DOI 10.15673/2072-9812.1/2014.29276
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(1) 41–52 $d\omega$

Конформные проективные инварианты в проблеме распознавания образов

Надежда Григорьевна Коновенко
http://orcid.org/0000-0002-8631-0688

Аннотация В работе приводится локальная классификация дифференциальных 1-форм на плоскости относительно группы $SL_2(\mathbb{C})$ конформных дробно-линейных преобразований. Найдено поле рациональных конформных дифференциальных инвариантов, которое порождается двумя инвариантными дифференцированиями, а также дифференциальными инвариантами 1-го и 2-го порядков.

Ключевые слова Конформные дифференциальные инварианты, дифференциальные 1-формы, джеты дифференциальных форм.

УДК 517.956.4

1 Введение

В работе ([3]) Мамфорд Д. и Шарон Е. предложили схему для определения форм гладких кривых, ограничивающих связные и односвязные области на плоскости.

В этой работе мы предлагаем аналогичную схему для распознавания форм областей на плоскости, оснащенных некоторой геометрической структурой. Более конкретно мы рассматриваем ситуацию, когда внутри односвязной области, ограниченной гладкой кривой, задана дифференциальная 1-форма. Соответствующее расслоение нулей, задает расслоение рассматриваемой области интегральными кривыми, и проблема распознавания таких образов крайне важна в приложениях. Отметим также, что похожие ситуации возникают и в нейрогеометрии (так называемые pinwheels), при рассмотрении математических моделей, описывающих передачу зрительной информации в кору головного мозга.

Итак, рассмотрим пару (D, θ), где D - связная и односвязная область на плоскости, ограниченная гладкой кривой, а θ - дифференциальная 1-форма. В качестве стандартной или модельной области мы выбираем внутренность круга.

По теореме Римана существует конформное отображение $\varphi : K \to D$ круга K на область D. При этом дифференциальная форма θ на D переходит в дифференциальную 1-форму $\varphi^*(\theta)$ на K. Если заданы две пары (D, θ) и $(\widetilde{D}, \widetilde{\theta})$, то применяя конформные преобразования φ и $\widetilde{\varphi}$ мы приходим к ситуации, когда заданы два круга K и $\widetilde{K}$ и две дифференциальные формы $\varphi^*(\theta)$ и $\widetilde{\varphi}^*(\widetilde{\theta})$ на круге K и $\widetilde{K}$ соответственно. Две такие формы считаются эквивалентными, если они переводятся друг в друга конформно дробно линейными преобразованиями.

В этой работе мы приводим локальную классификацию дифференциальных 1-форм на плоскости относительно группы $SL_2(\mathbb{C})$ конформных дробно линейных преобразований. Для этого мы находим поле рациональных конформных дифференциальных инвариантов. Именно такие инварианты, согласно ([2]), разделяют регулярные орбиты.

Мы показываем, что это поле порождается двумя инвариантными дифференцированиями, а также двумя дифференциальными инвариантами 1-го порядка и двумя инвариантами 2-го порядка. Это приводит к конформной классификации регулярных дифференциальных форм.

2 Геометрия дифференциальных 1-форм

Каждую дифференциальную 1-форму

$$\theta = a(x,y)dx + b(x,y)dy,$$

заданную на плоскости мы отождествляем с сечением S_θ кокасательного расслоения
$\tau^* : T^*\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

В канонических координатах (x, y, u, v) в $T^*\mathbb{R}^2$ это сечение имеет вид:

$$u = a(x,y), \qquad v = b(x,y).$$

Соответствие между дифференциальными 1-формами θ и сечениями кокасательного расслоения реализуется универсальной формой Лиувилля

$$\omega = udx + vdy$$

и следующим соотношением: $S^*_\theta(\omega)=\theta$.

Каждое векторное поле

$$X=A(x,y)\partial_x+B(x,y)\partial_y$$

на плоскости допускает естественное поднятие в кокасательное расслоение. А именно, обозначим через $H=Au+Bv$ - гамильтониан векторного поля X и пусть

$$H_u\frac{\partial}{\partial x}+H_v\frac{\partial}{\partial y}-H_x\frac{\partial}{\partial u}-H_y\frac{\partial}{\partial v}$$

- соответствующее гамильтоново векторное поле.

