DOI 10.15673/2072-9812.1/2014.29277
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(1) 53–64 $d\omega$

Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств

Ирина Николаевна Курбатова

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений между римановыми пространствами с параболически келеровой структурой.

Ключевые слова Риманово пространство, параболически келерова структура.

УДК 517.764

1 Введение.

В последние десятилетия интенсивно изучаются многочисленные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств и голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий.

Геодезическое отображение одного риманова пространства V_n на другое $\overline{V}_n$ определяется как взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором каждая геодезическая линия V_n переходит в геодезическую линию $\overline{V}_n$.

Если на римановом пространстве определена абсолютно параллельная почти комплексная структура, согласованная с метрикой [1], его называют келеровым. Известно [2], что геодезическое отображение келерова пространства на келерово с сохранением комплексной структуры является тривиальным. Поэтому для келеровых пространств изучаются более общие, так называемые голоморфно проективные отображения, введенные Т.Оцуки и Я.Тасиро [3] и явившиеся предметом исследования многих отечественных и зарубежных математиков. Обстоятельное изложение результатов, полученных в теории геодезических и голоморфно проективных отображений, можно найти в [2], [4].

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория дифференцируемых многообразий, снабженных различными геометрическими структурами, в частности, алгебраическими, то есть изоморфно представляющими некоторую алгебру [5], [6]. В соответствии с этим развивается теория диффеоморфизмов многообразий с различными аффинорными структурами, таких, например, как почти геодезические, p-геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.

В [7] Н.С. Синюковым и Й. Микешем было предложено весьма широкое обобщение геодезических и голоморфно-проективных отображений пространств аффинной связности без кручения с произвольной аффинорной структурой - квазипланарные отображения.

В 1968 году академик А.З. Петров, исследуя проблему моделирования физических полей (в смысле поведения пробных частиц), пришел к задаче квази-геодезического отображения 4-мерных римановых пространств сигнатуры Минковского [8]. При этом движение свободной частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы, то есть геодезические линии одного риманова пространства V_4 переходят в так называемые квазигеодезические линии другого пространства $\overline{V}_4$, в результате чего, как выражался А.З. Петров, "происходит перекачка энергии в силу". А.З. Петровым были получены и в некоторой мере исследованы основные уравнения квази-геодезических отображений в общей по отображению системе координат:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)}(x) + \varphi_{(i}(x)F^h_{j)}(x)$$

$$\overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \qquad \overline{F}_{ij}(x) = F^\alpha_j(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\overline{\Gamma}^h_{ij}, \Gamma^h_{ij}$ компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_4$ и V_4 с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F^h_i - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование.

В [8] отмечается, что рассматриваемый случай соответствует весьма широкой ситуации, отвечающей общей точке зрения теории наблюдаемых величин в физике.

Тензорный характер основных уравнений квази-геодезических отображений позволяет рассматривать отображения римановых пространств $\overline{V}_n$ и

V_n произвольной сигнатуры и размерности, характеризующиеся такими же соотношениями. Будем называть их также квази-геодезическими (КГО).

Класс КГО, как видно, достаточно широк. Например, он включет в себя геодезические отображения римановых пространств и голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением комплексной структуры. Однако вследствие широты класса КГО трудно получить конкретные результаты при изучении его во всей общности. Поэтому в [9] из определенных геометрических соображений выделены и обстоятельно исследованы частные случаи КГО. В частности, там налагается требование, чтобы рассматриваемое КГО $f : V_n \to \overline{V}_n$ удовлетворяло условию взаимности, то есть чтобы обратное отображение $f^{-1} : \overline{V}_n \to V_n$ также было квази-геодезическим, соответствующим тому же аффинору F_i^h. Кроме того, аффинор F_i^h полагается невырожденным.

Мы продолжаем исследования в этом направлении. Предметом изучения будут КГО $f : V_n \to \overline{V}_n$ специального типа, которые названы нами каноническими (ККГО), в предположении, что аффинор F_i^h порождает на $\overline{V}_n$ и V_n почти келерову структуру.

