2 p^2)}, \quad (35)$$

$$\frac{u_{1E}}{u_{1f}} = \frac{\rho_f (1-2\beta^2 / \alpha^2)}{\rho_f (1-v_{PL}^2 p^2)}, \quad (36)$$

где  $\langle \rho \rangle = (d\rho + h\rho_f) / H$ ,  $v_{PL}^2 = 4\beta^2 (1-\beta^2 / \alpha^2)$ .

Соотношение (36) представлено в статье [Schoenberg, 1984]. Из него следует, что  $u_{1E} / u_{1f} < 0$  выполняются, если  $p > 1/v_{PL}$ , т. е. для второй и третьей мод.

**Свойства плоских волн, распространяющихся горизонтально** в периодической жидкотвердой среде, представляют самостоятельный интерес, поскольку эти волны являются разновидностью волн Стоунли. Для этих волн получим отношения амплитуд парциальных волн и отношения компонент скоростей смещений.

**Симметричные моды** в средине слоев имеют горизонтальные фазовую и групповую скорости и состоят из нисходящих и восходящих парциальных волн одинаковой амплитуды:  $a_{pd} = a_{pu}$ ,  $a_{sd} = a_{su}$ ,  $b_d = b_u$ . Для этих волн выполняются соотношения  $t_q = 0$  и  $r_{12} = 0$ . Быстрой симметричной волне на рис. 3 и 5 соответствует точка *A*, а медленной симметричной волне — точка *F*.

Из формул (26)–(31) следует, что амплитуды парциальных волн симметричных мод в средине слоев находятся в отношении

$$a_{pd} : a_{sd} : b_d = (1-2\beta^2 p^2) s_\eta : (-2)\alpha\beta\xi p s_\xi : \alpha\alpha_f^{-1} \rho\rho_f^{-1} \eta r_{22} c_\xi c_\eta c_f. \quad (37)$$

При  $\omega \rightarrow 0$  формула (37) приводится к виду

$$a_{pd} : a_{sd} : b_d = (1-2\beta^2 p^2) : (-2)\alpha\beta\xi p : \alpha\alpha_f^{-1} \rho\rho_f^{-1} (1-v_{PL}^2 p^2). \quad (38)$$

Мощности слоев входят в формулу (38) только через горизонтальную медленность  $p$ .

В формуле (38)  $v_{PL} = 2\beta\sqrt{1-\beta^2/\alpha^2}$  — скорость продольной пластинчатой волны в твердом слое со свободными условиями на верхней и нижней границах, а  $p = 1/v_{sym}$  — горизонтальная медленность рассматриваемой симметричной волны. Из формул (23) и (32) следует, что поляризация симметричных мод в средине жидких и твердых слоев горизонтальная, т. е. направлена вдоль распространения волны (рис. 7, *a*, *б*).

Скорости симметричных мод  $v_{sym}$  при низких частотах являются положительными корнями биквадратного уравнения [Когнеев, 2011], полученного разложением выражения  $r_{12}$  в ряд Тейлора по  $\omega$  с точностью  $O(\omega)$  и заменой  $p = v_{sym}^{-1}$ :

$$\left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{m}{4\beta^2} \right) v_{sym}^4 - \left( 1 + m \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_1^2}{4\beta^2} \right) \right) v_{sym}^2 + \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) m \alpha_f^2 = 0, \quad (39)$$

где

$$m = \frac{4\rho\beta^2 h}{\alpha_f^2 \rho_f d}.$$

При  $m \ll 1$  уравнение (39) имеет положительные корни:

$$v_{sym1} = \alpha \left( 1 - \frac{(1-g^2)(1-g_f^2)m}{8g^2} \right) + O(m^2), \quad (40)$$