Мы обозначим это векторное поле через $\overline{X}$ и назовем поднятием векторного поля X в кокасательное расслоение.

В канонических координатах это поле имеет вид:

$$\overline{X}=A\partial x+B\partial y-(A_xu+B_xv)\partial_u-(A_yu+B_yv)\partial_v. \tag{1}$$

Заметим, что операция поднятия обладает следующими свойствами:

$$\overline{X+Y}=\overline{X}+\overline{Y},$$

$$\overline{\lambda X}=\lambda\overline{X},$$

$$\overline{[X,Y]}=[\overline{X},\overline{Y}].$$

Таким образом, каждая алгебра Ли векторных полей на плоскости естественным образом поднимается до алгебры Ли в кокасательном расслоении.

Рассмотрим группу $SL_2(\mathbb{C})$ дробно линейных преобразований плоскости:

$$z\to\frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}},$$

где матрица

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbf{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Этому действию соответствует представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, которую мы рассматриваем как вещественную алгебру Ли, следующими векторными полями:

$$\begin{gathered}X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\\ X_3=x\partial_x+y\partial_y,\quad X_4=-y\partial_x+x\partial_y,\\ X_5=(x^2-y^2)\partial_x+2xy\partial_y,\quad X_6=2xy\partial_x+(-x^2+y^2)\partial_y.\end{gathered}$$

Воспользовавшись формулой (1), мы получаем поднятие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в $T^*\mathbb{R}^2$.

$$\overline{X}_1 = \partial_x, \quad \overline{X}_2 = \partial_y,$$
$$\overline{X}_3 = x\partial_x + y\partial_y - (u\partial_u + v\partial_v), \quad \overline{X}_4 = -y\partial_x + x\partial_y - (v\partial_u + u\partial_v),$$
$$\overline{X}_5 = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y - 2(xu + yv)\partial_u + 2(yu - xv)\partial_v,$$
$$\overline{X}_6 = 2xy\partial_x + (-x^2 + y^2)\partial_y + 2(xv - yu)\partial_u - 2(xu + yv)\partial_v.$$

3 Конформные дифференциальные инварианты

Обозначим через $J^k = J^k(\tau^*)$ пространство джетов сечений кокасательного расслоения и пусть $X^{(k)}$ - поднятие векторного поля $\overline{X}$ в пространство k-джетов.

Канонические координаты в пространстве k-джетов обозначаются стандартным образом $(x, y, u, v, u_x, v_x, \ldots)$.

Рациональную функцию f, заданную на пространстве k-джетов, мы называем конформным (рациональным) дифференциальным инвариантом, порядка $\leq k$, если $X^{(k)}(f) = 0$, для всех векторных полей $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Отметим, что множество всех конформных дифференциальных инвариантов образует поле.

3.1 Дифференциальные инварианты нулевого порядка

В пространстве $J^0 = T^*\mathbb{R}^2$ имеется две $SL_2(\mathbb{C})$-орбиты: регулярная и сингулярная.

Пусть $t = u^2 + v^2$. Тогда регулярная орбита состоит из всех точек (x, y, u, v) кокасательного расслоения, где $t \neq 0$, а сингулярная орбита дается уравнением $t = 0$.

Следовательно, все дифференциальные инварианты нулевого порядка являются константами.

С другой стороны, элементы группы $SL_2(\mathbb{C})$ являются голоморфными преобразованиями и тем самым сохраняют стандартную комплексную структуру на плоскости:

$$I = \partial_y \otimes dx - \partial_x \otimes dy.$$

Кроме того, элементы $SL_2(\mathbb{C})$ сохраняют форму Лиувилля ω и следовательно ее образ $I\omega$:

$$\widetilde{\omega} = (I\omega) = -vdx + udy.$$

Отметим, что формы ω и $\widetilde{\omega}$ линейно независимы в точках регулярной орбиты и тем самым образуют $SL_2(\mathbb{C})$-инвариантный корепер.