2 Параболически келеровы пространства и их свойства

1°. Как известно, четномерное риманово пространство K_n с метрическим тенозром $g_{(ij)}(x)$ называется *параболически келеровым* (в терминологии В.В. Вишневского ([6] - *A-пространством*), если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$ максимального ранга $m (n = 2m)$, удовлетворяющая условиям:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \tag{1}$$

$$F_{i,j}^h = 0 \tag{2}$$

где $<,>$ - знак ковариантной производной по связности пространства K_n.

Условимся операцию свертывания с аффинором обозначать следующим образом:

$$T_{\bar{i}\ldots}^{\cdots} = T_{\alpha\ldots}^{\cdots} F_i^\alpha, \qquad T_{\cdots}^{\bar{i}\ldots} = T_{\cdots}^{\alpha\ldots} F_\alpha^i. \tag{3}$$

В частности, ввиду (1)

$$T_{\bar{\bar{i}}\ldots}^{\cdots} = 0, \qquad T_{\cdots}^{\bar{\bar{i}}\ldots} = 0.$$

2°. Вследствие (2) в K_n выполняются дифференциальные уравнения $F_{i,jk}^h = 0$. Альтернируя их по индексам j, k и применяя тождество Риччи,

DOI 10.15673/2072-9812.1/2014.29277

получаем свойства тензоров Римана и Риччи пространства K_n:

$$R^{\overline{h}}_{ijk} = R^{h}_{\overline{i}jk}, \qquad R_{\overline{h}ijk} = -R_{h\overline{i}jk}, \tag{4}$$

$$R_{\overline{h}i} = -R_{h\overline{i}}. \tag{5}$$

Ввиду (2) аффинорная структура параболически келерова пространства интегрируема, поэтому в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, называемую адаптированной (к аффинору), в которой аффинор приводится к виду:

$$(F^h_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$F^{a+m}_b = \delta^a_b, \qquad F^{a+m}_{b+m} = F^a_b = F^a_{b+m} = 0, \tag{6}$$

$a, b = 1, 2, \ldots, m = \frac{n}{2}$.

Очевидно, что в любой системе координат F^h_i имеет нулевой след:

$$F^\alpha_\alpha = 0. \tag{7}$$

В адаптированной системе координат ввиду (1), (6) приобретает специфику и матрица метрического тензора:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $G_1 = {G_1}^T$, $G_2 = -{G_2}^T$,то есть

$$g_{ab}(x) = g_{ba}(x); \qquad g_{ab+m}(x) = -g_{a+mb}(x); \qquad g_{a+mb+m}(x) = 0.$$

3°. Введем в K_n вспомогательный тензор A^h_i, такой что

$$A^h_\alpha A^\alpha_i = 0, \tag{8}$$

$$F^h_\alpha A^\alpha_i + A^h_\beta F^\beta_i = \delta^h_i. \tag{9}$$

Очевидно, при этом

$$F^\beta_\alpha A^\alpha_\beta = m.$$

Этот тензор определяется с большим произволом. В частности, нетрудно проверить, что в адаптированной к аффинору F^h_i системе координат он представляется в виде

$$(A^h_i) = \begin{pmatrix} B & E_m \\ -B^2 & -B \end{pmatrix},$$

где B - произвольная квадратная матрица порядка m.

3 Квази-геодзические отображения параболически келеровых пространств.

Рассмотрим пару римановых пространств (K_n, g_{ij}), $(\overline{K}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в квази-геодезическом отображении (КГО), соответствующем аффинору F_i^h и удовлетворяющем условию взаимности. Будем полагать, что при этом аффинор F_i^h на обоих пространствах определяет параболически келерову структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения КГО представятся в виде:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} &F_\alpha^h(x)F_i^\alpha(x) = 0, \quad \overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \overline{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\overline{g}_{\alpha i}(x), \\ &F_{(ij)}(x) = 0, \quad F_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)g_{\alpha i}(x), \end{aligned} \qquad (11)$$

$$F_{i,j}^h = 0, \qquad F_{i|j}^h = 0, \qquad (12)$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h- аффинор; $<|>, <,>$, - знаки ковариантной производной по связностям $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$.

