DOI 10.15673/2072-9812.1/2014.29098
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(1) 7–15 $d\omega$

О связи конформно плоских и псевдо-конформно-плоских некоторых классов почти контактных метрических многообразий

Анна Вячеславовна Аристархова

Аннотация В работе изучается теория псевдо-конформно-плоских квази-сасакиевых многообразий и многообразий Кенмоцу.

Ключевые слова квази-сасакиевы многообразия, многообразия Кенмоцу, псевдо-конформно-плоские многообразия

УДК 514.76

1 Введение

Геометрия контактно-конформно-полуплоских ([2]) (контактно-автодуальных или контактно-антиавтодуальных) 5-мерных многообразий, снабженных почти контактной структурой, согласованной с метрикой, является контактным аналогом автодуальной геометрии ([3]), ([4],) то есть теории конформно полуплоских ([5]) (автодуальных или антиавто-дуальных) 4-мерных многообразий. Как известно, геометрия конформно полуплоских многообразий связана, например, с твисторной геометрией ([10]), имеющей непосредственное приложение в теории гравитации и в теории полей Янга-Миллса. Богатство же геометрического содержания контактного аналога таких многообразий было продемонстрировано в работе ([2]). При этом, в теории конформно-полуплоских 4-мерных многообразий, известно, что 4-мерное риманово многообразие конформно плоско тогда и только тогда, когда оно одновременно автодуально и антиавто-дуально. В связи с этим, интересно выяснить связь между конформно плоскими многообразиями и многообразиями, которые являются одновременно контактно-автодуальными и контактно-антиавтодуальными (такие многообразия были названы псевдо-конформно-плоскими ([1])).

2 Псевдо-конформно-плоские почти контактные метрические многообразия

Рассмотрим модуль $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей и алгебру $C^\infty(M)$ гладких функций на 5-мерном ориентированном почти контактном метрическом (короче, $\mathcal{AC}$-) многообразии $\left(M^5,\ \Phi,\ \xi,\ \eta,\ g = \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, где Φ – эндоморфизм $C^\infty(M)$-модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*, ξ и η – векторное и ковекторное поля, называемые *характеристическим вектором* и *контактной формой* соответственно, g – билинейная симметричная положительно определенная форма на $\mathfrak{X}(M)$, называемая *римановой структурой*; при этом указанная четверка тензорных полей, удовлетворяет следующим условиям:

$$1)\ \eta(\xi) = 1;\ 2)\ \Phi(\xi) = 0;\ 3)\ \eta\circ\Phi = 0;\ 4)\ \Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta\otimes\xi;$$

$$5)\ \langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\,\eta(Y) \text{ для любых } X,\ Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Кроме этого, хорошо известно ([6]), что в $C^\infty(M)$-модуле $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей на M внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathfrak{l} = -\Phi^2$ и $\mathfrak{m} = \mathrm{id} + \Phi^2$ на 4-мерное фундаментальное распределение $\mathfrak{L} = \mathrm{Ker}\ \eta = \mathrm{Im}\ \Phi$, называемое *контактным распределением*, и на 1-мерное фундаментальное распределение $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker}\ \Phi$ соответственно, причем $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{L}\oplus\mathfrak{M}$. И как раз тот факт, что 5-мерное $\mathcal{AC}$-многообразие M снабжено 4-мерным гиперраспределением $\mathfrak{L}$, позволил определить стандартным образом понятия автодуальных и антиавтодуальных 2-форм на $\mathfrak{L}$.

Определение 1 *Если* $*(\omega) = \omega$ *для* $\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{L})$, *то 2-форма* ω *называется автодуальной формой; если же* $*(\omega) = -\omega$, *то 2-форма* ω *называется антиавтодуальной формой, где* $* :\ \Lambda_2(\mathfrak{L}) \to \Lambda_2(\mathfrak{L})$ *- оператор Ходжа, в данных условиях, являющийся инволюцией, а значит разлагающий модуль* $\Lambda_2(\mathfrak{L})$ *дифференциальных 2-форм на* $\mathfrak{L}$ *в прямую сумму двух 3-мерных подмодулей:* $\Lambda_2(\mathfrak{L}) = \Lambda^+(\mathfrak{L})\oplus\Lambda^-(\mathfrak{L})$ *– подмодулей автодуальных и антиавтодуальных 2-форм на* $\mathfrak{L}$, *соответственно.*