Репер, двойственный к этому кореперу определяет инвариантные дифференцирования:

$$\delta = t^{-1}\left(u\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy}\right),$$
$$\widetilde{\delta} = t^{-1}\left(-v\frac{d}{dx} + u\frac{d}{dy}\right).$$

Отметим так же, что горизонтальные формы:

$$\Omega = \omega \wedge \widetilde{\omega} = t dx \wedge dy$$

и

$$g = \omega^2 + \widetilde{\omega}^2 = t\big(dx^2 + dy^2\big)$$

являются $SL_2(\mathbb{C})$-инвариантами.

3.2 Дифференциальные инварианты первого порядка

Несложно проверить, что инвариантные дифференцирования δ и $\widetilde{\delta}$ удовлетворяют следующему коммутационному соотношению:

$$[\delta, \widetilde{\delta}] = J_1\delta + J_2\widetilde{\delta},$$

где функции

$$J_1 = \frac{-v_x + u_y}{u^2 + v^2}, \qquad J_2 = \frac{u_x + v_y}{u^2 + v^2} \tag{2}$$

являются конформными дифференциальными инвариантами первого порядка.

Из коммутационных соотношений следует, что для двойственного корепера выполняются следующие структурные уравнения:

$$\begin{cases} \widehat{d}\omega + J_1\Omega = 0, \\ \widehat{d}\widetilde{\omega} - J_2\Omega = 0, \end{cases}$$

где $\widehat{d}$ - оператор полного дифференциала.

Назовем элемент пространства J^1 регулярным, если $t \neq 0$, $J_1 \neq 0$, $J_2 \neq 0$. В противном случае элемент называется сингулярным. Соответственно, $SL_2(\mathbb{C})$ орбиты, проходящие через регулярный элемент, мы называем регулярными, а через сингулярный элемент - сингулярными.

Теорема 1 *Дифференциальные инварианты J_1 и J_2 разделяют регулярные $SL_2(\mathbb{C})$ орбиты в пространстве J^1.*

3.3 Дифференциальные инварианты второго порядка

Применяя инвариантные дифференцирования δ и $\widetilde{\delta}$ к инвариантам первого порядка J_1 и J_2 мы получаем четыре независимых инварианта второго порядка:

$$\delta(J_1)=\frac{-1}{\left(u^2+v^2\right)^3}\Big(2u^2u_xv_x-2u^2u_xu_y+u^3u_{xy}+uu_{xy}v^2+2uvv_x^2-$$
$$-u^3v_{xx}-uv^2v_{xx}-2uu_y^2v+u^2u_{yy}v+u_{yy}v^3+$$
$$+2v^2v_xv_y-2u_yv^2v_y-u^2vv_{xy}-v_{xy}v^3\Big),$$
$$\delta(J_2)=\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^3}\Big(-2u^2u_xv_y-2u^2u_x^2+u^3u_{xx}+uu_{xx}v^2-2uvv_xv_y-$$
$$-2uvu_xv_x+u^3v_{xy}+uv^2v_{xy}-2uu_yvv_y-2uu_xu_yv+u^2u_{xy}v+$$
$$+u_{xy}v^3-2v^2v_y^2-2u_xv^2v_y+u^2vv_{yy}+v^3v_{yy}\Big),$$
$$\widetilde{\delta}(J_1)=\frac{-1}{\left(u^2+v^2\right)^3}\Big(-2uvu_xv_x+2uu_xu_yv-u^2u_{xy}v-u_{xy}v^3-2v^2v_x^2+$$
$$+2u_yv^2v_x+u^2vv_{xx}+v_{xx}v^3+2u^2u_yv_x-2u^2u_y^2+u^3u_{yy}+$$
$$+uu_{yy}v^2+2uvv_xv_y-2uvu_yv_y-u^3v_{xy}-uv^2v_{xy}\Big),$$
$$\widetilde{\delta}(J_2)=\frac{1}{\left(u^2+v^2\right)^3}\Big(2uvu_x^2-u^2vu_{xx}-v^3u_{xx}+2v^2v_xv_y+2v^2u_xv_x-$$
$$-u^2vv_{xy}-v^3v_{xy}-2u^2u_yv_y-2u^2uxu_y+u^3u_{xy}+$$
$$+uv^2u_{xy}-2uvv_y^2+u^3v_{yy}+uv^2v_{yy}\Big).$$