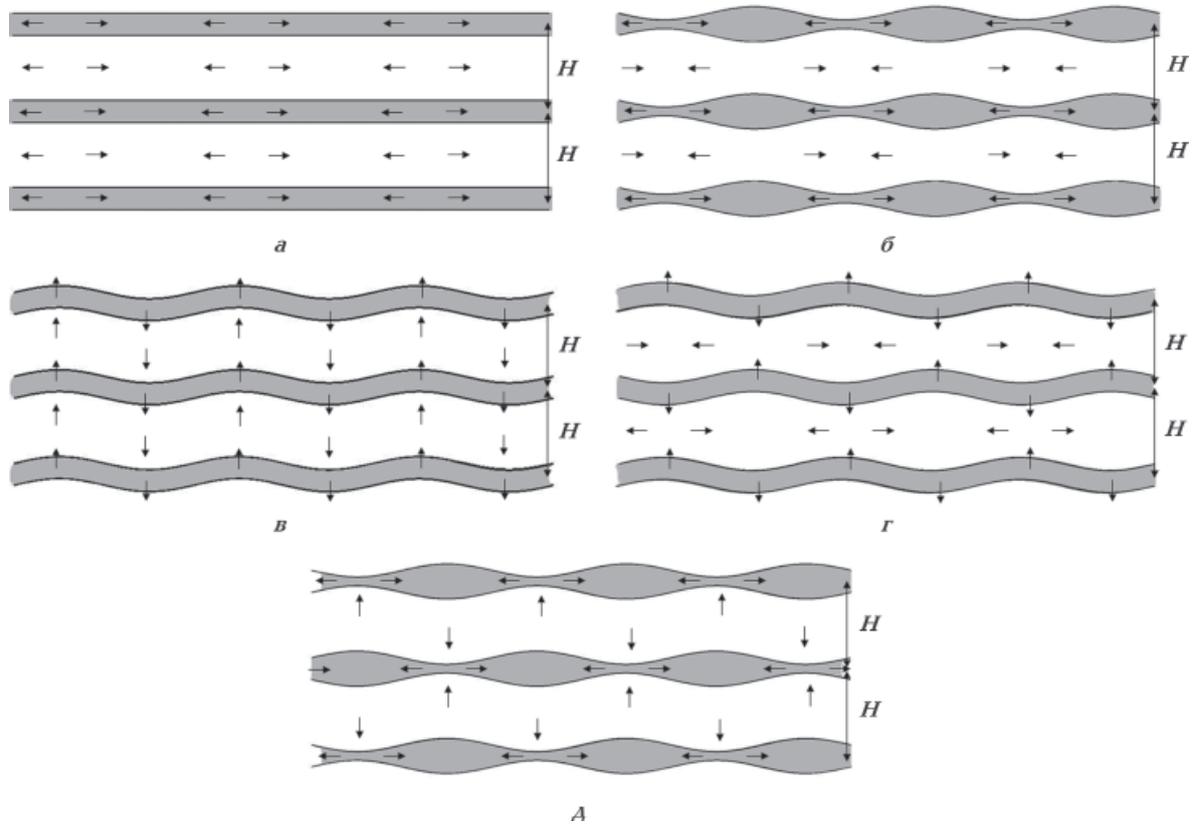


Рис. 7. Направления скоростей смещений для различных типов волн, распространяющихся горизонтально в периодической жидкотвердой среде: *а* — быстрых симметричных; *б* — медленных симметричных; *в* — антисимметричных; *г* — с горизонтальными колебаниями твердых слоев и вертикальными колебаниями жидких слоев; *А* — с вертикальными колебаниями твердых слоев и горизонтальными колебаниями жидких слоев. Белым цветом показаны твердые слои, а серым — слои с жидкостью.

$$v_{\text{sym}2} = \alpha_f \sqrt{(1-g^2)m} + O(m^{3/2}), \quad (41)$$

где  $g = \beta/\alpha$ ,  $g_f = \alpha_f/\alpha$ . Корни  $v_{\text{sym}1}$ ,  $v_{\text{sym}2}$  не зависят от частоты  $\omega$  и на рис. 2 видно, что график функции  $r_{12}(\omega, p) = 0$  при низких частотах выглядит как две вертикальные линии.

