DOI 10.15673/2072-9812.2/2014.29617
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(2) 6–19

Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3

Л. Л. Безкоровайна Ю. С. Хомич

Анотація В даній роботі вводиться до розгляду поняття квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні. Встановлено необхідну і достатню умову того, щоб нескінченно мала деформація була квазіареальною. Здобуто основну систему рівнянь квазіареальної нескінченно малої деформації та обчислено варіації деяких геометричних величин при розглядуваній деформації. Відзначимо, що квазіареальна деформація узагальнює ареальну нескінченно малу деформацію поверхні.

Ідея щодо вивчення квазіареальної нескінченно малої деформації належить професору М. С. Синюкову і була заявлена в роботі [1].

Ключові слова Квазіареальна нескінченно мала деформація · основна система рівнянь · варіації основних геометричних величин

УДК 514.76/77

1 Необхідна і достатня умова квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні

У тривимірному евклідовому просторі E_3 розглянемо область G, що належить площині x^1, x^2; вона може покривати і всю площину. Нехай $S \subset E_3$– деяка поверхня класу C^3. Припустимо, що між точками цієї поверхні і точками області G установлено взаємно однозначну і взаємно неперервну відповідність (гомеоморфізм) так, що в околі довільної своєї точки поверхня S

допускає параметризацію

$$\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2),\ x^1, x^2 \in G,$$

де $\overline{r}-$ радіус-вектор точки поверхні. Будемо розглядати її нескінченно малу деформацію S^* виду

$$\overline{r^*}(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2), \tag{1}$$

де $\overline{U}(x^1, x^2)-$ деформуюче поле поверхні $S,\ t \to 0$.

Надалі геометричні об'єкти здеформованої поверхні S^*, на відміну від відповідних об'єктів поверхні S, умовимося відмічати позначкою *.

Означення 1 *Нескінченно малу деформацію першого порядку (1) будемо називати квазіареальною нескінченно малою деформацією, якщо при такій деформації елемент площі поверхні змінюється за заданим законом.*

В подальшому всі індекси набувають значення 1, 2.

Теорема 1 *Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S класу C^3 була квазіареальною, необхідно і достатньо, щоб при цій деформації виконувалась умова*

$$\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\varphi, \tag{2}$$

де $2\varepsilon_{ij} \equiv \delta g_{ij}-$ варіації метричного тензора поверхні S, $g^{ij}-$ компоненти тензора, оберненого до метричного g_{ij}, а $\varphi(x^1, x^2)-$ деяка заздалегідь задана функція класу C^2.

Доведення Елемент площі $d\sigma^* = \sqrt{g^*}dx^1dx^2$ поверхні S^* розкладемо по степенях t

$$d\sigma^* = d\sigma + t\delta d\sigma + o(t^2),$$

де $\delta d\sigma-$ перша варіація елемента площі поверхні, а через $o(t^2)$ позначено величину порядку 2 і вище відносно t, якою ми будемо нехтувати. Звідси нормований елемент площі поверхні S^* виразимо у вигляді

$$\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = 1 + t\frac{\delta d\sigma}{d\sigma} + o(t^2). \tag{3}$$

Для того, щоб визначити варіацію елемента площі поверхні S, знайдемо послідовно дискримінант g^* і $\sqrt{g^*}$

$$g^* = g^*_{11}g^*_{22} - g^{*2}_{12} = (g_{11} + t2\varepsilon_{11} + o(t^2))(g_{22} + t2\varepsilon_{22} + o(t^2)) - (g_{12} + t2\varepsilon_{12} + o(t^2))^2 =$$

$$= g + 2t(g_{11}\varepsilon_{22} + g_{22}\varepsilon_{11} - 2g_{12}\varepsilon_{12}) + o(t^2) = g + 2tg\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + o(t^2);$$

$$\sqrt{g^*} = \sqrt{g + 2tg\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + o(t^2)} = \sqrt{g} + t\delta\sqrt{g} + o(t^2) =$$

$$= \sqrt{g} + t\left(\frac{\partial\sqrt{g^*}}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} + o(t^2) = \sqrt{g} + t\sqrt{g}\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + o(t^2).$$

Очевидно,

$$\delta g = 2g\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}, \delta\sqrt{g} = \sqrt{g}\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Отже, елемент площі поверхні S^* дорівнює

$$d\sigma^* = \sqrt{g^*}dx^1dx^2 = d\sigma + t\delta d\sigma + o(t^2) = d\sigma + td\sigma\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + o(t^2),$$

а варіація елемента площі поверхні S

$$\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}d\sigma. \tag{5}$$

З'ясуємо геометричний зміст величини $\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. З формули (5) випливає

$$\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{\delta d\sigma}{d\sigma}. \tag{6}$$

Таким чином, величина $\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ являє собою нормовану варіацію елемента площі поверхні S.

