DOI 10.15673/2072-9812.2/2014.29620
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(2) 26–35 $d\omega$

О закономерностях канонических квазигеодезических отображений параболически келеровых пространств

Ирина Николаевна Курбатова

Аннотация Мы исследуем особенности специального типа отображений между римановыми пространствами с параболически келеровой структурой.

Ключевые слова Полусимметрическое риманово пространство, параболически келерова структура.

УДК 517.764

1 Введение.

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория диффеоморфизмов многообразий, снабженных различными геометрическими структурами, в частности, алгебраическими, то есть изоморфно представляющими некоторую алгебру [1], [2]. Так возникла теория голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий и их всевозможные обобщения, такие, как почти геодезические [7], p-геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.

В [3] Н.С. Синюковым и Й. Микешем было предложено весьма широкое обобщение геодезических и голоморфно-проективных отображений пространств аффинной связности без кручения с произвольной аффинорной структурой - квазипланарные отображения.

В 1968 году академик А.З. Петров, исследуя проблему моделирования физических полей (в смысле поведения пробных частиц), пришел к задаче квази-геодезического отображения 4-мерных римановых пространств сигнатуры Минковского [4]. При этом движение свободной частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы, то есть геодезические линии одного риманова пространства V_4 переходят в так называемые квазигеодезические линии другого пространства $\overline{V}_4$, в результате чего, как выражался А.З. Петров, "происходит перекачка энергии в силу".

В [4] отмечается, что рассматриваемый случай соответствует весьма широкой ситуации, отвечающей общей точке зрения теории наблюдаемых величин в физике.

А.З. Петровым были получены и в некоторой мере исследованы основные уравнения квази-геодезических отображений.

Тензорный характер основных уравнений квази-геодезических отображений позволяет рассматривать отображений римановых пространств $\overline{V}_n$ и V_n произвольной сигнатуры и размерности, характеризующиеся такими же соотношениями. Будем называть их также квази-геодезическими (КГО).

Класс КГО достаточно широк.Например, он включет в себя геодезические отображения римановых пространств и голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением комплексной структуры.

В [5] из определенных геометрических соображений выделены и обстоятельно исследованы частные случаи КГО. В частности, там налагается требование, чтобы рассматриваемое КГО $f : V_n \to \overline{V}_n$ удовлетворяло условию взаимности, то есть чтобы обратное отображение $f^{-1} : \overline{V}_n \to V_n$ также было квази-геодезическим.

Мы продолжаем исследования в этом направлении. Предметом изучения будут КГО $f : V_n \to \overline{V}_n$ специального типа, которые названы нами каноническими (ККГО) [6], в предположении, что соответствующий отображению аффинор F_i^h порождает на $\overline{V}_n$ и V_n почти келерову структуру.

2 Канонические квази-геодезические отображения (ККГО) параболически келеровых пространств

1°. Напомним,что четномерное риманово пространство K_n с метрическим тенозром $g_{(ij)}(x)$ называется *параболически келеровым* (в терминологии В.В. Вишневского ([2] - *A-пространством*), если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$ максимального ранга $m (n = 2m)$, удовлетворяющая условиям:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \tag{1}$$

$$F_{i,j}^h = 0 \tag{2}$$

где $<,>$ - знак ковариантной производной по связности пространства K_n.

В дальнейшем операцию свертывания с аффинором мы обозначаем следующим образом:

$$T_{\bar{i}\ldots}^{\cdots} = T_{\alpha\ldots}^{\cdots} F_i^\alpha, \qquad T_{\cdots}^{\bar{i}\ldots} = T_{\cdots}^{\alpha\ldots} F_\alpha^i. \tag{3}$$

В частности, ввиду (1)

$$T_{\bar{\bar{i}}\ldots}^{\cdots} = 0, \qquad T_{\cdots}^{\bar{\bar{i}}\ldots} = 0.$$

В этих обозначениях свойства тензоров Римана и Риччи пространства K_n выглядят так:

$$R_{ijk}^{\overline{h}} = R_{\bar{i}jk}^h, \qquad R_{\overline{h}ijk} = -R_{h\bar{i}jk}, \tag{4}$$

$$R_{\overline{h}i} = -R_{h\bar{i}}. \tag{5}$$

Введем в K_n вспомогательный тензор A_i^h, такой что

$$A_\alpha^h A_i^\alpha = 0, \tag{6}$$

$$F_\alpha^h A_i^\alpha + A_\beta^h F_i^\beta = \delta_i^h. \tag{7}$$

Очевидно, при этом

$$F_\alpha^\beta A_\beta^\alpha = m.$$

В [6] показано, что этот тензор определяется с большим произволом.