Для нахождения недостающих инвариантов мы используем следующий прием. Вырождение инвариантов J_1 и J_2 происходит, если форма ω является гармонической. В книге ([1]) найдены все $SL_2(\mathbb{C})$ инварианты для гармонических форм. Для того, чтобы воспользоваться этими инвариантами мы положим

$$w=u-iv,$$
$$\triangle=\frac{w}{2}\cdot(\delta-i\widetilde{\delta})$$

и запишем инвариант J_2 (в обозначениях книги [1], стр.71) следующим образом:

$$K=\frac{-2w\triangle^2(w)+3\big(\triangle(w)\big)^2}{w^4}.$$

Отметим, что функция K не является $SL_2(\mathbb{C})$-инвариантом.

Пусть $K_1=ReK$ и $K_2=ImK$. Тогда несложно проверить, что функции

$$R=\frac{K_1^2+K_2^2}{t^2}$$

и

$$\Phi = \frac{K_1(u^2 - v^2) + 2uvK_2}{K_2(u^2 - v^2) - 2uvK_1}$$

являются конформными дифференциальными инвариантами второго порядка.

В канонических координатах они имеют вид:

$$K_1 = \frac{1}{2\left(u^2+v^2\right)^2}\Big(-6uvu_xv_y - 6uvu_yv_x - 3u^2u_xv_x - 3uvu_y^2 + u^2vu_{yy} -$$
$$-3v^2v_xv_y - 3u^2u_xu_y - 3v^2u_yv_y + 2uv^2u_{xy} - 3uvv_x^2 + 2u^2vv_{xy} +$$
$$+3v^2u_xv_x + uv^2v_{xx} + 2u^3u_{xy} + u^3v_{xx} + v^3u_{yy} + 2v^3v_{xy} + 3uvu_x^2 +$$
$$+3uvv_y^2 - u^2vu_{xx} - uv^2v_{yy} + 3u^2u_yv_y - v^3u_{xx} - u^3v_{yy} +$$
$$+3u^2v_xv_y + 3v^2u_xu_y\Big)$$

$$K_2 = \frac{1}{4\left(u^2+v^2\right)^2}\Big(3v^2u_y^2 + 3u^2v_y^2 - 3u^2v_x^2 - 3v^2u_x^2 - 4u^2vu_{xy} + 6v^2u_xv_y -$$
$$-2uv^2u_{xx} - 6u^2u_xv_y + 4uv^2v_{xy} + 2u^2vv_y + 3u^2u_x^2 - 2u^3u_{xx} +$$
$$+4u^3v_{xy} - 4v^3u_{xy} - 3v^2v_y^2 + 2v^3v_{yy} - 12uvv_xv_y + 12uvu_xv_x -$$
$$-12uvu_yv_y + 12uvu_xu_y - 6u^2u_yv_x - 2u^2vv_{xx} + 6v^2u_yv_x + 2uv^2u_{yy} +$$
$$+3v^2v_x^2 - 2v^3v_{xx} - 3u^2u_y^2 + 2u^3u_{yy}\Big).$$

Элемент пространства J^2 назовем регулярным, если его проекция в J^1 регулярна, а $K_1^2 + K_2^2 \neq 0$. В противном случае, элемент назовем сингулярным. Соответственно, $SL_2(\mathbb{C})$-орбиты регулярных элементов мы назовем регулярными, а орбиты сингулярных элементов - сингулярными.