У відповідності з означенням, нескінченно мала деформація буде квазіареальною тоді і лише тоді, коли при цій деформації відомий закон змінювання $\delta d\sigma$ елемента площі поверхні S. Очевидно, задання функції $\delta d\sigma$ рівносильно заданню функції $\dfrac{\delta d\sigma}{d\sigma}$; покладемо

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma} = 2\varphi(x^1, x^2) \tag{7}$$

і надалі будемо вважати функцію φ заданою функцією класу C^2. З урахуванням формул (6) та (7) отримаємо (2).

Теорему доведено.

Відзначимо, що при $\varphi \equiv 0$ на поверхні S умова (2) перетворюється у необхідну і достатню умову того, щоб нескінченно мала деформація поверхні була ареальною [2]. Отже, квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні узагальнює ареальну нескінченно малу деформацію. При $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ в свою чергу ареальна нескінченно мала деформація поверхні становиться нескінченно малим згинанням.

2 Основна система рівнянь квазіареальної нескінченно малої деформації

Частинні похідні вектора зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$ квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні розкладемо за базисом $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{n}$, де $\overline{r}_\alpha = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^\alpha}, \overline{n}-$ орт нормалі поверхні S

$$\overline{U_i} = c_{i\alpha}\widehat{T}^{\alpha\beta}\overline{r_\beta} + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}, \tag{8}$$

де $\widehat{T}^{\alpha\beta} \in C^2$ - довільний двічі контраваріантний тензор, $T^\alpha \in C^2$ - контраваріантний вектор, c_{ij} - дискримінантний тензор поверхні S

$$c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}.$$

Розкладемо тензор $\widehat{T}^{\alpha\beta}$ на його симетричну і кососиметричну частини

$$\widehat{T}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

де $\mu = \mu(x^1, x^2)-$ деяка функція класу C^2, $c^{\beta\alpha}c_{\gamma\alpha} = \delta^\beta_\gamma$. Внесемо в (8) замість $\widehat{T}^{\alpha\beta}$ його значення з (9)

$$\overline{U_i} = \left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta} - \mu\delta^\beta_i\right)\overline{r_\beta} + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}. \tag{10}$$

Рівності (10) можна розглядати як систему двох векторних диференціальних рівнянь відносно однієї вектор-функції $\overline{U}$. Для існування розв'язку цієї системи необхідно і досить, щоб виконувалися умови інтегровності

$$\overline{U}_{i,j} = \overline{U}_{j,i} \Longleftrightarrow c^{ij}\overline{U}_{,ij} = 0, \tag{11}$$

де комою позначено коваріантну похідну на базі метричного тензора g_{ij}.

Користуючись дериваційними рівняннями теорії поверхонь

$$\overline{r}_{i,j} = b_{ij}\overline{n},\ \overline{n_i} = -b^\alpha_i\overline{r_\alpha}, \tag{12}$$

де $b_{ij}-$коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні S, $b^\alpha_i = b_{ij}g^{j\alpha}$, послідовно знайдемо

$$\overline{U}_{i,j} = \left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}_{,j} - \mu_j\delta^\beta_i - c_{i\alpha}T^\alpha b^\beta_j\right)\overline{r_\beta} + \left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} - \mu b_{ij} + c_{i\alpha}T^\alpha_{,j}\right)\overline{n}, \tag{13}$$

$$c^{ij}\overline{U}_{i,j} = \left(T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - \mu_\alpha c^{\beta\alpha} - T^\alpha b^\beta_\alpha\right)\overline{r_\beta} + \left(T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha}\right)\overline{n}.$$

Приймаючи до уваги факт лінійної незалежності векторів $\overline{r_i}, \overline{n}$, умовам інтегровності (11) надамо вигляду

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - T^\alpha b^\beta_\alpha + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0, \\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Зазначимо, що третє співвідношення системи визначає симетричність тензора $T^{\alpha\beta}$.