2°. Рассмотрим пару римановых пространств (K_n, g_{ij}), $(\overline{K}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в каноническом квази-геодезическом отображении (ККГО), соответствующем аффинору F_i^h и удовлетворяющем условию взаимности. Будем полагать, что при этом аффинор F_i^h на обоих пространствах определяет параболически келерову структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения ККГО представятся в виде [6] :

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &F_\alpha^h(x) F_i^\alpha(x) = 0, \quad \overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \overline{F}_{ij}(x) = \overline{g}_{\alpha i}(x) F_j^\alpha(x), \\ &F_{(ij)}(x) = 0, \quad F_{ij}(x) = g_{\alpha i}(x) F_j^\alpha(x), \end{aligned} \tag{9}$$

$$F_{i,j}^h = 0, \qquad F_{i|j}^h = 0, \tag{10}$$

где $\overline{\Gamma}^h_{ij}, \Gamma^h_{ij}$ компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; φ_i - ковектор; F^h_i- аффинор; $< | >, <, >$, - знаки ковариантной производной по связностям $\overline{\Gamma}^h_{ij}, \Gamma^h_{ij}$.

В [6] доказано, что

$$\varphi_{\overline{i}} = 0, \qquad \varphi_{i,\overline{j}} = 0. \tag{11}$$

3 Новая форма основных уравнений ККГО параболически келеровых пространств.

1°. Основные уравнения ККГО (8) можно представить в эквивалентной форме

$$\overline{g}_{ij,k} = \varphi_i \overline{F}_{jk} + \varphi_j \overline{F}_{ik}. \tag{12}$$

Следуя методу, разработанному в теории геодезических отображений Н.С.Синюковым [7], представим эти уравнения в новой более эффективной для изучения форме. Для этого введем в K_n дважды ковариантный неособенный симметрический тензор

$$a_{ij} = \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}. \tag{13}$$

Ввиду (12) имеем

$$a_{ij,k} = \lambda_i F_{jk} + \lambda_j F_{ik}, \tag{14}$$

где

$$\lambda_i = -\overline{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \varphi_\beta. \tag{15}$$

Заметим, что $\lambda_i \neq 0$ при $\varphi_i \neq 0$ и на основании (11)

$$\lambda_{\overline{i}} = 0, \qquad \lambda_{i,\overline{j}} = 0. \tag{16}$$

а на основании (9)

$$a_{i\alpha} F^\alpha_j + a_{j\alpha} F^\alpha_i = 0. \tag{17}$$

Таким образом, если пространство K_n допускает нетривиальное ККГО, то в этом пространстве существует неособенный симметрический дважды ковариантный тензор a_{ij}, удовлетворяющий при $\lambda_i \neq 0$ условиям (14) и (17). Нетрудно видеть, что справедливо и обратное утверждение. Тем самым имеет место

Теорема 1 *Для того, чтобы параболически келерово пространство K_n допускало нетривиальное ККГО, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовал дважды ковариантный неособенный симметрический тензор a_{ij}, удовлетворяющий условиям (14) и (17) при некотором векторе $\lambda_i \neq 0$.*

Напомним, что эквидистантным [7] называется риманово пространство, в котором существует векторное поле $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}$. Такие векторные поля называются конциркулярными. При $\rho \neq 0$, пространство считается принадлежащим основному типу, а при $\rho = 0$ - особому.

Будем называть параболически келерово пространство *почти эквидистантным*, если в нем существует векторное поле $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho F_{ij}$. Можно показать, что при этом по необходимости $\rho = const$. Действительно, условия интегрируемости предыдущих условий с учетом тождества Риччи имеют вид

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \rho_{,j} F_{ik} - \rho_{,k} F_{ij.}$$

Отсюда после циклирования по индексам i, j, k и использования тождества Бианки найдем

$$\rho_{,j} F_{ik} + \rho_{,i} F_{kj} + \rho_{,k} F_{ji} = 0.$$

Поднимая здесь индекс i в K_n и свертывая результат с A^k_i по i, k, получим $\rho_{,j} = 0$, что означает $\rho = const$.