Волна (40) при  $m \ll 1$  имеет скорость немного меньше скорости продольной волны  $\alpha$  в твердом слое. Подставляя  $p = 1/\alpha$  в соотношения (36) и (38), получаем приближенные формулы для отношений горизонтальных компонент скоростей смещений  $u_{1E} : u_{1f} = \rho_f : \rho(1-2g^2)$  и амплитуд парциальных волн  $a_{pd} : a_{sd} : b_d = 1 : 0 : \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} (1-2g^2)$ . Следовательно, быстрая симметрическая волна в твердом слое формируется преимущественно продольными волнами. Она сосредоточена в твердом слое, если отношение скоростей  $\beta/\alpha$  близко к  $1/\sqrt{2}$ .

При  $m \ll 1$  волна (41) имеет низкую скорость и горизонтальную медленность  $p$ , при которой все парциальные волны неоднородны. Отбрасывая в формуле (38) слагаемые, не содержащие  $p$ , получаем для медленной симметричной волны аппроксимацию отношения амплитуд парциальных волн  $a_{pd} : a_{sd} : b_d = 1 : ig^{-1} : 2\alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} (1-g^2)$ . В этой формуле амплитуды поперечных волн в твердом слое зависят только от отношения скоростей  $g$ . Их фазы сдвинуты на  $90^\circ$  относительно фаз продольных волн. Амплитуды волн в жидком слое всегда значительны:  $b_d/a_{pd} \geq \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1}$ . Соотношение амплитуд  $1 : ig^{-1}$  приводит к взаимной компенсации продольных и поперечных парциальных волн в середине твердого слоя. В результате медленная симметричная волна преимущественно сосредоточена в жидком слое. Отношение горизонтальных компонент  $u_{1E} : u_{1f}$  вычисляемое по формуле (36), мало, поскольку множитель знаменателя  $(1-v_{PL}^2 p^2) \ll -1$ . Например, для рассматриваемого примера  $u_{1E} : u_{1f} = -0,0004$ .

**Антисимметричная мода** в срединах слоев формируются нисходящими и восходящими парциальными волнами с противоположными амплитудами:  $a_{pd} = -a_{pu}$ ,  $a_{sd} = -a_{su}$ ,  $b_d = -b_u$ . Для этой волны выполняются соотношения  $t_q = 0$ ,  $r_{11} = 0$ . Антисимметричной волне на рис. 3 и 5 соответствует точка С.

Из формул (26)—(31) видно, что амплитуды парциальных волн антисимметричной волны находятся в отношении

$$a_{pd} : a_{sd} : b_d = (1 - 2\beta^2 p^2) c_\eta : (-2) \alpha \beta \xi p c_\xi : \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} \xi \xi_f^{-1} r_{21} c_\xi c_\eta c_f. \quad (42)$$

В результате интерференции парциальных волн поляризация антисимметричной волны в срединах твердых и жидких слоев вертикальная, т. е. направлена поперек распространения волны (см. рис. 7, в).

Скорость антисимметричной волны  $v_{asym}$  при низких частотах и маленьких значениях параметра  $m$  находится разложением функции  $r_{11}(\omega, m) = 0$  в ряд Тейлора по  $\omega$  и  $m$  с точностью  $O(\omega^3, m)$ :

$$v_{asym}^2 = \frac{\beta d \omega}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}. \quad (43)$$

Такая же формула описывает скорость изгибной волны в упругой твердой пластине толщиной  $d$  со свободными нижней и верхней границами. Скорость антисимметричной волны пропорциональна  $\sqrt{\omega}$  и стремится к 0 при  $\omega \rightarrow 0$ . Из уравнения (36) следует, что  $u_{3E} \approx u_{3f}$ . Поэтому антисимметричная волна равномерно распределена по всем слоям.