Встановимо геометричний зміст функції $\mu(x^1, x^2)$, яка входить в систему рівнянь (14). Для цього передусім визначимо метричний тензор поверхні S^*

$$g^*_{ij} = \overline{r_i}^* \overline{r_j}^* = \left(\overline{r_i} + t\overline{U_i}\right)\left(\overline{r_j} + t\overline{U_j}\right) = g_{ij} + t\left(\overline{r_i}\overline{U_j} + \overline{r_j}\overline{U_i}\right) + o(t^2).$$

Звідси варіація метричного тензора поверхні S

$$2\varepsilon_{ij} = \left(\overline{r_i}\overline{U_j} + \overline{r_j}\overline{U_i}\right). \tag{15}$$

Підставимо в (15) замість $\overline{U_i}, \overline{U_j}$ їх значення з (10), і перший тензор деформації $2\varepsilon_{ij}$ представимо через $T^{\alpha\beta}$, μ у вигляді

$$2\varepsilon_{ij} = T^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right) - 2\mu g_{ij}. \tag{16}$$

Помножимо отриману рівність (16) на g^{ij}

$$\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = -2\mu.$$

З іншого боку, на підставі (2)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 2\varphi.$$

Звідси випливає, що

$$\mu(x^1, x^2) = -\varphi(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = -\frac{\delta d\sigma}{2d\sigma}. \tag{17}$$

Отже, в системі рівнянь (14) функцію μ можна тлумачити як функцію, що визначає закон змінювання елемента площі поверхні при її квазіареальній нескінченно малій деформації.

Система рівнянь (14) представляє собою систему трьох диференціальних рівнянь відносно 6 невідомих функцій: $T^{11}, T^{12} = T^{21}, T^{22}, T^1, T^2, \mu$. Цю систему ми будемо називати основною системою рівнянь квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні.

Нехай $\left(T^{\alpha\beta},\ T^{\alpha},\ \mu\right)$, $\mu \neq 0-$ деякий ненульовий розв'язок класу C^2 системи рівнянь (14) для однозв'язної поверхні класу C^3. Оскільки умови інтегрованості системи рівнянь (10) виконуються, то з (10) можна знайти однозначне деформуюче поле квазіареальної нескінченно малої деформації

$$\overline{U}(M) = \int\limits_{M_0M}\left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\overline{r_\beta} - \mu\overline{r_i} + c_{i\alpha}T^{\alpha}\overline{n}\right)dx^i + \overline{U_0}, \tag{18}$$

де $\overline{U_0}-$ сталий вектор.

Таким чином, має місце

Теорема 2 *Для існування квазіареальної нескінченно малої деформації однозв'язної поверхні класу C^3 необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (14) мала ненульовий розв'язок.*

Відзначимо, що система рівнянь (14) була отримана також у працях [3], [4] у зв'язку з дослідженням структури розв'язків загальної нескінченно малої деформації поверхні. В даній роботі ця система рівнянь набуває іншого геометричного тлумачення, як основна система рівнянь для визначення квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні.

3 Варіації основних геометричних величин при квазіареальній нескінченно малій деформації

При квазіареальній нескінченно малій деформації всі об'єкти поверхні отримують, взагалі кажучи, ненульові варіації. Користуючись тензорними методами, виведемо формули для варіацій деяких геометричних величин при квазіареальній деформації.