Если параболически келерово пространство является почти эквидистантным основного типа, то оно допускает нетривиальное ККГО. Действительно, в таком пространстве тензор $a_{ij} = c_1 \varphi_i \varphi_j + c_2 g_{ij}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 при произвольных постоянных c_1, c_2, которые могут быть выбраны так,чтобы a_{ij} был невырожденным.

2°.

Соотношения (14) представляют собой новую форму основных уравнений теории ККГО параболически келеровых пространств.

Условия интегрируемости (14)с учетом тождества Риччи имеют вид

$$a_{\alpha(i} R^\alpha_{i)kl} = \lambda_{i,l} F_{jk} - \lambda_{i,k} F_{jl} + \lambda_{j,l} F_{ik} - \lambda_{j,k} F_{il}. \tag{18}$$

Отсюда соответствующими свертываниями находим

$$m\lambda_{j,k} = \mu F_{jk} - a_{\alpha\beta}(\delta^\beta_j R^{\alpha\gamma}_{k\delta} + R^\alpha_{jk\delta} g^{\gamma\beta}) A^\delta_\gamma. \tag{19}$$

Наконец, из условий дифференцируемости этих дифференциальных уравнений с учетом (18) и (19) получим

$$m(m-1)\mu_l = 2(m+1)\lambda_\alpha (m R^{\alpha\beta}_{\gamma l} A^\gamma_\beta + R^\alpha_\beta A^\beta_l) + a_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} M^{\alpha\beta}_{\gamma[\sigma,\nu]} A^\sigma_\delta A^{\overline{\nu}}_l. \tag{20}$$

Соотношения (18), (19), (20), которые обозначим (A), представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных первого порядка типа Коши с коэффициентами, однозначно определенными пространством K_n, относительно искомых функций a_{ij}, λ_k, ν. Для решения таких систем в теории дифференциальных уравнений разработаны регулярные методы.

По существу нами доказана

Теорема 2 *Для того, чтобы параболически келерово пространство K_n допускало нетривиальное ККГО, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве система дифференциальных уравнений (A) имела нетривиальное решение*

$$a_{ij}(x)(= a_{ji}(x), \quad \det\|a_{ij}\| \neq 0), \quad \lambda_i(x)(\neq 0), \quad \nu(x),$$

удовлетворяющее условиям (17).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что система (A) имеет не более одного решения для каждого набора начальных значений Коши

$$a_{ij}(x_0) = \overset{\circ}{a}_{ij}, \quad \lambda_i(x_0) = \overset{\circ}{\lambda}_i, \quad \nu(x_0) = \overset{\circ}{\nu},$$

поэтому число произвольных постоянных в общем решении уравнений (A)при условии (17) ограничено. Вопрос о существовании нетривиальных решений этой системы сводится к исследованию ее условий интегрируемости и их дифференциальных продолжений, которые будут уже алгебраической системой уравнений относительно неизвестных функций с коэффициентами из K_n. Мы не выписываем их ввиду громоздкости.

4 ККГО параболически келеровых пространтсв на специальные пространства.

1°. Предположим, что параболически келерово пространство K_n допускает нетривиальное ККГО на полусимметрическое пространство $\overline{K}_n$, то есть $\overline{R}^h_{ijk|[lm]} = 0$. На основании тождества Риччи это эквивалентно следующим условиям

$$-\overline{R}^\alpha_{ijk}\overline{R}^h_{\alpha lm} + \overline{R}^h_{\alpha jk}\overline{R}^\alpha_{ilm} + \overline{R}^h_{i\alpha k}\overline{R}^\alpha_{jlm} + \overline{R}^h_{ij\alpha}\overline{R}^\alpha_{klm} = 0. \qquad (21)$$

Зависимость между компонентами тензоров Римана параболически келеровых пространств, находящихся в ККГО, имеет вид [6]:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + F^h_k\varphi_{i,j} - F^h_j\varphi_{i,k} + F^h_i(\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}). \qquad (22)$$

Подставим это выражение в (21), затем в полученных соотношениях опустим индекс h в K_n, результат просимметрируем по индексам i, h и свернем с g^{kl} по индексам h, l. В итоге получим:

$$\begin{gathered}\varphi^{\alpha}_{,\beta}(F_{i[j}R^{\beta}_{m]h\alpha} + F_{h[j}R^{\beta}_{m]i\alpha}) + \varphi_{\alpha,j}R^{\alpha}_{(ih)\overline{m}} - \\ -\varphi_{\alpha,m}R^{\alpha}_{(ih)\overline{j}} + F_{j(h}\varphi_{i),\alpha}R^{\alpha}_{m} + R_{\overline{j}(i}\varphi_{h),m} = 0.\end{gathered} \tag{23}$$