**Волна с горизонтальными колебаниями в срединах твердых слоев и вертикальными колебаниями в срединах жидких слоев** (см. рис. 7, г) формируется нисходящими и восходящими парциальными волнами с амплитудами:  $a_{pd} = a_{pu}$ ,  $a_{sd} = a_{su}$ ,  $b_d = -b_u$ . Для этой волны выполняются соотношения  $t_q = \infty$  и  $r_{22} = 0$ . Ей соответствуют точка E на рис. 3 и 5. Как было отмечено, все однотипные парциальные волны в соседних твердых или соседних жидких слоях для нее имеют противоположную поляризацию.

При низкой частоте  $r_{22} = (1 - v_{PL}^2 p^2) d \omega / (2\eta)$ . Поэтому горизонтальная медленность для этой волны  $p_E = 1/v_{PL}$ .

Амплитуды парциальных волн и ненулевые компоненты векторов поляризации находятся в отношениях

$$a_{pd} : a_{sd} : b_d = (1 - 2\beta^2 p^2) s_\eta : (-2) \alpha \beta \xi p s_\xi : i \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} \eta \xi_1^{-1} r_{12} c_\xi c_\eta c_f, \quad (44)$$

$$u_{1E} : u_{3f} = i \rho_f p : \rho \eta r_{12} c_\xi c_\eta c_f. \quad (45)$$

Выражение (45) можно преобразовать к виду  $u_{1E} : u_{3f} = i \rho c_f : \xi s_\xi s_\eta$ . Учитывая, что значения параметров  $\xi$ ,  $s_\xi$ ,  $s_\eta$  малы, приходим к выводу, что данная волна сосредоточена в твердых слоях. Свойства этой волны близки к свойствам продольной пластинчатой волны, распространяющейся в твердом слое со свободными нижней и верхней границами. Групповая скорость ее примерно равна  $v_{PL}$  и не зависит от частоты.

**Волна с вертикальными колебаниями в срединах твердых слоев и горизонтальными колебаниями в срединах жидких слоев** (см. рис. 7, а) формируется нисходящими и восходящими парциальными волнами с амплитудами:  $a_{pd} = -a_{pu}$ ,  $a_{sd} = -a_{su}$ ,  $b_d = b_u$ . Для этой волны выполняются соотношения  $t_q = \infty$  и  $r_{21} = 0$  и ей соответствует точка H на рис. 3 и 5. Однотипные парциальные волны в соседних твердых или жидких слоях для этой волны имеют противоположную поляризацию. Амплитуды парциальных волн и ненулевые компоненты векторов поляризации находятся в отношениях

$$a_{pd} : a_{sd} : b_d = (1 - 2\beta^2 p^2) c_\eta : (-2) \alpha \beta \xi p c_\xi : (-1) i \alpha \alpha_f^{-1} \rho \rho_f^{-1} \xi r_{11} c_\xi c_\eta c_f, \quad (46)$$

$$u_{3E} : u_{1f} = i \rho_f \left( (1 - 2\beta^2 p^2) c_\eta + 2\beta^2 p^2 c_\xi \right) : \rho \rho_f r_{11} c_\xi c_\eta c_f. \quad (47)$$

Поскольку для этой волны  $r_{21} = 0$ , то  $m_{\eta\xi} = k t_f^{-1}$ . Следовательно,  $r_{11} = (m_{\eta\xi} + k t_f) / \xi \approx k \xi^{-1} t_f^{-1}$ . Поэтому  $u_{3E} : u_{1f} \approx -i \omega \rho h / 2 = -i \pi h / L$ , где  $L$  — длина рассматриваемой волны. В нашем случае  $h \ll L$

и, таким образом, приходим к заключению, что данная волна сосредоточена в твердых слоях.