Вище нами вже знайдено метричний тензор g^*_{ij}, дискримінант g^*, $\sqrt{g^*}$, елемент площі $d\sigma^*$ поверхні S^*. Випишемо їх вирази

$$g^*_{ij} = g_{ij} + t2\varepsilon_{ij} + o(t^2) = g_{ij} + t\left(T^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right) - 2\mu g_{ij}\right) + o(t^2),$$

$$g^* = g + t\delta g + o(t^2) = g - 4tg\mu + o(t^2),$$

$$\sqrt{g^*} = \sqrt{g} + t\delta\sqrt{g} + o(t^2) = \sqrt{g} - 2t\sqrt{g}\mu + o(t^2),$$

$$d\sigma^* = d\sigma - 2t\mu d\sigma + o(t^2).$$

Варіації відповідних геометричних характеристик мають вигляд

$$2\varepsilon_{ij} = T^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right) - 2\mu g_{ij},$$

$$\delta g = -4g\mu,$$

$$\delta\sqrt{g} = -2\sqrt{g}\mu,$$

$$\delta d\sigma = -2\mu d\sigma.$$

Варіація орта нормалі

Варіацію орта нормалі $\overline{n}$ при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S визначимо користуючись формулою

$$\overline{n} = \frac{\overline{r_1} \times \overline{r_2}}{\sqrt{g}}.$$

Отже,

$$\overline{n}^* = \frac{\overline{r_1}^* \times \overline{r_2}^*}{\sqrt{g^*}} = \frac{(\overline{r_1} + t\overline{U_1}) \times (\overline{r_2} + t\overline{U_2})}{\sqrt{g} - 2t\sqrt{g}\mu + o(t^2)} = \overline{n} + t\left(\frac{\partial \overline{n}^*}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} + o(t^2) =$$

$$= \overline{n} + t\frac{(\overline{r_1} \times \overline{U_2} + \overline{U_1} \times \overline{r_2})\sqrt{g} + \overline{r_1} \times \overline{r_2} \cdot 2\sqrt{g}\mu}{g} + o(t^2) =$$

$$= \overline{n} + t\left(\frac{\overline{r_1} \times \overline{U_2} + \overline{U_1} \times \overline{r_2}}{\sqrt{g}} + 2\overline{n}\mu\right) + o(t^2) = \overline{n} + t(c^{ij}\overline{r_i} \times \overline{U_j} + 2\overline{n}\mu) + o(t^2).$$

Звідси варіація орта нормалі при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S має вигляд

$$\delta\overline{n} = c^{ij}\overline{r_i} \times \overline{U_j} + 2\overline{n}\mu. \tag{19}$$

Виразимо величину $\delta\overline{n}$ через тензори $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$. Для цього підставимо у (19) замість $\overline{U_j}$ його значення з (10) та скористаємось формулами [2]

$$\overline{r_i} \times \overline{r_j} = c_{ij}\overline{n},\ \overline{n} \times \overline{r_i} = c_{i\alpha}\overline{r}^{\alpha}, \tag{20}$$

остаточно отримаємо

$$\delta\overline{n} = c_{\alpha\beta}T^{\alpha}\overline{r}^{\beta}. \tag{21}$$

Таким чином, орт нормалі $\overline{n}^*$ поверхні S^* розкладається по степенях t у вигляді

$$\overline{n}^* = \overline{n} + tc_{\alpha\beta}T^{\alpha}\overline{r}^{\beta} + o(t^2).$$

Варіації дискримінантних тензорів

Для знаходження варіацій дискримінантного тензора c_{ij} при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S будемо виходити з формули

$$c_{ij} = (\overline{r_i},\ \overline{r_j},\ \overline{n}).$$

Дійсно,

$$c^*_{ij} = \overline{r_i}^*\overline{r_j}^*\overline{n}^* = \left((\overline{r_i} + t\overline{U_i}) \times (\overline{r_j} + t\overline{U_j}), \overline{n} + t\delta\overline{n} + o(t^2)\right) =$$

$$= \left(\overline{r_i} \times \overline{r_j} + t\left(\overline{r_i} \times \overline{U_j} + \overline{U_i} \times \overline{r_j}\right) + o(t^2), \overline{n} + t\delta\overline{n} + o(t^2)\right) =$$

$$= (\overline{r_i} \times \overline{r_j})\overline{n} + t\left((\overline{r_i} \times \overline{r_j})\delta\overline{n} + \overline{n}\left(\overline{r_i} \times \overline{U_j} + \overline{U_i} \times \overline{r_j}\right)\right) + o(t^2).$$

Візьмемо до уваги першу формулу (20) й тотожність $\overline{n}\delta\overline{n} = 0$ та одержимо з попередньої рівності

$$\delta c_{ij} = \overline{n}\left(\overline{r_i} \times \overline{U_j} + \overline{U_i} \times \overline{r_j}\right). \tag{22}$$