После симметрирования этих равенств по индексам m, j будем иметь:

$$\varphi_{i,(m}R_{j)\overline{h}} + \varphi_{h,(m}R_{j)\overline{i}} - \varphi_{i\alpha}R^{\alpha}_{(j}F_{m)h} - \varphi_{h\alpha}R^{\alpha}_{(j}F_{m)i} = 0. \tag{24}$$

Если в (23) поднять индекс h с помощью метрического тензора пространства K_n, а затем свернуть с A^m_j по индексам i, j, то выяснится, что $\varphi_{i\alpha}R^{\alpha}_{h} = -\varphi_{h\alpha}R^{\alpha}_{i}$. Поэтому после циклирования (23) по индексам h, m, j имеем:

$$\varphi_{(h,m)}R_{j\overline{i}} + \varphi_{(m,j)}R_{h\overline{i}} + \varphi_{(j,h)}R_{m\overline{i}} = 0.$$

Нетрудно доказать, что если $R_{j\overline{i}} \neq 0$, то отсюда $\varphi_{i,j} = -\varphi_{j,i}$. Тогда из (24) свертыванием с $g^{h\alpha}A^j_{\alpha}$ найдем

$$m\varphi_{i,\alpha}R^{\alpha}_{i} = R\varphi_{i,m} - \nu R_{\overline{i}m} - \mu F_{im},$$

где $\nu = \varphi^{\alpha}_{,\beta}A^{\beta}_{\alpha}$, $\mu = \varphi^{\alpha}_{,\beta}R^{\beta}_{\gamma}A^{\gamma}_{\alpha}$. В соответствии с этим (24) могут быть представлены в виде

$$b_{im}a_{hj} + b_{ij}a_{hm} + b_{hm}a_{ij} + b_{hj}a_{im} = 0,$$

где

$$a_{ij} = m\varphi_{ij} - \nu F_{ij}, \quad b_{ij} = RF_{ij} + mR_{\overline{i}j}.$$

Отсюда несложно показать, что либо $a_{ij} = 0$, либо $b_{ij} = 0$, то есть в пространстве K_n выполняется по крайней мере одно из условий:

$$a)\varphi_{ij} = \frac{\nu}{m}F_{ij}, \qquad b)R_{i\overline{j}} = \frac{R}{m}F_{ij} \tag{25}$$

В случае а) мы ранее назвали пространтсво почти эквидистантным. В случае b) будем называть K_n *почти эйнштейновым*, а при $R_{i\overline{j}} = 0$ - *почти Риччи-плоским.*

Имеет место

Теорема 3 *Если параболически келерово пространство K_n допускает нетривиальное ККГО на полусимметрическое $\overline{K}_n$, то K_n является либо почти Эйнштейновым (в частности, почти Риччи-плоским), либо почти эквидистантным.*

2°. Предположим, что $\overline{K}_n$ - симметрическое пространство, то есть для его тензора Римана выполняются условия вида $\overline{R}^h_{ijk|l} = 0$.Тогда на основании (22) и (8)для тензора Римана K_n имеем:

$$R^h_{ijk,l} + F^h_k \varphi_{i,jl} - F^h_j \varphi_{ik,l} + F^h_i \varphi_{[k,j]l} + F^h_l \varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} - \\ -\varphi_i R^h_{\bar{l}jk} - \varphi_j R^h_{i\bar{l}k} + \varphi_k R^h_{i\bar{l}j} = 0. \tag{26}$$

Применяя к этим соотношениям стандартные алгебраические операции и подходящие свертывания с A^h_i, а также учитывая (4),(5),(11), находим оттуда

$$\varphi_{i,jk} = 0, \qquad R^h_{ij\bar{k}} = 0. \tag{27}$$

Пространство K_n, удовлетворяющее $R^h_{ij\bar{k}} = 0$,будем называть *почти плоским.* Из (22)следует, что если почти плоское параболически келерово пространство K_n допускает нетривиальное ККГО на $\overline{K}_n$, то $\overline{K}_n$ также является почти плоским.