Если в уравнениях (10) $\psi_i = 0$ и $\varphi_i = 0$, КГО вырождается в аффинное. Этот случай будем считать тривиальным.

Если в (10) $\psi_i \neq 0$ и $\varphi_i = 0$, КГО вырождается в геодезическое отображение [4]. Нетрудно показать, что геодезическое отображение при условиях (11), (12) тривиально (значит, и КГО тривиально). Действительно, зависимость между ковариантными производными аффинора F_i^h в пространствах K_n и $\overline{K}_n$ с учетом (10), (11), (12) запишется в форме

$$\psi_{\bar{i}}\delta_j^h - \psi_i F_j^h = 0.$$

Отсюда свертыванием по индексам h, j находим $\psi_{\bar{i}} = 0$ и, следовательно, $\psi_i = 0$, что и подтверждает тривиальность КГО.

При $\psi_i = 0$ и $\varphi_i \neq 0$ получим особый тип КГО, которые будем называть *каноническим квази-геодезическим отображением (ККГО).* Этот тип отображений мы и будем изучать в данной статье.

4 Геометрические объекты, инвариантные относительно ККГО параболически келеровых пространств.

Рассмотрим ККГО параболически келеровых пространств $f : K_n \to \overline{K}_n$ с основными уравнениями

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \qquad (13)$$

$$F^h_\alpha(x)F^\alpha_i(x)=0,$$

$$\overline{F}_{(ij)}(x)=0,\quad \overline{F}_{ij}(x)=F^\alpha_j(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),\quad F_{(ij)}(x)=0,\quad F_{ij}(x)=F^\alpha_j(x)g_{\alpha i}(x),$$

$$F^h_{i,j}=0,\qquad F^h_{i|j}=0.$$

Отметим сначала, что из зависимости между ковариантными производными аффинора F^h_i в пространствах K_n и $\overline{K}_n$ при ККГО ввиду (13), (11), (12) следует

$$\varphi_{\bar{i}}=0. \tag{14}$$

С другой стороны, в результате свертывания (13) по индексам h,j с учетом (11) получим

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{i\alpha}=\Gamma^\alpha_{i\alpha}+\varphi_{\bar{i}}.$$

Как известно, в любом римановом пространстве $\Gamma^\alpha_{i\alpha}(x)=\frac{1}{2}\partial_i\ln|g|$, где $g=\det\|g_{ij}\|$. Поэтому из последних соотношений на основании (14)имеем

$$\overline{T}=T, \tag{15}$$

где

$$T=\partial_i\ln|g|,\quad \overline{T}=\partial_i\ln|\overline{g}|.$$

2°. Произведем свертывание (13) по индексам h,j с тензором A^j_h, введенным выше:

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{i\beta}A^\beta_\alpha=\Gamma^\alpha_{i\beta}A^\beta_\alpha+m\varphi_i+\varphi_\alpha A^\alpha_{\bar{i}}.$$

Свойства тензора A (8), (9), а также (14) позволяют выразить отсюда

$$(m+1)\varphi_i=\overline{\Gamma}^\alpha_{i\beta}A^\beta_\alpha-\Gamma^\alpha_{i\beta}A^\beta_\alpha,$$

в результате чего (13) можно представить в виде

$$\overline{T}^h_{ij}=T^h_{ij},$$

где

$$T^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}-\frac{1}{m+1}\left(\Gamma^\alpha_{i\beta}A^\beta_\alpha F^h_j+\Gamma^\alpha_{j\beta}A^\beta_\alpha F^h_i\right). \tag{16}$$

Аналогичным образом представляются в $\overline{K}_n$ компоненты $\overline{T}^h_{ij}$.