**Кривая медленности в низкочастотном приближении.** Для частот  $\omega \rightarrow 0$  значения  $\text{tg}(x) \sim x$ . Поэтому можно считать, что  $t_\xi = \omega \xi d/2$ ,  $t_\eta = \omega \eta d/2$ ,  $t_{\xi_f} = \omega \xi_f h/2$ ,  $t_q = \omega q H/2$ . Подставляя эти выражения в формулу (17), получаем уравнение низкочастотной кривой медленности, представленное в статье [Schoenberg, 1984]:

$$q^2(p) = \frac{d\rho + h\rho_f}{H^2} \left[ \frac{h\xi_f^2}{\rho_f} + \frac{d\xi^2}{\rho(1 - v_{PL}^2 p^2)} \right]. \quad (48)$$

Соотношение (48) описывает зависимость  $q(p)$  при  $\omega \rightarrow 0$  для всех горизонтальных медленностей  $p \neq p_E$ , где  $p_E = 1/v_{PL}$ . При  $p \rightarrow p_E + 0$  значение  $q(p_E) \rightarrow +\infty$ . При  $p \rightarrow p_E - 0$  действительного  $q(p)$  не существует.

Для ненулевой частоты  $\omega$  значению  $p = p_E$  соответствует горизонтальная медленность  $p$ , для которой  $r_{22} = 0$ . В этом случае  $t_q = \infty$  и  $q(\omega, p)$  удовлетворяет равенству (18). Следует отметить, что формула (48) не описывает третью моду в связи с тем, что при  $\omega \rightarrow 0$  медленности  $p_F, p_H \rightarrow \infty$ . Однако, в отличие от приближения Бакуса (см. рис. 4), приближение (48) описывает медленную симметричную волну (точка  $C$  на рис. 8).

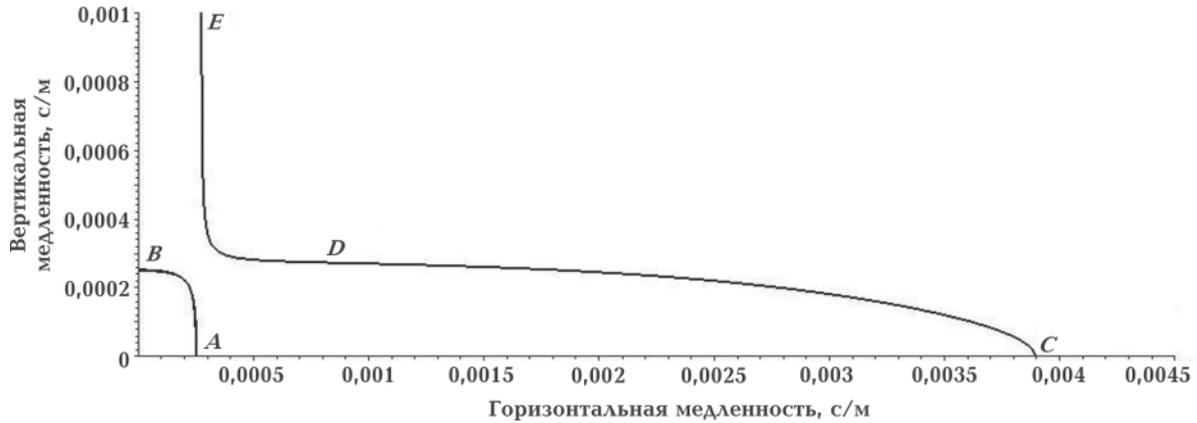


Рис. 8. Кривые медленности для жидкотвердой среды, рассчитанные по формуле (48) низкочастотного приближения.

**Выводы.** Разрывы касательных компонент скоростей смещений и обращение в нуль касательных напряжений на границах между жидкими и твердыми слоями приводят к специфическим свойствам интерференционных волн Флоке, распространяющимся в жидкотвердых периодических средах. В среде возникает большая анизотропия  $qP$ -волн, а  $qSV$ -волны отсутствуют в окрестности вертикального падения. Волны Флоке имеют сложную поляризацию и состав парциальных плоских волн.