Из (26) при условиях (27) очевидно, что $R^h_{ijk,l} = 0$, то есть K_n также является симметрическим.

Имеет место

Теорема 4 *Если параболически келерово пространство K_n допускает нетривиальное ККГО на симметрическое $\overline{K}_n$, то K_n само является симметрическим, и оба они - почти плоские.*

Следствие 1 *Симметрические параболически келеровы пространства, отличные от почти плоских, не допускают нетривиальных ККГО.*

5 Метрики почти эквидистантных параболически келеровых пространтсв.

Выше мы отмечали, что почти эквидистантные параболически келеровы пространства допускают нетривиальные ККГО. Поэтому нас интересуют метрики таких пространств.

Ввиду (2) аффинорная структура параболически келерова пространства интегрируема, поэтому в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, называемую адаптированной (к аффинору), в которой аффинор приводится к виду:

$$(F^h_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$F_b^{a+m} = \delta_b^a, \qquad F_{b+m}^{a+m} = F_b^a = F_{b+m}^a = 0, \tag{28}$$

$a, b = 1, 2, \ldots, m = \frac{n}{2}$.

В адаптированной системе координат ввиду (1) приобретает специфику и матрица метрического тензора:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $G_1 = {G_1}^T$, $G_2 = -{G_2}^T$,то есть

$$g_{ab}(x) = g_{ba}(x); \qquad g_{ab+m}(x) = -g_{a+mb}(x); \qquad g_{a+mb+m}(x) = 0.$$

В [8] построены метрики эквидистантных основного типа параболически келеровых пространств в специальной системе координат.

Эквидистантное риманово пространство определяется наличием в нем векторного поля $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющего уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}$. Здесь по необходимости $\rho = const$. Основному типу соответствует $\rho \neq 0$.

Выше мы назвали параболически келерово пространство *почти эквидистантным*, если в нем существует векторное поле $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho F_{ij}$. Здесь также по необходимости $\rho = const$.

Нетрудно видеть, что если в эквидистантном основного типа K_n $\varphi_{\bar{i}} \neq 0$, то оно будет и почти эквидистантным основного типа, так как тогда $\varphi_{\bar{i},j} = \rho F_{ij}$. Обратное, вообще говоря, неверно. То есть класс почти эквидистантных параболически келеровых пространств гораздо шире класса эквидистантных.

Аналогично тому, как это сделано в [8], мы получили метрики почти эквидистантных параболически келеровых пространств в специальной системе координат. Нами доказана

Теорема 5 *В любом почти эквидистантном основного типа параболически келеровом пространстве K_n существует система координат, в которой структура аффинора F_i^h имеет вид (28), а ненулевые компоненты метрического тензора g_{ij} задаются формулами:*

$$g_{11} = 2B,$$

$$g_{1a} = x^{b+m}\partial_{ab}B + 2D_a,$$

$$g_{1a+m} = \partial_a B,$$

$$g_{ab} = \partial_{a+mb+m}C + x^{c+m}(\partial_{ac}D_b + \partial_{cb}D_a),$$

$$g_{a+mb} = \partial_a D_b - \partial_b D_a,$$

где $a, b, c = 2, 3, ...m$, $m = \frac{n}{2}$; *функции* A, D_a *зависят от переменных* $2, 3, ...m$; *функция* C *не зависит от* x^1 *и* x^{1+m}.

Заметим, что необходимое условие $\det \|g_{ij}\| \neq 0$ обеспечивается выбором произвольных функций B, D_a, C.

Список литературы

1. А. П. Широков. Пространства над алгебрами и их применения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНИТИ. М., Т.73, 2002 135–161.
2. В. В. Вишневский. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНИТИ. М., Т.73, 2002 5–64.
3. Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов. Математика. №1, 1983 55–61.
4. Петров А.З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7–21.
5. И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.
6. И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств.//Proc. Intern. Geom. Center.Vol.7,No.1,2014.
7. Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
8. М. Шиха, Й. Микеш. Об эквидистантных параболически келеровых пространствах.//Тр.геом.семин.22,Казань(1994).с.97-107.

Ирина Николаевна Курбатова
ОНУ, Одесса, Украина
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Irina N. Kurbatova

Regularity of the canonical quasi-geodesic mappings of parabolic *Kähler* spaces

We investigate the features of the special type mappings between Riemannian spaces with parabolic *Kähler* structure.