Напомним, что к 5-мерному $\mathcal{AC}$-многообразию M внутренним образом присоединяется G-структура, тотальное пространство которой состоит из *A-реперов* и которая называется *присоединенной G-структурой*. Заметим, что 2-форма $\mathfrak{l}^*(\omega)$, являющаяся антиувлечением 2-формы $\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{L})$ при отображении $\mathfrak{l}$, представляет собой ни что иное как 2-форму на многообразии M, то есть $\mathfrak{l}^*(\omega) \in \Lambda_2(M)$. Компоненты таких 2-форм на пространстве присоединенной G-структуры 5-мерного $\mathcal{AC}$-многообразия M найдены в работе ([2]).

И, наконец, рассматривая классический тензор C Вейля как эндоморфизм модуля $\Lambda_2(M)$ дифференциальных 2-форм на M, было замечено ([2]), что в данном случае, он внутренним образом определяет эндоморфизм $\mathfrak{C}$ модуля $\Lambda_2(\mathfrak{L})$ дифференциальных 2-форм на $\mathfrak{L}$, задаваемый одной из трех эквивалентных формул:

$$\begin{aligned} &1)\mathfrak{C} = \mathbf{i}^* \circ C \circ \mathfrak{l}^*, \\ &2)\mathfrak{C}(\omega) = C(\mathfrak{l}^*\omega)|_{\mathfrak{L}}, \\ &3)\mathfrak{C}(\omega)_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta kl}(\mathfrak{l}^*\omega)^{kl}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{i}$ – естественное вложение $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}(M)$, а $C(\mathfrak{l}^*\omega)|_{\mathfrak{L}}$ – сужение 2-формы $C(\mathfrak{l}^*\omega) \in \Lambda_2(M)$ на $\mathfrak{L}$. Напомним, что тензор Вейля (называемый также *тензором конформной кривизны многообразия* M) в терминах своих ковариантных компонент вычисляется по формуле (при $\dim M = 5$):

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{3}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{ik} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{\kappa}{12}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

где $\left\{R^i_{jkl}\right\}$ – компоненты тензора R кривизны римановой связности ∇ метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, называемого *тензором Римана-Кристоффеля*, $\left\{r_{ij} = R^k_{ijk}\right\}$ – компоненты *тензора Риччи*, $\kappa = g^{ij}r_{ij}$ – *скалярная кривизна многообразия* M. Причем, здесь и везде далее, условимся, что $a,b,c,d,h = \overline{1,2}$, $i,j,k,l = \overline{0,1,2,\hat{1},\hat{2}}$, $\alpha,\beta = \overline{1,2,\hat{1},\hat{2}}$, $\hat{a} = a+2$, $\hat{\hat{a}} = a$.

Учитывая последнее, на 5-мерных $\mathcal{AC}$-многообразиях внутренним образом были определены понятия контактной автодуальности и контактной антиавтодуальности ([2]).

Определение 2 *5-мерное $\mathcal{AC}$-многообразие будем называть контактно-автодуальным (короче, $\mathcal{C}$-автодуальным) многообразием, если $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$. Аналогично, 5-мерное $\mathcal{AC}$-многообразие будем называть контактно-антиавтодуальным (короче, $\mathcal{C}$-антиавтодуальным) многообразием, если $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ для любых 2-форм $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$.*

Определение 3 *5-мерное $\mathcal{AC}$-многообразие будем называть псевдо-конформно-плоским, если оно является одновременно контактно-автодуальным и контактно-антиавтодуальным.*

3 Псевдо-конформно-плоские квази-сасакиевы многообразия

Рассмотрим 5-мерные квази-сасакиевы (короче, QS-) многообразия ([8]), являющиеся обширным подклассом $\mathcal{AC}$-многообразий. Напомним ([2]), что существенные компоненты тензора C конформной кривизны на пространстве присоединенной G-структуры QS-многообразия, имеют вид:

$$1)C_{\hat{a}b\hat{c}d}=-A^{ac}_{bd}+2B^a_bB^c_d+B^a_dB^c_b-\frac{1}{3}\left(\left(2B^a_hB^h_d-A^{ah}_{dh}\right)\delta^c_b+\left(2B^c_hB^h_b-A^{ch}_{bh}\right)\delta^a_d\right)+\frac{\kappa}{12}\delta^a_d\delta^c_b;$$