В статье исследованы свойства волн Флоке в бинарной периодической жидкотвердой среде. На основе метода, предложенного М. Шонбергом, выведено аналитическое выражение для дисперсионного уравнения, представленное произведением четырех множителей, которые определяют границы зон прохождения и поглощения. Из приведенного представления видно, что при любой низкой ненулевой частоте существуют три моды. При стремлении частоты к нулю третья мода исчезает. Указанное представление также позволяет объяснить расположение зон прохождения, получить кривые медленности и индикатрисы групповых скоростей для любой фиксированной частоты, включая нулевую частоту. Для волн Флоке авторами получены формулы для отношений компонент векторов поляризации и амплитуд парциальных волн в жидких и твердых слоях. Все соотношения относятся к срединам жидких и твердых слоев. С целью упрощения выражений выполнены предельные переходы при стремлении частоты к нулю.

Показано, что обращение в нуль каждого из множителей дисперсионного уравнения соответствует определенной плоской волне, имеющей горизонтальную групповую скорость. В

частности, равенство нулю множителей числителя правой части дисперсионного уравнения соответствует симметричной и антисимметричной модам. Для этих волн фазовая скорость также направлена горизонтально. Равенство нулю множителей знаменателя соответствует двум типам волн: с горизонтальными колебаниями в средине твердых слоев и вертикальными колебаниями в средине жидких слоев, либо наоборот. При небольшой частоте и отношении мощности жидкого слоя к мощности твердого слоя первая из этих волн близка по свойствам к продольной пластинчатой волне [Молотков, Хило, 1983]. Направление фазовых скоростей для волн этого типа не горизонтальное. Поэтому они не описываются методом, предложенным С. М. Рытовым [Рытов, 1956].

Авторами определена граничная частота, начиная с которой на кривой медленности квази-продольных волн появляется область вогнутости. Наличие области вогнутости приводит к появлению каустики на индикатрисе групповых скоростей [Roganov, Stovas, 2011]. Отметим, что в любой анизотропной однородной среде квазипродольные волны каустик не имеют.

Особое внимание уделено случаю, когда мощности жидких слоев на много меньше мощностей твердых слоев. В такой среде совокупность слоев с жидкостью можно интерпретировать как трещиноватость и разработанная теория позволяет изучать свойства распространяющихся в ней волн. Теория продемонстрирована на одном примере.

*В заключение авторы выражают благодарность кандидату технических наук Н. Я. Марма-левскому за полезные и конструктивные беседы в процессе написания статьи.*

**Приложение. Кривая медленности для осреднения Бакуса периодической жидкотвердой среды.** Осреднение Бакуса для жидкотвердой периодической среды выполняется по формулам, относящимся к среде с твердыми слоями [Бреховских, 1973] при условии, что скорость поперечной волны в жидком слое  $\beta_f \rightarrow 0$ . Коэффициенты упругости  $c_{33}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{13}$  осредненной среды находятся по формулам

$$c_{33} = H / \left( \frac{d}{\rho \alpha^2} + \frac{h}{\rho_f \alpha_f^2} \right),$$

$$c_{11} = c_{33} \left( 1 + \frac{4dh\beta^2 (\rho(\alpha^2 - \beta^2) - \rho_f \alpha_f^2)}{H^2 \alpha^2 \rho_f \alpha_f^2} \right),$$

$$c_{13} = \frac{(1 - 2\beta^2 / \alpha^2) d + h}{\frac{d}{\rho \alpha^2} + \frac{h}{\rho_f \alpha_f^2}}.$$

Фазовые скорости  $qP$ - и  $qSV$ -волн являются функциями от фазового угла  $\psi$ :

$$\langle \rho \rangle v_p^2(\psi) = b + \sqrt{b^2 - (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) \sin^2 \psi \cos^2 \psi},$$

$$\langle \rho \rangle v_{SV}^2(\psi) = b - \sqrt{b^2 - (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) \sin^2 \psi \cos^2 \psi},$$