Підставимо в (22) замість $\overline{U_i}, \overline{U_j}$ їх значення з (10) і врахуємо формули (20) та тотожність $\overline{n} \cdot \overline{r_\alpha} = 0$. Остаточно дістанемо вираз для варіації тензора c_{ij} поверхні S через функцію μ при квазіареальній деформації

$$\delta c_{ij} = -2c_{ij}\mu. \tag{23}$$

Розклад по степенях t дискримінантного тензора c^*_{ij} поверхні S^* дорівнює

$$c^*_{ij} = c_{ij} - 2tc_{ij}\mu + o(t^2).$$

Варіацію двічі контраваріантного дискримінантного тензора поверхні S можна визначити користуючись формулою

$$c^{i\alpha}c_{j\alpha} = \delta^i_j.$$

Справді,

$$c^{i\alpha}\delta c_{j\alpha} + c_{j\alpha}\delta c^{i\alpha} = 0.$$

Помножимо отриману рівність на $c^{j\beta}$ та внесемо замість $\delta c_{j\alpha}$ його значення з (23). Шукану варіацію і c^*_{ij} тепер можна записати так

$$\delta c^{ij} = 2c^{ij}\mu, \tag{24}$$

$$c^{*ij} = c^{ij} + 2tc^{ij}\mu + o(t^2).$$

Знайдемо ще варіацію змішаного тензора

$$c^{\cdot k}_{i\cdot} = g_{i\alpha}c^{\alpha k}$$

при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S. У відповідності з цією формулою дістанемо

$$c^{*\cdot k}_{\ i\cdot} = g^*_{i\alpha}c^{*\alpha k} = \left(g_{i\alpha} + 2t\varepsilon_{i\alpha} + o(t^2)\right)\left(c^{\alpha k} + t\delta c^{\alpha k} + o(t^2)\right) =$$

$$= c^{\cdot k}_{i\cdot} + t\left(g_{i\alpha}\delta c^{\alpha k} + 2\varepsilon_{i\alpha}c^{\alpha k}\right) + o(t^2),$$

звідси

$$\delta c^{\cdot k}_{i\cdot} = g_{i\alpha}\delta c^{\alpha k} + 2\varepsilon_{i\alpha}c^{\alpha k}. \tag{25}$$

Замінимо в (25) вирази $2\varepsilon_{i\alpha}$, $\delta c^{\alpha k}$ на їх значення з (16) та (24) і скористаємося формулою [2] $c_{i\beta}c^{\alpha k} = \delta_i^\alpha \delta_\beta^k - \delta_\beta^\alpha \delta_i^k$. Остаточно отримаємо варіацію мішаного дискримінантного тензора поверхні S через симетричне деформуюче поле $T^{\alpha\beta}$ у вигляді

$$\delta c_{i\cdot}^{\cdot k} = T^{\alpha\beta}\left(2g_{\alpha i}\delta_\beta^k - g_{\alpha\beta}\delta_i^k\right). \tag{26}$$

Отже,

$$c_{i\cdot}^{*\cdot k} = c_{i\cdot}^{\cdot k} + tT^{\alpha\beta}\left(2g_{\alpha i}\delta_\beta^k - g_{\alpha\beta}\delta_i^k\right) + o(t^2).$$

Варіації двічі контраваріантного тензора g^{ij}

Спираючись на формулу

$$g^{*ij} = c^{*i\alpha}c^{*j\beta}g^*_{\alpha\beta},$$

обчислимо варіації δg^{ij} при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S. Підставимо в дану рівність отримані раніше розклади відповідних величин в ряд по степенях t , матимемо

$$g^{*ij} = \left(c^{i\alpha} + 2tc^{i\alpha}\mu + o(t^2)\right)\left(c^{j\beta} + 2tc^{j\beta}\mu + o(t^2)\right)\left(g_{\alpha\beta} + 2t\varepsilon_{\alpha\beta} + o(t^2)\right) =$$

$$= g^{ij} + 2t\left(c^{i\alpha}c^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + 2g^{ij}\mu\right) + o(t^2),$$

$$\delta g^{ij} = 2\left(c^{i\alpha}c^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + 2g^{ij}\mu\right).$$