$$2)C_{ab\hat{c}\hat{d}}=2B^{[c}_aB^{d]}_b+\frac{1}{3}\left(\left(2B^c_hB^h_a-A^{ch}_{ah}\right)\delta^d_b+\left(2B^d_hB^h_b-A^{dh}_{bh}\right)\delta^c_a-\right).$$

$$-\left(2B^d_hB^h_a-A^{dh}_{ah}\right)\delta^c_b-\left(2B^c_hB^h_b-A^{ch}_{bh}\right)\delta^d_a\right)-\frac{\kappa}{12}\delta^{cd}_{ab},\text{где }\delta^{cd}_{ab}=\delta^c_a\delta^d_b-\delta^c_b\delta^d_a;$$

$$3)C_{a0\hat{b}c}=-B^b_{ac}+\frac{1}{3}B^h_{ch}\delta^b_a;\ 4)C_{\hat{a}0\hat{b}c}=-B^{ab}_c+\frac{1}{3}B^{bh}_h\delta^a_c;$$

$$5)C_{a0\hat{b}\hat{c}}=\frac{1}{3}\left(B^{bh}_h\delta^c_a-B^{ch}_h\delta^b_a\right);\ 6)C_{\hat{a}0bc}=\frac{1}{3}\left(B^h_{ch}\delta^a_b-B^h_{bh}\delta^a_c\right);$$

$$7)C_{a0\hat{b}0}=\frac{5}{3}B^b_hB^h_a-\frac{1}{3}A^{bh}_{ah}-\frac{1}{3}\left(2B^c_hB^h_c+\frac{\kappa}{4}\right)\delta^b_a, \tag{2}$$

где набор функций $\{B^a_b\}$ является набором компонент комплексного тензорного поля B типа (1,1) на M, называемого *структурным тензором первого рода*, а система функций $\{A^{ac}_{bd}\}$ определяет тензорное поле A типа (2,2), называемое *структурным тензором второго рода* или *тензором голоморфной секционной кривизны квази-сасакиева многообразия*. Кроме того, имеют место тождества вида: 1) $dB^a_b+B^h_b\omega^a_h-B^a_h\omega^h_b=B^a_{bc}\omega^c+B^{ac}_b\omega_c$; 2) $B^a_{[bc]}=B^{[ac]}_b=0$; 3) $\overline{B^a_{bc}}=-B^{bc}_a$, где $\omega=\omega^0$, $\omega_i=g_{ij}\omega^j$, $\{\omega^i\}$, $\{\omega^i_j\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности ∇, соответственно, а $\{B^a_{bc};B^{ac}_b\}$ – подходящие функции на пространстве присоединенной G-структуры; по индексам, заключенным в квадратные скобки, подразумевается альтернирование.

В работе ([2]) доказаны аналитический критерий контактной автодуальности квази-сасакиевых многообразий и необходимое условие их контактной антиавтодуальности.

Теорема 1 *5-мерное квази-сасакиево многообразие M контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры*

$$A^{ac}_{bd}=2B^a_bB^c_d+B^a_dB^c_b+\left(B^a_hB^h_b-B^a_bB^h_h\right)\delta^c_d+\left(B^c_hB^h_b-\frac{1}{2}B^f_hB^h_f\delta^c_b\right)\delta^a_d+$$

$$+\left(B^a_hB^h_d-\frac{1}{2}B^f_hB^h_f\delta^a_d\right)\delta^c_b-\frac{1}{3}\left(B^f_hB^h_f+\frac{\kappa}{4}\right)\tilde{\delta}^{ac}_{bd},\ \textit{где }\tilde{\delta}^{ac}_{bd}=\delta^a_b\delta^c_d+\delta^a_d\delta^c_b.$$

Теорема 2 *Если 5-мерное квази-сасакиево многообразие M контактно-антиавтодуально, то его скалярная кривизна κ на пространстве присоединенной G-структуры вычисляется по формуле:* $\kappa = 2B^b_a B^a_b - 6B^a_a B^b_b$.