3°. На основании (13) зависимость между компонентами тензоров Римана пространств K_n и $\overline{K}_n$ имеет вид:

$$\overline{R}^h_{ijk}=R^h_{ijk}+F^h_k\varphi_{i,j}-F^h_j\varphi_{i,k}+F^h_i(\varphi_{k,j}-\varphi_{j,k}). \tag{17}$$

Свернув эти соотношения по h, k, получим зависимость между компонентами тензоров Риччи K_n и $\overline{K}_n$:

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} - \varphi_{i,\bar{j}} - \varphi_{j,\bar{i}}. \tag{18}$$

Из (4) следует

$$R^h_{i\bar{j}k} + R^h_{ij\bar{k}} = 0, \qquad \overline{R}^h_{i\bar{j}k} + \overline{R}^h_{ij\bar{k}} = 0$$

Подставляя сюда предыдущие равенства, находим

$$F^h_k \varphi_{i,\bar{j}} + F^h_i \varphi_{k,\bar{j}} - F^h_j \varphi_{i,\bar{k}} - F^h_i \varphi_{j,\bar{k}} = 0.$$

Поскольку $\varphi_{\bar{i},j} = 0$, свертывание этих соотношений с A^k_h по k и h дает нам

$$m\varphi_{i,\bar{j}} - \varphi_{j,\bar{i}} = 0,$$

что означает

$$\varphi_{i,\bar{j}} = 0 \tag{19}$$

при $m \neq 1$. Но тогда из (18) следует

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij}, \tag{20}$$

то есть тензор Риччи инвариантен относительно КГГО параболически келеровых пространств.

4°. Свернем (17) с A^k_h по k и h с учетом (19) и (9):

$$\overline{R}^\alpha_{ij\beta} A^\beta_\alpha = R^\alpha_{ij\beta} A^\beta_\alpha + m\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}.$$

Отсюда, соответственно,

$$(m^2 - 1)\varphi_{i,j} = m(\overline{R}^\alpha_{ij\beta} - R^\alpha_{ij\beta}) A^\beta_\alpha + (\overline{R}^\alpha_{ji\beta} - R^\alpha_{ji\beta}) A^\beta_\alpha.$$

Теперь (17) можно представить в виде

$$\overline{T}^h_{ijk} = T^h_{ijk},$$

где

$$T^h_{ijk} = R^h_{ijk} - F^h_k \widetilde{R}_{ij} + F^h_j \widetilde{R}_{ik} + F^h_i \widetilde{R}_{[jk]}, \tag{21}$$

$$\widetilde{R}_{ij} = \frac{1}{m^2 - 1}(mR^\alpha_{ij\beta} + R^\alpha_{ji\beta}) A^\beta_\alpha.$$

Аналогичным образом представляются в $\overline{K}_n$ компоненты $\overline{T}^h_{ijk}$.

Нами доказана теорема.

Теорема 1 *Геометрические объекты (15), (16), (21) и тензор Риччи инвариантны относительно ККГО параболически келеровых пространств.*

Объект (16) носит нетензорный характер и является аналогом известных параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств. Его сохранение необходимо и достаточно для того, чтобы отображение между параболически келеровыми пространствами было каноническим квази-геодезическим.

Объект (21) - аналог тензора Вейля в теории геодезических отображений. Сохранение объектов (15), (21) и тензора Риччи - лишь необходимое условие для того, чтобы рассматриваемое отображение было ККГО.

5 ККГО параболически келеровых пространств на плоское параболически келерово.

1°. Будем называть параболически келеровы пространства, допускающие ККГО на плоское пространство, *каноническим квазиплоскими.*

Рассмотрим ККГО параболически келерова пространства K_n на плоское параболически келерово $\overline{K}_n = E_n$. Тогда $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ и, следовательно, (17) после опускания в K_n индекса h принимают вид:

$$R_{hijk} + F_{hk}\varphi_{i,j} - F_{hj}\varphi_{i,k} + F_{hi}(\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}) = 0. \tag{22}$$

В результате симметрирования по индексам i, j отсюда получим:

$$F_{hk}\varphi_{i,j} - F_{hj}\varphi_{i,k} + F_{ik}\varphi_{h,j} - F_{ij}\varphi_{h,k} = 0.$$

Поднимая здесь индекс h в K_n и свертывая с A^k_h по h и k, находим:

$$\varphi_{i,j} = CF_{ij}, \quad C = \frac{1}{m}\varphi_{\alpha,\beta} g^{\alpha\gamma} A^\beta_\gamma. \tag{23}$$

Следовательно, (22) принимают вид:

$$R_{hijk} = C(F_{hj}F_{ik} - F_{hk}F_{ij} + 2F_{hi}F_{jk}). \tag{24}$$

Свертывание с g^{hk} этого выражения по индексам i, j дает нам
$R_{ij} = 0$, то есть канонически квазиплоское параболически келерово пространство является Риччи-плоским.