Теорема 2 *1. Конформные дифференциальные инварианты порядка* ≤ 2 *порождаются инвариантами*

$$J_1, \quad J_2, \quad \delta(J_1), \quad \widetilde{\delta}(J_1), \quad \delta(J_2), \quad \widetilde{\delta}(J_2), \quad R, \quad \Phi.$$

2. Инварианты (2) разделяют регулярные орбиты.

4 Поле конформных дифференциальных инвариантов

Пусть F - конформный дифференциальный инвариант. Используя инвариантную форму Ω сопоставим ему инвариантное гамильтоново дифференцирование:

$$X_F = t^{-1}\left(\frac{dF}{dy}\frac{d}{dx} - \frac{dF}{dx}\frac{d}{dy}\right)$$

Отметим, что если F_1 и F_2 - дифференциальные инварианты, то их скобка:

$$\left[F_1, F_2\right] = X_{F_1}(F_2) = t^{-1}\left(\frac{dF_1}{dy}\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_2}{dy}\cdot\frac{dF_1}{dx}\right) \tag{3}$$

также является дифференциальным инвариантом (как правило, более высокого порядка).

Назовем элементы пространства J^k $(k > 2)$ регулярными, если их проекции в пространство J^2 регулярны, и сингулярными - в противном случае. Как и выше, $SL_2(\mathbb{C})$-орбиты регулярных элементов мы назовем регулярными, а сингулярных - сингулярными.

Суммируя сказанное, мы получаем следующий результат.

Теорема 3 *1. Поле рациональных конформных дифференциальных инвариантов порождено базисными инвариантами J_1, J_2 - первого порядка, инвариантами R, Φ - второго порядка и инвариантными дифференцированиями δ и $\widetilde{\delta}$.*

2. Рациональные конформные дифференциальные инварианты разделяют регулярные орбиты.

3. Это поле является пуассоновым относительно скобки (3).

5 Конформная классификация дифференциальных 1-форм

Пусть F - конформный диффернциальный инвариант, а γ - дифференциальная 1-форма. Обозначим $F(\gamma)$ - значение этого инварианта на форме γ. Скажем, что росток дифференциальной 1-формы γ регулярен, если функции $J_1(\gamma)$, $J_2(\gamma)$ функционально независимы: $dJ_1(x) \wedge dJ_2(x) \neq 0$.

В этом случае, дифференциальным инвариантом второго порядка является функция от $J_1(\gamma)$ и $J_2(\gamma)$, скажем

$$\begin{aligned}
\delta(J_1)(\gamma) &= A_1\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\delta(J_2)\gamma &= A_2\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\widetilde{\delta}(J_1)\gamma &= B_1\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\widetilde{\delta}(J_2)\gamma &= B_2\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
R(\gamma) &= r(J_1\big(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\Phi(\gamma) &= f(J_1\big(\gamma), J_2(\gamma)\big).
\end{aligned}$$

Теорема 4 *Ростки регулярных 1-форм конформно эквивалентны в том и только том случае, когда соответствующие функции A_1, A_2, B_1, B_2, r и f - совпадают.*

6 Сингулярности

Обозначим через $\sum_0 = \{u = v = 0\} \subset J^0$ - особую орбиту, и рассмотрим действие $SL_2(\mathbb{C})$ на прообразах $\sum_{k,0} = \tau_{k,0}^{-1}(\sum_0) \subset J^k$.

Найдем инварианты 1-го порядка, т.е. $SL_2(\mathbb{C})$ инвариантные функции на $\sum_{1,0}$.

Пусть $\sum_{1,0}(0)$ - слой над точкой $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ проекции $\tau_1 : \sum_{1,0} \to \mathbb{R}^2$. В этом слое действие стабилизатора точки $(0,0)$ порождено векторными полями:

$$X_3 = x\partial_x + y\partial_y, \qquad X_4 = -y\partial_x + x\partial_y.$$

Пусть функция F - инвариант этого действия. Запишем эту функцию в виде

$$F = f(X, Y, Z, T),$$

где

$$\begin{aligned} X &= u_x - v_y, \qquad & Z &= v_y + u_x, \\ Y &= u_y + v_x, \qquad & T &= u_y - v_x. \end{aligned}$$