Враховуючи формулу [2] $c^{i\alpha}c^{j\beta} = g^{ij}g^{\alpha\beta} - g^{i\beta}g^{\alpha j}$, варіаціям тензора g^{ij} надамо вигляду

$$\delta g^{ij} = -2g^{i\alpha}g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{27}$$

Внаслідок підставлення в (27) замість $2\varepsilon_{\alpha\beta}$ його значення з (16) знайдемо шуканий вираз варіації δg^{ij} через $T^{\alpha\beta}$, μ при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні

$$\delta g^{ij} = T^{i\alpha}c_{\alpha\cdot}^{\cdot j} + T^{j\alpha}c_{\alpha\cdot}^{\cdot i} + 2g^{ij}\mu, \tag{28}$$

а

$$g^{*ij} = g^{ij} + t\left(T^{i\alpha}c_{\alpha\cdot}^{\cdot j} + T^{j\alpha}c_{\alpha\cdot}^{\cdot i} + 2g^{ij}\mu\right) + o(t^2).$$

Відзначимо, що дискримінантний тензор $c_{i\cdot}^{*\cdot k}$ поверхні S^* можна шукати також виходячи з формули

$$c_{i\cdot}^{\cdot k} = c_{i\alpha}g^{\alpha k}.$$

Покажемо, що в даному випадку ми приходимо до одного і того ж виразу для варіацій дискримінантного тензора. Справді,

$$c^{*\cdot k}_{i\cdot} = c^*_{i\alpha} g^{*\alpha k} = \left(c_{i\alpha} - 2tc_{i\alpha}\mu + o(t^2)\right)\left(g^{\alpha k} + t\left(T^{\alpha\beta}c_{\beta\cdot}^{\cdot k} + T^{k\beta}c_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha} + 2g^{\alpha k}\mu\right) +\right.$$

$$\left. + o(t^2)\right) = c_{i\cdot}^{\cdot k} + t\left(T^{\alpha\beta}c_{i\alpha}c_{\beta\cdot}^{\cdot k} + T^{k\beta}c_{i\alpha}c_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha}\right) + o(t^2).$$

Приймемо до уваги формулу [2] $c_{i\alpha}c_{\beta\cdot}^{\cdot k} = g_{i\beta}\delta^k_\alpha - g_{\alpha\beta}\delta^k_i$ й останнє співвідношення остаточно подамо у вигляді

$$c^{*\cdot k}_{i\cdot} = c_{i\cdot}^{\cdot k} + tT^{\alpha\beta}\left(2g_{\alpha i}\delta^k_\beta - g_{\alpha\beta}\delta^k_i\right) + o(t^2).$$

Звідси отримаємо (26).

Варіації другого фундаментального тензора

Варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми b_{ij} при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S обчислимо користуючись формулою

$$b^*_{ij} = \overline{r}^*_{i|j}\overline{n}^*,$$

де рискою позначено символ коваріантної похідної на базі метричного тензора g^*_{ij} поверхні S^*. Але попередньо виведемо формулу, за якою визначається варіація коваріантної похідної коваріантного вектора $\overline{r_i}$ при квазіареальній нескінченно малій деформації

$$\overline{r}^*_{i|j} = \frac{\partial \overline{r_i}^*}{\partial x^j} - \overline{r_\alpha}^* \Gamma^{*\alpha}_{ij} = \frac{\partial(\overline{r_i} + t\overline{U_i})}{\partial x^j} - \left(\overline{r_\alpha} + t\overline{U_\alpha}\right)\left(\Gamma^\alpha_{ij} + t\delta\Gamma^\alpha_{ij}\right) + o(t^2) =$$

$$= \overline{r}_{i,j} + t\left(\overline{U}_{i,j} - \overline{r_\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{ij}\right) + o(t^2).$$

Отже, враховуючи останню рівність та розклад орта нормалі $\overline{n}^*$ поверхні S^* в ряд по степенях t, матимемо

$$b^*_{ij} = \left(\overline{r}_{i,j} + t\left(\overline{U}_{i,j} - \overline{r_\alpha}\delta\Gamma^\alpha_{ij}\right) + o(t^2)\right)\left(\overline{n} + t\delta\overline{n} + o(t^2)\right) =$$

$$= \overline{r}_{i,j}\cdot\overline{n} + t\left(\overline{U}_{i,j}\overline{n} - \overline{r_\alpha}\cdot\overline{n}\delta\Gamma^\alpha_{ij} + \overline{r}_{i,j}\delta\overline{n}\right) + o(t^2).$$