Легко видеть ([7]), что на пространстве присоединенной G-структуры QS-многообразия матрица компонент тензора $\mathcal{B} = \nabla\xi$ имеет вид:

$$\left(\mathcal{B}^i_j\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & B^a_b & 0 \\ & 0 & -\left(B^a_b\right)^T \end{array}\right),$$

а тензор $\nabla\mathcal{B}$ имеет следующие существеннные компоненты:

$$1)\ \mathcal{B}^a_{b,c} = B^a_{bc};\ 2)\ \mathcal{B}^a_{b,\widehat{c}} = B^{ac}_b;\ 3)\ \mathcal{B}^a_{0,b} = -B^a_h B^h_b;\ 4)\ \mathcal{B}^0_{b,\widehat{c}} = B^h_b B^c_h, \qquad (3)$$

где $\left\{\mathcal{B}^i_{j,k}\right\}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензора $\mathcal{B}$ в римановой связности. Остальные компоненты тензора $\nabla\mathcal{B}$ равны нулю или получаются из (3) с учетом вещественности указанного тензора.

Известно ([7]), что QS-многообразие M называется *многообразием класса* CR_1, если для любых $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ выполняется соотношение $R\left(\xi, \Phi^2 X\right)\Phi^2 Y - R\left(\xi, \Phi X\right)\Phi Y = 0$. При этом, QS-многообразие M является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда на нем выполняется тождество $\nabla_{\Phi^2 X}(\mathcal{B})\Phi^2 X - \nabla_{\Phi X}(\mathcal{B})\Phi X = 0$, которое, в свою очередь, равносильно соотношениям вида $B^a_{bc} = B^{ac}_b = 0$.

Итак, пусть M – 5-мерное псевдо-конформно-плоское QS-многообразие класса CR_1. Тогда, $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ или $C_{\alpha\beta kl}\left(\mathfrak{l}^*\omega\right)^{kl} = 0$ для любой $\omega \in \Lambda_2(\mathfrak{L})$, то есть $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Учитывая полученное и соотношения (2), получаем, что $C_{\hat{a}b\hat{c}d} = 0$ и $C_{ab\hat{c}\hat{d}} = 0$. В силу того, что M – QS-многообразие класса CR_1, замечаем, что $C_{a0\hat{b}\hat{c}} = C_{\hat{a}0bc} = C_{a0\hat{b}c} = C_{\hat{a}0\hat{b}c} = 0$. Далее, по условию M – 5-мерное псевдо-конформно-плоское QS-многообразие, а значит, учитывая теорему 1 и теорему 2, имеем:

$$1)\ A^{ac}_{bd} = 2B^a_b B^c_d + B^a_d B^c_b + \left(B^a_h B^h_b - B^a_b B^h_h\right)\delta^c_d + \left(B^c_h B^h_b - \frac{1}{2}B^f_h B^h_f \delta^c_b\right)\delta^a_d +$$

$$+\left(B^a_h B^h_d - \frac{1}{2}B^f_h B^h_f \delta^a_d\right)\delta^c_b - \frac{1}{3}\left(B^f_h B^h_f + \frac{\kappa}{4}\right)\tilde{\delta}^{ac}_{bd},\ \text{где}\ \tilde{\delta}^{ac}_{bd} = \delta^a_b\delta^c_d + \delta^a_d\delta^c_b;$$

$$2)\ \kappa = 2B^b_a B^a_b - 6B^a_a B^b_b.$$

Свернем первое тождество по индексам d и c:

$$A^{ac}_{bc} = 5B^a_h B^h_b - 2B^c_h B^h_c \delta^a_b - \frac{\kappa}{4}\delta^a_b. \qquad (4)$$

Наконец, с учетом указанных выше тождеств и соотношений (4), получаем, что $C_{a0\hat{b}0} = \frac{5}{3}B^b_h B^h_a - \frac{5}{3}B^b_h B^h_a + \frac{2}{3}B^c_h B^h_c \delta^b_a - \frac{2}{3}B^c_h B^h_c \delta^b_a + \frac{\kappa}{12}\delta^b_a - \frac{\kappa}{12}\delta^b_a = 0$. А значит, тензор Вейля $C = 0$. Таким образом, доказано, что если 5-мерное QS-многообразие класса CR_1 псевдо-конформно-плоско, то оно конформно плоско.

Обратно, очевидно, верно, в силу определения конформно плоских многообразий.

Итак, доказана теорема.