Тогда уравнения $X_3^{(1)}(F) = X_4^{(1)}(F) = 0$ примет вид:

$$\begin{cases} Xf_x + Yf_y + Zf_z + Tf_t = 0, \\ Yf_x - Xf_y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что

$$f = h\left(\frac{X^2+Y^2}{ZT}, \frac{T}{Z}\right)$$

и тем самым функции

$$S_1 = \frac{T}{Z}, \qquad S_2 = \frac{X^2+Y^2}{ZT}$$

являются инвариантами $SL_2(\mathbb{C})$ - действия на прообразе $\sum_{1,0}$ сингулярной орбиты $\sum_0$.

Отметим также, что функция S_1 является отношением инвариантов J_1 и J_2, и тем самым является ограничением $SL_2(\mathbb{C})$ - инварианта для действия группы $SL_2(\mathbb{C})$ на пространстве J^1.

Внутри особого множества $\sum_{1,0}$ мы также выделим регулярные и сингулярные точки (орбиты).

А именно, мы скажем, что элемент, принадлежащий $\sum_{1,0}$, является регулярным, если $X^2 + Y^2 \neq 0$ и $Z^2 + T^2 \neq 0$. В противном случае, элемент назовем сингулярным.

Теорема 5 *Дифференциальные инварианты S_1 и S_2 разделяют регулярные орбиты в $\sum_{1,0}$.*

Для нахождения инвариантов второго порядка на особой орбите заметим, что стационарная подалгебра регулярной точки в $\sum_{1,0}$ является 2-мерной абелевой алгеброй Ли.

Интегрируя действие этой алгебры в слое проекции $J^2 \to \sum_{1,0}$ находим 4 инварианта 2-го порядка:

$$S_{21} = \frac{1}{\left(2v_x^2+5u_yv_x+2u_y^2-3v_yu_x+6u_x^2\right)} \cdot \Big[\big(2u_{yy}+6u_{xx}\big)u_y^2+ \\ +\big(-8u_{xy}u_x+(3u_{xx}+5u_{yy})v_x-2u_{xy}v_y\big)u_y+\big(2u_{xx}+6u_{yy}\big)u_x^2+ \\ +\big(2u_{xy}v_x-3v_y\big(\tfrac{5}{3}u_{xx}+u_{yy}\big)\big)u_x+2u_{yy}v_x^2+2u_{xx}v_y^2-4v_xv_yu_{xy}\Big],$$

$$S_{22} = \frac{1}{\left(2v_x^2+5u_yv_x+2u_y^2-3v_yu_x+6u_x^2\right)} \cdot \Big[\big(-6u_{xy}+6v_{xx}\big)u_x^2+ \\ +\big(-4u_{xx}v_x+4u_{xx}u_y-\big(3(-u_{xy}+v_{xx})\big)v_y\big)u_x+\big(2v_{xx}-6u_{xy}\big)v_x^2+ \\ +\big((5v_{xx}-3u_{xy})u_y+2u_{xx}v_y\big)v_x+2u_y^2v_{xx}-2u_yu_{xx}v_y\Big],$$

$$S_{23} = \frac{1}{\left(2v_x^2+5u_yv_x+2u_y^2-3v_yu_x+6u_x^2\right)} \cdot \Big[\big(2u_{xx}+2v_{xy}\big)u_y^2+\big(2u_{xx}+6v_{xy}\big)u_x^2+ \\ +\big(-2u_{xy}u_x+(5u_{xx}+5v_{xy})v_x-2u_{xy}v_y\big)u_y-4v_xv_yu_{xy}+2u_{xx}v_y^2+ \\ +\big(-4u_{xy}v_x-\big((\tfrac{3}{5}v_{xy}+u_{xx})\big)v_y\big)u_x+\big(2u_{xx}+2v_{xy}\big)v_x^2\Big],$$

$$S_{24} = \frac{1}{\left(2v_x^2+5u_yv_x+2u_y^2-3v_yu_x+6u_x^2\right)} \cdot \Big[\big(2u_{xy}+2v_{yy}\big)u_y^2+ \\ +\big((5v_{yy}+5u_{xy})v_x+4u_{xx}\big(v_y+u_x\big)\big)u_y+\big(2u_{xy}+2v_{yy}\big)v_x^2+ \\ +2u_{xx}\big(v_y+u_x\big)v_x+6u_x\big(u_xv_{yy}-\tfrac{1}{2}v_y\big(v_{yy}+3u_{xy}\big)\big)\Big].$$

Кроме того, инвариант S_1 позволяет построить инвариантный репер, который существует и в особых точках.