2°. Продифференцируем ковариантно в K_n (24) по x^l, затем проциклируем полученные соотношения по j, k, l и применим дифференциальное тождество Бианки:

$$C_l(F_{hj}F_{ik} - F_{hk}F_{ij} + 2F_{hi}F_{jk}) + C_j(F_{hk}F_{il} - F_{hl}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kl}) +$$
$$+ C_k(F_{hl}F_{ij} - F_{hj}F_{il} + 2F_{hi}F_{lj}) = 0.$$

Свертывание этого равенства с g^{hl} по индексам h, l и затем с $g^{i\alpha}A_\alpha^j$ по i, j дает нам $C_{\overline{k}} = 0$. Поэтому поднимая в последних соотношениях индекс i в K_n и свертывая затем с A_i^j по i и j с учетом (9), получаем:

$$m(C_l F_{hk} - C_k F_{hl}) + 2C_h F_{kl} = 0.$$

Циклируя это уравнение по h, k, l и сравнивая с исходным, наконец приходим к выводу, что $C_k = 0$, то есть $C = const$. Нами доказана теорема.

Теорема 2 *Тензор Римана канонически квазиплоского параболически келерова пространства K_n, $(n > 2)$ по необходимости имеет структуру (24) при некоторой постоянной C и является Риччи-плоским.*

3°. Естественно возникает вопрос о том, существует ли для параболически келерова пространства K_n, в котором имеют место (24), нетривиальное ККГО.

Несложно проверить, что из (24) и (21) следует $T_{ijk}^h = 0$. Верно и обратное: из $T_{ijk}^h = 0$ следует, что структура тензора Римана в таком пространстве имеет вид (24).

Предположим, что канонически квазиплоское параболически келерово пространство K_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ и аффинором $F_i^h(x)$ нам задано. Если существует параболически келерово относительно того же аффинора пространство $\overline{K}_n$ с метрическим тензором $\overline{g}_{ij}(x)$, на которое пространство K_n допускает ККГО, соответствующее вектору $\varphi_i(x) \neq 0$, то ввиду инвариантности T_{ijk}^h имеем $T_{ijk}^h = \overline{T}_{ijk}^h = 0$ и из (21) следует

$$\overline{C}(F_j^h \overline{F}_{ik} - F_k^h \overline{F}_{ij} + 2F_i^h \overline{F}_{jk}) = C(F_j^h F_{ik} - F_k^h F_{ij} +$$
$$+ 2F_i^h F_{jk}) + F_k^h \varphi_{i,j} - F_j^h \varphi_{i,k} + F_i^h(\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}).$$

Отсюда после свертывания с A_h^k по h и k

$$\overline{CF}_{ij} = CF_{ij} + \varphi_{i,j}. \tag{25}$$

Далее, ввиду (13), (11), (12) и (14)

$$\overline{g}_{ij,k} = \varphi_i \overline{F}_{jk} + \varphi_j \overline{F}_{ik}. \tag{26}$$

Совокупность уравнений (25), (26) образует систему Коши в ковариантных производных первого порядка в K_n относительно $\overline{g}_{ij}(x)$ и $\varphi_i(x)$. На основании (11) в $\overline{K}_n$ мы также должны требовать выполнения условий

$$\overline{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \overline{g}_{j\alpha} F_i^\alpha = 0. \tag{27}$$

Исследуем смешанную систему (25), (26), (27) в K_n. Заметим, что при этих условиях в $\overline{K}_n$ автоматически следует $F^h_{i|j} \equiv 0$. Существование решения

$$\overline{g}_{ij}(x) \equiv \overline{g}_{ji}(x), \quad (\det \|\overline{g}_{ij}\| \neq 0), \quad \varphi_i(x) \neq 0 \tag{28}$$

системы уравнений (25), (26), (27) в канонически квазиплоском пространстве K_n необходимо и достаточно, чтобы это пространство допускало ККГО.