Теорема 3 *5-мерное QS-многообразие класса CR_1 псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

Наиболее изученными примерами QS-многообразий являются косимплектические и сасакиевы многообразия ([8]). В силу того ([7]), что косимплектические и сасакиевы многообразия являются многообразиями класса CR_1, немедленно получаем следующие следствия из теоремы 3.

Теорема 4 *5-мерное косимплектическое многообразие псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

Теорема 5 *5-мерное сасакиево многообразие псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

4 Псевдо-конформно-плоские многообразия Кенмоцу

Напомним ([9]), что почти контактные метрические структуры, характеризуемые для любых гладких векторных полей X и Y тождеством $\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi X$, где ∇ – риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, называются *структурами Кенмоцу*. Многообразия, на которых фиксирована структура Кенмоцу, называются *многообразиями Кенмоцу*.

Заметим, что скалярная кривизна κ на пространстве присоединенной G-структуры 5-мерного многообразия Кенмоцу подсчитывается по формуле

$$\kappa = -2A^{ac}_{ac} - 20. \tag{5}$$

Существенные компоненты тензора C конформной кривизны на пространстве присоединенной G-структуры 5-мерного многообразия Кенмоцу имеют вид:

$$\begin{aligned}
&1)\ C_{\hat{a}b\hat{c}d} = -A^{ac}_{bd} + \frac{1}{3}\left(A^{ah}_{dh}\delta^c_b + A^{ch}_{bh}\delta^a_d\right) + \frac{20+\kappa}{12}\delta^a_d\delta^c_b;\\
&2)\ C_{ab\hat{c}\hat{d}} = \frac{1}{3}\left(A^{dh}_{ah}\delta^c_b + A^{ch}_{bh}\delta^d_a - A^{ch}_{ah}\delta^d_b - A^{dh}_{bh}\delta^c_a\right) - \frac{20+\kappa}{12}\delta^{cd}_{ab};\\
&3)\ C_{a0\hat{b}0} = -\frac{1}{3}A^{bc}_{ac} - \frac{20+\kappa}{12}\delta^b_a;\ C_{\hat{a}0b0} = -\frac{1}{3}A^{ac}_{bc} - \frac{20+\kappa}{12}\delta^a_b,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\delta_{ab}^{cd} = \delta_a^c\delta_b^d - \delta_b^c\delta_a^d$.

Пусть M – произвольное $\mathcal{C}$-автодуальное многообразие Кенмоцу и пусть $\omega \in \Lambda^-(\mathfrak{L})$. Тогда, согласно определению 2 и соотношениям (1), $\mathfrak{C}(\omega) = 0$ или $C_{\alpha\beta kl}(\mathfrak{l}^*\omega)^{kl} = 0$. Это возможно, когда $C_{\alpha\beta\hat{c}d}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}d} = 0$, то есть если $C_{\hat{a}b\hat{c}d}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}d} = 0$. А значит получаем, что $C_{\hat{a}b\hat{1}1} = C_{\hat{a}b\hat{2}2}$ и $C_{\hat{a}b\hat{1}2} = C_{\hat{a}b\hat{2}1} = 0$. С другой стороны,

$$C_{\hat{a}b\hat{c}c} = -\frac{1}{3}A_{bh}^{ah} + \frac{20+\kappa}{12}\delta_b^a.$$

Следовательно, $C_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\frac{1}{6}A_{bh}^{ah}\delta_d^c + \frac{20+\kappa}{24}\delta_b^a\delta_d^c$. В силу соотношений (6), наконец, получаем:

$$A_{bd}^{ac} = \frac{1}{3}A_{dh}^{ah}\delta_b^c + \frac{1}{3}A_{bh}^{ch}\delta_d^a + \frac{20+\kappa}{12}\delta_d^a\delta_b^c + \frac{1}{6}A_{bh}^{ah}\delta_d^c - \frac{20+\kappa}{24}\delta_b^a\delta_d^c. \tag{7}$$

Альтернируем тождество (7) по индексам b и d:

$$\frac{1}{6}\left(A_{bh}^{ch}\delta_d^a - A_{dh}^{ch}\delta_b^a\right) + \frac{1}{12}\left(A_{dh}^{ah}\delta_b^c - A_{bh}^{ah}\delta_d^c\right) - \frac{20+\kappa}{16}\delta_{bd}^{ac} = 0,$$