А именно, полный дифференциал

$$\widehat{d}S_1 = \frac{dS_1}{dx}dx + \frac{dS_1}{dy}dy$$

и его образ при операторе I

$$I\widehat{d}S_1 = \frac{dS_1}{dy}dx - \frac{dS_1}{dx}dy$$

задают $Sl_2(\mathbb{C})$ - инвариантный корепер.

Следовательно, дифференцирования

$$\nabla_1 = S^{-1}\left(\frac{dS_1}{dx}\cdot\frac{d}{dx} + \frac{dS_1}{dy}\cdot\frac{d}{dy}\right),$$

$$\nabla_2 = S^{-1}\left(\frac{dS_1}{dy}\cdot\frac{d}{dx} - \frac{dS_1}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\right)$$

образуют $Sl_2(\mathbb{C})$ - инвариантный репер.

Теорема 6 *Функции*

$$S_1, \quad S_2, \quad S_{21}, \quad S_{22}, \quad S_{23}, \quad S_{24}$$

и инвариантные дифференцирования ∇_1 *и* ∇_2 *порождают все дифференциальные инварианты на особой орбите. Эти инварианты разделяют регулярные орбиты.*

Мы используем это описание для нахождения нормальных форм особых точек.

Положим $S_1 = \alpha, \quad S_2 = \alpha^{-1}\beta^2$, где $\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0$ и $S_{21} = \sigma_1, \quad S_{22} = \sigma_2, \quad S_{23} = \sigma_3, \quad S_{24} = \sigma_4.$

Тогда типичный представитель $Sl_2(\mathbb{C})$-орбиты в 2-джетах в точке $x = y = 0$:

$$\omega = Udx + Vdy,$$

описывается следующей теоремой.

Теорема 7 *В регулярной особой точке 2-джет дифференциальной* 1-*формы* $SL_2(\mathbb{C})$-*эквивалентен форме* $Udx + Vdy$, *где функции* U *и* V *имеют вид:*

$$U = \frac{1}{2}\Big[(\beta+1)x - \alpha y\Big] + \frac{\sigma_1}{2}y^2 + \frac{\sigma_3}{4\alpha}y\Big[(\alpha^2 - 9\beta^2 - 12\beta - 3)x + (6\alpha\beta + 4\alpha)y\Big],$$

$$V = \frac{1}{2}\Big[\alpha x + (1-\beta)y\Big] + \frac{1}{2}\big(\sigma_2 x^2 + \sigma_4 y^2\big) + \frac{\sigma_3}{8\alpha}\Big[(-3\alpha^2 - 9\beta^2 - 12\beta - 3)x^2 + 9(\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - 1)y^2\Big].$$

Список литературы

1. Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова Думка"НАН України, (2013), 192 с.
2. B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf
3. E. Sharon, D. Mumford. 2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping // International Journal of Computer Vision 70(1), p. 55–75, (2006) // DOI: 10.1007/s11263-006-6121-z

Надежда Григорьевна Коновенко
http://orcid.org/0000-0002-8631-0688
ОНАПТ, Одесса, Украина
E-mail: konovenko@ukr.net

DOI 10.15673/2072-9812.1/2014.29276

Nadiia G. Konovenko

Conformal projective invariants in the problem of image recognition.

In this paper we reduce local classification of differential 1-forms on the plane with respect to group $SL_2(\mathbb{C})$ of Mobius transformations. We find the field of rational conformal differential invariants and show that the field is generated by two differential invariant derivations and by differential invariants of the first and second orders.