Так як $\overline{r_\alpha}\cdot\overline{n} = 0,\ \overline{n}\cdot\delta\overline{n} = 0$, то дістанемо

$$b^*_{ij} = b_{ij} + t\overline{U}_{i,j}\overline{n} + o(t^2),$$

$$\delta b_{ij} = \overline{U}_{i,j}\overline{n}. \tag{29}$$

Внаслідок підставляння в (29) замість $\overline{U}_{i,j}$ його значення з (13) остаточно знайдемо варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми через тензори деформації $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$ та функцію μ при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні

$$\delta b_{ij} \equiv \beta_{ij} = \overline{U}_{i,j}\overline{n} = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T^\alpha_{,j} - b_{ij}\mu. \tag{30}$$

Перевіримо симетричність тензора β_{ij}. Для цього обчислимо

$$c^{ij}\beta_{ij} = c^{ij}\left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T^\alpha_{,j} - b_{ij}\mu\right) = T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha}.$$

Необхідною і достатньою умовою симетричності тензора β_{ij} є $c^{ij}\beta_{ij} = 0$. Вона виконується тотожно в силу основної системи рівнянь (14).

Варіація повної кривини

Варіацію повної кривини K при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S знайдемо виходячи з формули

$$K^* = \frac{1}{2}c^{*i\alpha}c^{*j\beta}b^*_{ij}b^*_{\alpha\beta}.$$

Підставимо отримані вище розклади відповідних величин по степенях t в останнє співвідношення

$$K^* = \frac{1}{2}(c^{i\alpha}+2tc^{i\alpha}\mu+o(t^2))(c^{j\beta}+2tc^{j\beta}\mu+o(t^2))(b_{ij}+t\beta_{ij}+o(t^2))(b_{\alpha\beta}+t\beta_{\alpha\beta}+$$

$$+o(t^2)) = \frac{1}{2}\left(c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{ij}b_{\alpha\beta} + t(2c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{ij}\beta_{\alpha\beta} + 4c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{ij}b_{\alpha\beta}\mu)\right) + o(t^2) =$$

$$= K + t(c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta}\beta_{ij} + 4K\mu) + o(t^2).$$

За умови $K \neq 0$ введемо до розгляду тензор

$$d^{ij} = \frac{1}{K}c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta},\ d^{i\alpha}b_{j\alpha} = \delta^i_j, \tag{31}$$

компоненти якого $d^{11}, d^{12} = d^{21}, d^{22}$ є елементами матриці, оберненої до матриці $\|b_{ij}\|$. Тоді розклад величини K^* поверхні S^* в ряд по степенях t набуває вигляду

$$K^* = K + tK(d^{\alpha\beta}\beta_{\alpha\beta} + 4\mu) + o(t^2),$$

$$\delta K = K(d^{\alpha\beta}\beta_{\alpha\beta} + 4\mu). \tag{32}$$

Замінимо $\beta_{\alpha\beta}$ на його значення з (30) і отримаємо вираз δK через T^α, μ при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S

$$\delta K = K\left(d^{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}T^\gamma_{,\beta} + 2\mu\right). \tag{33}$$

Отже,

$$K^* = K + tK\left(d^{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}T^{\gamma}_{,\beta} + 2\mu\right) + o(t^2).$$

Зазначимо, що варіацію повної кривини K поверхні S можна знаходити користуючись формулою

$$K^* = \frac{b^*}{g^*}.$$

Покажемо, що в цьому випадку ми приходимо до виразу δK у вигляді (32).