где $\delta_{bd}^{ac} = \delta_b^a\delta_d^c - \delta_d^a\delta_b^c$. Свернем полученное тождество по индексам d и c, учитывая соотношение (5):

$$A_{bh}^{ah} = -\frac{20+\kappa}{4}\delta_b^a. \tag{8}$$

При этом с учетом (7) и (8), можно заключить, что

$$A_{bd}^{ac} = -\frac{20+\kappa}{12}\tilde{\delta}_{bd}^{ac}, \tag{9}$$

где $\tilde{\delta}_{bd}^{ac} = \delta_b^a\delta_d^c + \delta_d^a\delta_b^c$ – симметричная кронекеровская дельта 2-го порядка.

Обратно, с учетом соотношений (9), получаем:

$$C_{\hat{a}b\hat{c}d}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}d} = \frac{20+\kappa}{12}\delta_b^a\delta_d^c(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}d} = 0.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 6 *5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется соотношение:*

$$A_{bd}^{ac} = -\frac{20+\kappa}{12}\tilde{\delta}_{bd}^{ac}, \ \textit{где}\ \tilde{\delta}_{bd}^{ac} = \delta_b^a\delta_d^c + \delta_d^a\delta_b^c.$$

Пусть теперь M – произвольное $\mathcal{C}$-антиавтодуальное многообразие Кенмоцу. Тогда, если $\omega \in \Lambda^+(\mathfrak{L})$, то $\mathfrak{C}(\omega) = 0$. Это возможно, когда $C_{\alpha\beta cd}(\mathfrak{l}^*\omega)^{cd} + 2C_{\alpha\beta\hat{c}d}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}d} + C_{\alpha\beta\hat{c}\hat{d}}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} = 0$, то есть когда:

$$C_{ab\hat{c}\hat{d}}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}\hat{d}} = 0 \text{ и } C_{\hat{a}b\hat{c}d}(\mathfrak{l}^*\omega)^{\hat{c}d} = 0.$$

1) Рассмотрим $C_{ab\hat{c}\hat{d}}\left(\mathfrak{l}^{*}\omega\right)^{\hat{c}\hat{d}}=0$. Это тождество можно записать в виде

$$\left(C_{ab\hat{1}\hat{2}}-C_{ab\hat{2}\hat{1}}\right)\left(x+z\sqrt{-1}\right)=0.$$

В силу произвола выбора $x,z\in\mathbb{R}$ и в силу свойств симметрии тензора C, имеем, что $C_{ab\hat{c}\hat{d}}=0$, то есть

$$\frac{1}{3}\left(A_{ah}^{dh}\delta_{b}^{c}+A_{bh}^{ch}\delta_{a}^{d}-A_{ah}^{ch}\delta_{b}^{d}-A_{bh}^{dh}\delta_{a}^{c}\right)-\frac{20+\kappa}{12}\delta_{ab}^{cd}=0,$$

где $\delta_{ab}^{cd}=\delta_{a}^{c}\delta_{b}^{d}-\delta_{b}^{c}\delta_{a}^{d}$. Свертывая сначала данное тождество по индексам b и d, а затем полученное соотношение по индексам a и c, приходим к тому, что $\kappa=-20$.

2) Рассмотрим $C_{\hat{a}b\hat{c}d}\left(\mathfrak{l}^{*}\omega\right)^{\hat{c}d}=0$. Это тождество можно записать в виде

$$\left(C_{\hat{a}b\hat{1}1}+C_{\hat{a}b\hat{2}2}\right)y\sqrt{-1}=0.$$

В силу произвола выбора $y\in\mathbb{R}$, имеем, что $C_{\hat{a}b\hat{c}c}=0$, то есть

$$-A_{bc}^{ac}+\frac{1}{3}\left(A_{ch}^{ah}\delta_{b}^{c}+A_{bh}^{ch}\delta_{c}^{a}\right)+\frac{20+\kappa}{12}\delta_{b}^{a}=0,$$

то есть $\frac{20+\kappa}{12}\delta_{b}^{a}-\frac{1}{3}A_{bc}^{ac}=0$. Свернув последнее тождество по индексам a и b, получим, что $\kappa=-20$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 7 *Если 5-мерное многообразие Кенмоцу контактно-антиавтодуально, то его скалярная кривизна $\kappa=-20$.*