где

$$b = (c_{11} \sin^2 \psi + c_{33} \cos^2 \psi) / 2, \quad \langle \rho \rangle = (\rho d + \rho_f h) / H.$$

Кривые медленности задаются уравнениями

$$q_p(\psi) = \sin(\psi) / v_p(\psi), \quad q_{SV}(\psi) = \sin(\psi) / v_{SV}(\psi).$$

Кривая медленности  $qSV$ -волны имеет вертикальную  $p = \sqrt{\langle \rho \rangle c_{11} / (c_{11}c_{33} - c_{13}^2)}$  и горизонтальную  $q = \sqrt{\langle \rho \rangle c_{33} / (c_{11}c_{33} - c_{13}^2)}$  асимптоты.

Список литературы

- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах (2-е изд.). Москва: Наука, 1973. 343 с.
- Молотков Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. Санкт-Петербург: Наука, 2001. 348 с.
- Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Ленинград: Наука, 1984. 201 с.
- Молотков Л. А. Об особенностях распространения волн в слоистых моделях трещиноватых сред. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1988. Т. 173. № 18. С. 123—133.
- Молотков Л. А. Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1979. Т. 89. С. 219—233.
- Молотков Л. А., Хило А. Е. Исследование распространения трехмерных волн в упругих и упруго-жидких слоистых системах. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1983. Т. 128. № 13. С. 116—129.
- Роганов В. Ю. Моделирование волновых полей для сред с жидкими и анизотропными упругими слоями на основе метода Хаскелла-Томсона. *Геофиз. журн*. 2013. Т. 35. № 3. С. 84—92.
- Рытов С. М. Упругие свойства мелкослоистой среды. *Акуст. журн*. 1956. Т. 2. № 1. С. 71—83.
- Сибиряков Б. П., Максимов Л. А., Татарников М. А. Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах. Новосибирск: Наука, 1980. 72 с.
- Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Москва: Наука, 1972. 720 с.
- Braga A. M., Herrmann G., 1992. Floquet waves in anisotropic periodically layered composites. *J. Acoust. Soc. Am.* 91(3), 1211—1227. <http://dx.doi.org/10.1121/1.402505>.
- Chicone C., 1999. Ordinary Differential Equations with Applications. New York: Springer-Verlag, 561 p.
- Floquet G., 1883. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure* 12, 47—88.
- Haskell N. A., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 43(1), 17—34.
- Korneev V. A., 2011. Krauklis wave in a stack of alternating fluid-elastic layers. *Geophysics* 76(6), N47—N53. <http://dx.doi.org/10.1190/geo2011-0086.1>.
- Norris A. N., Grinfeld M. A., 1995. Nonlinear poroelasticity for a layered medium. *J. Acoust. Soc. Am.* 98(2), 1138—1146. <http://dx.doi.org/10.1121/1.413612>.
- Roganov Yu., Stovas A., 2011. Caustics in a periodically layered transversely isotropic medium with vertical symmetry axis. *Geophys. Prospect.* 59(3), 375—385. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2010.00924.x>.
- Roganov Yu., Stovas A., 2012. Low-frequency wave propagation in periodically layered media. *Geophys. Prospect.* 60(5), 825—837. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.01028.x>.
- Schoenberg M., 1983. Wave propagation in a finely laminated elastoacoustic medium. *Appl. Phys. Lett.* 42(2), 350—352. <http://dx.doi.org/10.1063/1.93929>.
- Schoenberg M., 1984. Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave Motion* 6, 303—320. doi: 10.1016/0165-2125(84)90033-7.
- Thomson W. T., 1950. Transmission of classic waves through a stratified solid material. *J. Appl. Phys.* 21(1), 89—93.