Дійсно,

$$K^* = \frac{b^*}{g^*} = \frac{b + t\delta b + o(t^2)}{g + t\delta g + o(t^2)} = K + t\delta K + o(t^2) = K + t\left(\frac{\partial K^*}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} + o(t^2) =$$

$$= K + t\frac{g\delta b - b\delta g}{g^2} + o(t^2),$$

звідси

$$\delta K = \frac{g\delta b - b\delta g}{g^2}. \tag{34}$$

Знайдемо варіацію дискримінанта другої квадратичної форми b поверхні S

$$b^* = b^*_{11}b^*_{22} - b^{*2}_{12} = (b_{11} + t\beta_{11} + o(t^2))(b_{22} + t\beta_{22} + o(t^2)) - (b_{12} + t\beta_{12} + o(t^2))^2 =$$

$$= b + t(b_{11}\beta_{22} + b_{22}\beta_{11} - 2b_{12}\beta_{12}) + o(t^2).$$

Виразимо b_{ij} через компоненти d^{ij} з формули (31), маємо

$$b^* = b + tKg\beta_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta} + o(t^2),$$

звідки

$$\delta b = Kg\beta_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}. \tag{35}$$

Якщо підставимо отриману рівність (35) в (34), то одержимо варіацію повної кривини K поверхні S у вигляді (32) при квазіареальній деформації.

Варіація середньої кривини

Для обчислення варіації середньої кривини при квазіареальній нескінченно малій деформації поверхні S користуємося формулою

$$2H^* = b^*_{\alpha\beta}g^{*\alpha\beta}.$$

Звідси

$$2H^* = (b_{\alpha\beta} + t\beta_{\alpha\beta} + o(t^2))(g^{\alpha\beta} + t\delta g^{\alpha\beta} + o(t^2)) = 2H + t(b_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \beta_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) +$$

$$+ o(t^2) = 2H + t(-2b_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\nu}\varepsilon_{\gamma\nu} + \beta_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) + o(t^2),$$

$$2\delta H = -2b_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}g^{\beta\nu}\varepsilon_{\gamma\nu} + \beta_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}. \tag{36}$$

Внаслідок підставляння замість $2\varepsilon_{\gamma\nu}$ та $\beta_{\alpha\beta}$ їх виразів з (16) та (30) в (36) одержимо шуканий вираз варіації через тензори деформації $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ та функцію μ

$$2\delta H = T^{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}b^{\gamma}_{\beta} + T^{\alpha}_{,\beta}c^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + 2H\mu. \tag{37}$$

Розкладення в ряд величини $2H^*$ поверхні S^* по степенях t має вигляд

$$2H^* = 2H + t\left(T^{\alpha\beta}c_{\alpha\gamma}b^{\gamma}_{\beta} + T^{\alpha}_{,\beta}c^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + 2H\mu\right) + o(t^2).$$

Література

1. Безкоровайная Л. Л., Гаврильченко М. Л., Заяц Г. Я. *Бесконечно малые деформации поверхностей, соответствующие безмоментному напряженному состоянию равновесия оболочек.*// Научная конференция, посвященная 100-летию университета, мех.-мат. фак-т. Тезисы докладов. – Одесса, 1965, – С. 67-68.
2. Безкоровайна Л. Л. *Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки.*–Одесса: Астропринт, 1999. – 168 с.
3. Безкоровайна Л. Л. *Застосування диференціальних рівнянь при моделюванні загальної деформації поверхні.*– Матеріали VII міжнародної науково-практичної конференції "Наука і освіта 2004". Том 70. Математика. - Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. – С. 3-5.
4. Безкоровайна Л. Л. *Структура множини розв'язків системи рівнянь для загальної нескінченно малої деформації.*//Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2004". – Одеса, 2004. – С.7-8.

Л. Л. Безкоровайна
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: liliyabezk@gmail.com

Ю. С. Хомич
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна
E-mail: khomich_yuliia@mail.ru

L. L. Bezkorovaina, Y. S. Khomich

The quasiareal infinitesimal deformation of the surface in E_3−space

The article deals with the notion of the quasiareal infinitesimal deformation of the surface in E_3−space. The necessary and sufficient condition was installed for the quasiareal infinitesimal deformation. The basic system of the quasiareal infinitesimal deformation was obtained and variations of some geometrical quantities were calculated in this deformation. It should be noted that the quasiareal infinitesimal deformation generalizes the areal infinitesimal deformation of the surface.

The idea of studying the quasiareal infinitesimal deformation belongs to professor M. S. Sinyukov and was declared in the article [1].