Наконец, пусть 5-мерное многообразие Кенмоцу M псевдо-конформно-плоско, то есть одновременно $\mathcal{C}$-автодуально и $\mathcal{C}$-антиавтодуально. Тогда, в силу теоремы 6 и теоремы 7, имеем: $A_{bd}^{ac}=-\frac{20+\kappa}{12}\tilde{\delta}_{bd}^{ac}$, $\kappa=-20$, где $\tilde{\delta}_{bd}^{ac}=\delta_{b}^{a}\delta_{d}^{c}+\delta_{d}^{a}\delta_{b}^{c}$. Учитывая последние соотношения, замечаем, что:

$$\begin{aligned}
&1)\ C_{\hat{a}b\hat{c}d}=-A_{bd}^{ac}+\frac{1}{3}\left(A_{dh}^{ah}\delta_{b}^{c}+A_{bh}^{ch}\delta_{d}^{a}\right)+\frac{20+\kappa}{12}\delta_{d}^{a}\delta_{b}^{c}=\frac{20+\kappa}{12}\delta_{b}^{a}\delta_{d}^{c}=0;\\
&2)\ C_{ab\hat{c}\hat{d}}=\frac{1}{3}\left(A_{ah}^{dh}\delta_{b}^{c}+A_{bh}^{ch}\delta_{a}^{d}-A_{ah}^{ch}\delta_{b}^{d}-A_{bh}^{dh}\delta_{a}^{c}\right)-\frac{20+\kappa}{12}\delta_{ab}^{cd}=0;\\
&3)\ C_{a0\hat{b}0}=-\frac{1}{3}A_{ac}^{bc}-\frac{20+\kappa}{12}\delta_{a}^{b}=\frac{20+\kappa}{12}\delta_{a}^{b}-\frac{20+\kappa}{12}\delta_{a}^{b}=0;\\
&4)\ C_{\hat{a}0b0}=-\frac{1}{3}A_{bc}^{ac}-\frac{20+\kappa}{12}\delta_{b}^{a}=\frac{20+\kappa}{12}\delta_{a}^{b}-\frac{20+\kappa}{12}\delta_{a}^{b}=0.
\end{aligned}\tag{10}$$

А значит, в силу (10), M – конформно плоско. Обратно, очевидно, верно, в силу определения конформно плоских многообразий.

Итак, доказана теорема.

Теорема 8 *5-мерное многообразие Кенмоцу псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

И все же, не смотря на тенденциозность полученных результатов, мы смеем предположить, что в общем случае псевдо-конформная плоскость 5-мерного почти контактного метрического многообразия не будет равносильна его конформной плоскости.

Список литературы

1. А. В. Аристархова. О псевдоконформно-плоских и псевдоплоских квази-сасакиевых многообразиях // Изв. вузов. Матем. 12, (2009), С. 69-73.
2. А. В. Аристархова, В. Ф. Кириченко. Контактно-автодуальная геометрия 5-мерных квази-сасакиевых многообразий // Матем. заметки. 90: 5, (2011), С. 643-658.
3. О. Е. Арсеньева. Автодуальная геометрия обобщенных келеровых многообразий // Математический сборник. 184: 8, (1993), С.137-148.
4. О. Е. Арсеньева, В. Ф. Кириченко. Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Математический сборник. 189: 1, (1998), С. 21-44.
5. А. Бессе. Многообразия Эйнштейна // Москва, Мир, (1990), Т. 1-2, 704 с.
6. В. Ф. Кириченко. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Москва, МПГУ, (2003), 495 с.
7. В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Математический сборник. 193: 8, (2002), С.71-100.
8. D. E. Blair. The theory of quasi-sasakian structures // J. Diff. Geom. 1, (1967), P.331-345.
9. K. Kenmotsu. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 24, (1972), P. 93-103.
10. R. Penrose. The twistor programme // Math. Phis. Repts. 12, (1977), P.65-76.

Анна Вячеславовна Аристархова
МИИГАиК, Москва, Россия
E-mail: aristarhowa@gmail.com

Anna V. Aristarkhova

Connection between conformally flat and pseudo-conformally-flat some classes of almost contact metric manifolds

In this paper we consider a theory of pseudo-conformally-flat quasi-Sasakian manifolds and Kenmotsu manifolds.