## Wave propagation in periodic fluid-solid layered media

© Yu. V. Roganov, V. Yu. Roganov, 2016

Dispersion equation is derived for the Floquet waves in a horizontal periodically layered fluid-solid medium. It is shown that the dispersion equation consists of four factors. This representation explains the splitting of parameters (frequency, horizontal slowness) in passing and stop bands. The Floquet waves with horizontal group velocity can be computed individually from each of these factors. The properties of horizontally propagated waves are considered. The equations for the ratios of the components of polarization vectors and the amplitudes of partial waves are derived. Proposed theory is illustrated in one numerical example.

**Key words:** periodic fluid-solid medium, dispersion equation, Floquet wave, slowness curve, velocity indicatrix.

### References

- Brekhovskikh L. M., 1973. Waves in layered media. Moscow: Nauka, 343 p. (in Russian).
- Molotkov L. A., 2001. The study of wave propagation in porous and fractured media based on effective models of BIO and layered media. St. Petersburg: Nauka, 348 p. (in Russian).
- Molotkov L. A., 1984. The matrix method in the theory of wave propagation in layered elastic and fluid media. Leningrad: Nauka, 201 p. (in Russian).
- Molotkov L. A., 1988. Wave propagation in laminar models of cracked media. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI* 173(180), 123—133 (in Russian).
- Molotkov L. A., 1979. Equivalence of periodically layered and transversally isotropic media. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI* 89, 219—233 (in Russian).
- Molotkov L. A., Khilo A. E., 1983. The investigation of propagation of three-dimensional waves in stratified elastic and elasticfluid systems. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI* 128 (13), 116—129 (in Russian).
- Roganov V. Yu., 2013. Modeling of wavefields for media with fluid and anisotropic elastic layers based on Haskell-Thomson method. *Geofizicheskiy zhurnal* 35 (3), 84—92 (in Russian).
- Rytov S. M., 1956. The elastic properties of small-layered medium. *Akusticheskiy zhurnal* 2(1), 71—83 (in Russian).
- Sibiryakov B. P., Maksimov L. A., Tatarnikov M. A., 1980. Anisotropy and dispersion of elastic waves in layered periodic structures. Novosibirsk: Nauka, 72 p. (in Russian).
- Yakubovich V. A., Starzhinskiy V. M., 1975. Linear differential equations with periodic coefficients and their applications. Moscow: Nauka, 720 p. (in Russian).
- Braga A. M., Herrmann G., 1992. Floquet waves in anisotropic periodically layered composites. *J. Acoust. Soc. Am.* 91(3), 1211—1227. <http://dx.doi.org/10.1121/1.402505>.
- Chicone C., 1999. Ordinary Differential Equations with Applications. New York: Springer-Verlag, 561 p.
- Floquet G., 1883. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure* 12, 47—88.
- Haskell N. A., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 43(1), 17—34.
- Korneev V. A., 2011. Krauklis wave in a stack of alternating fluid-elastic layers. *Geophysics* 76(6), N47—N53. <http://dx.doi.org/10.1190/geo2011-0086.1>.
- Norris A. N., Grinfeld M. A., 1995. Nonlinear poroelasticity for a layered medium. *J. Acoust. Soc. Am.* 98(2), 1138—1146. <http://dx.doi.org/10.1121/1.413612>.

- Roganov Yu., Stovas A., 2011. Caustics in a periodically layered transversely isotropic medium with vertical symmetry axis. *Geophys. Prospect.* 59(3), 375—385. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2010.00924.x>.
- Roganov Yu., Stovas A., 2012. Low-frequency wave propagation in periodically layered media. *Geophys. Prospect.* 60(5), 825—837. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.01028.x>.
- Schoenberg M., 1983. Wave propagation in a finely laminated elastoacoustic medium. *Appl. Phys. Lett.* 42(2), 350—352. <http://dx.doi.org/10.1063/1.93929>.
- Schoenberg M., 1984. Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave Motion* 6, 303—320. doi: 10.1016/0165-2125(84)90033-7.
- Thomson W. T., 1950. Transmission of classic waves through a stratified solid material. *J. Appl. Phys.* 21(1), 89—93.