Условия интегрируемости (25) и (26) имеют вид:

$$\overline{C}(F^\alpha_j \overline{g}_{\alpha i,k} - F^\alpha_k \overline{g}_{\alpha i,j}) = \varphi_\alpha R^\alpha_{ijk},$$

$$\overline{g}_{\alpha j} R^\alpha_{ikl} + \overline{g}_{i\alpha} R^\alpha_{jkl} = \varphi_{i,l}\overline{F}_{jk} + \varphi_i F^\alpha_k \overline{g}_{\alpha j,l} - \varphi_{i,k}\overline{F}_{jl} + \varphi_i F^\alpha_l \overline{g}_{\alpha j,k}.$$

Ввиду (25), (26), (24), (14) эти условия интегрируемости выполняются тождественно. Наконец, дифференцируя ковариантно в K_n (27) и используя (26), убеждаемся, что первое дифференциальное продолжение условий (27) выполняется.

В соответствии с вышесказанным и из теории дифференциальных уравнений следует, что смешанная система уравнений (25), (26), (27) имеет в канонически квазиплоском пространстве K_n решение для любых начальных значениях искомых функций (28), удовлетворяющих в точке M_0 условиям (27).

Итак, нами доказана теорема.

Теорема 3 *Если канонически квазиплоское параболически келерово пространство K_n $(n \neq 2)$ допускает ККГО на параболически келерово пространство $\overline{K}_n$, то $\overline{K}_n$ также является канонически квазиплоским. Между любыми канонически квазиплоскими параболически келеровыми пространствами можно установить нетривиальное ККГО.*

Эта теорема представляет собой аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств.

6 Метрики канонически квазиплоских параболически келеровых пространств.

Ввиду $C = const$ из (24) следует, что канонически квазиплоское параболически келерово пространство является симметрическим:

$$R^h_{ijk,l} = 0.$$

Для симметрических римановых пространств П.А. Широков [10] получил формулу, позволяющую восстановить метрический тензор в окрестности некоторой точки $M(x_0)$ в V_n:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!}\overset{s}{m}_{ij}$$

где

$$\overset{1}{m}_{ij} = m_{ij},$$

$$\overset{k+1}{m}_{ij} = \overset{k}{m}_{\alpha i} m_{\beta j} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$$

$$m_{ij} = \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta,$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta$ - значения компонент метрического, обратного ему тензоров и тензора Римана в точке x_0, (y^h) - римановы координаты с началом в точке x_0.

Учитывая (24), (11) и используя эту формулу, получим $\overset{k}{m}_{ij} = 0$ при $k > 1$, так что компоненты метрического тензора канонически квазиплоского параболически келерова пространства K_n $(n = 2m > 2)$ представятся в виде

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{C}{4} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j},$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$ - компоненты тензоров g_{ij}, F_{ij} в точке x_0, y^h - римановы координаты с началом в точке x_0.

Список литературы

1. Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой // Итоги науки. Геометрия. М., ВИНИТИ АН СССР, 1963 165–212.
2. J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations // Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
3. T. Otsuki, Y. Tashiro. On curves in Kaehlerian spaces // J.Okayama Univ. №4, 1954 57–78.
4. Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
5. А. П. Широков. Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНИТИ. М., Т.73, 2002 135–161.
6. В. В. Вишневский. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНИТИ. М., Т.73, 2002 5–64.
7. Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов. Математика. №1, 1983 55–61.
8. Петров А.З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7–21.
9. И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.

10. П. А. Широков. Избранные работы по геометрии // Казань: Изд-во Казан.ун-та, 1966 432 с.

Ирина Николаевна Курбатова
ОНУ, Одесса, Украина
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Irina N. Kurbatova

Quasigeodesic mappings of parabolic *Kähler* spaces

We investigate special type of mappings between Riemannian spaces with parabolic *Kähler* structure.