

Бесконечно малые конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения

Сергей Михайлович Покась

Аннотация Рассматриваются аналитические конформные преобразования, вводятся и исследуются конформные преобразования второй степени в римановом пространстве второго приближения. Установлена связь между конформными преобразованиями и приближенными конформными преобразованиями.

Ключевые слова риманово пространство, конформные преобразования, обобщенные уравнения Киллинга.

УДК 514.7

1 Аналитические конформные преобразования

Рассмотрим риманово пространство V_n , отнесенное к произвольной системе координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$. В окрестности любой его фиксированной точки $M_0(x_0^n)$ построим пространство второго приближения $\tilde{V}_n^2(y^n; \tilde{g}_{ij}(y))$, определив его метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(y)$ следующим образом:

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} y^{l_1} y^{l_2}, \quad (1.1)$$

где $\underset{\circ}{g}_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $\underset{\circ}{R}_{il_1l_2j} = R_{il_1l_2j}(M_0)$.

Подобно тому как в ([3]) изучались аналитические движения в пространстве \tilde{V}_n^2 будем исследовать аналитические бесконечно малые конформные преобразования:

$$y'^h = y^h + t\tilde{\xi}^h(y), \quad (1.2)$$

где $\tilde{\xi}^h(y)$ удовлетворяет обобщенным уравнениям Киллинга ([1],[2])

$$L_{\tilde{\xi}}\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i}\tilde{g}_{\alpha j} + \frac{\partial\tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j}\tilde{g}_{\alpha i} + \tilde{\xi}^\alpha\frac{\partial\tilde{g}_{ij}}{\partial y^\alpha} = \psi(y)\tilde{g}_{ij} \quad (1.3)$$

Компоненты вектора смещения $\tilde{\xi}^h(y)$ ищем в виде аналитических функций

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^h, \quad (1.4)$$

где введено обозначение

$$a_k^h = a_{.l_1\dots l_k}^h y^{l_1} \dots y^{l_k} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad a_0^h = a^h \quad (1.5)$$

В соотношениях (1.5) $a^h, a_{.l_1}^h, a_{.l_1\dots l_k}^h$ - некоторые постоянные, причем $a_{.l_1\dots l_k}^h$ ($k \geq 2$) симметричны по любой паре нижних индексов.

В пространстве \tilde{V}_n^2 рассмотрим аналитическую функцию ψ действительных переменных:

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad (1.6)$$

В (1.6) введены обозначения

$$b_k = b_{l_1\dots l_k} y^{l_1} \dots y^{l_k} \quad (1.6')$$

$$b_k^h = \frac{1}{k+1} \frac{\partial b_{k+1}}{\partial y^\alpha} g_0^{\alpha h} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.6'')$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1 Для того чтобы ряды (1.4) определяли компоненты вектора смещения бесконечно малых конформных преобразований в римановом пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 , необходимо, чтобы члены этих рядов определялись из уравнений и рекуррентных соотношений:

$$a_{(ij)} = b g_{ij} \quad (1.7)$$

$$a_p^h = -\frac{p-3}{p-1} a_{p-2}^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{p} \left(b_{p-1} y^h - \frac{1}{2} b_{p-2}^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \quad (1.8)$$

$$(p = 2, 3, \dots)$$

$$t_k^h = \frac{1}{3} R_{\circ l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \quad (1.9)$$

Доказательство. Подставим соотношения (1.1), (1.4)-(1.6) в обобщенные уравнения Киллинга (1.3) и приведем подобные члены

$$\begin{aligned} & (a_{(ij)} - b g_{ij}) + \left[2 a_{\circ 1}^{(ij)} + \frac{1}{3} a_{\circ}^\alpha R_{\alpha(ij)l} y^l - b_{\circ 1} g_{ij} \right] + \\ & + \left\{ 3 a_{\circ 2}^{ij} + \frac{1}{3} \left[\left(a_{\circ(i}^\alpha R_{j)l_1 l_2 \alpha} - b R_{il_1 l_2 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} + a_{\circ 1}^\alpha R_{\alpha(ij)l} y^l \right] - b_{\circ 2} g_{ij} \right\} + \\ & + \sum_{k=3}^{\infty} \left\{ (k+1) a_{\circ k}^{(ij)} + \frac{1}{3} \left[(k-1) \left(a_{\circ(i}^\alpha R_{j)l_1 l_2 \alpha} - \frac{1}{k-1} b_{\circ k-2} R_{il_1 l_2 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{\circ k-2}^\alpha R_{il_1 l_2 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} + a_{\circ k-2}^\alpha R_{\alpha(ij)l} y^l \right] - b_{\circ k} g_{ij} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Так как приведенные коэффициенты при $y^{l_1}, y^{l_2}, \dots, y^{l_n}$ должны обращаться в нуль, то из (1.10) получаем (1.7), а также

$$2! a_{(ij)l_1} + \frac{1}{3} a_{\circ}^\alpha R_{\alpha(ij)l_1} - b_{l_1} g_{ij} = 0 \quad (1.11)$$

$$3! a_{(ij)l_1 l_2} + \frac{1}{3} \left[a_{\circ(i}^\alpha R_{j)(l_1 l_2) \alpha} + a_{\circ(l_1}^\alpha R_{l_2)(ij) \alpha} - b R_{\circ(l_1 l_2) j} \right] = 0 \quad (1.11')$$

$$\begin{aligned} & p! a_{(ij)l_1 \dots l_{p-1}} + \frac{1}{3} S_{l_1 \dots l_{p-1}} \left[a_{\circ l_1 \dots l_{p-3}(i}^\alpha R_{j)(l_{p-2} l_{p-1}) \alpha} + a_{\circ l_1 \dots l_{p-2}}^\alpha R_{\alpha(ij)l_{p-1}} + \right. \\ & \left. + b_{l_1 \dots l_{p-3}} R_{\circ i l_{p-2} l_{p-1} j} \right] - (p-1)! b_{l_1 \dots l_{p-1}} g_{ij} = 0 \\ & (p = 4, 5, \dots) \end{aligned} \quad (1.11'')$$

($S_{l_1 \dots l_{p-1}}$ означает операцию симметрирования по индексам $l_1 \dots l_{p-1}$).

Уравнения (1.11) проальтернируем по индексам j и l_1 , результат просимметрируем по индексам i и j , приняв во внимание уравнения (1.11), результат свернем с $y^i y^j g^{l_1 h}$:

$$a_2^h = a_{\circ 2}^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b_1 y^h - \frac{1}{2} b_{\circ}^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \quad (1.12)$$

Поступая аналогичным образом с уравнениями (1.11'), получаем

$$a_i^h = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} y^h - \frac{1}{2} b_1^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \quad (1.13)$$

Уравнения (1.11'') свернем с $y^{l_2} y^{l_3} \dots y^{l_{p-1}}$ и воспользуемся обозначениями (1.5), (1.6) и (1.9):

$$(p-1) \left(\frac{p a_{(ij)l_1}}{p-2} - \frac{b_{l_1}}{p-2} g_{ij} \right) + \frac{1}{3} \left\{ (p-2) \left[3(p-3) \left(\frac{a_{(i t_j)\alpha}}{p-2} - \frac{1}{p-2} \frac{b_{l_1}}{p-2} t_{ij} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{a_{(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 m)\alpha}}{p-3} - \frac{1}{p-2} \frac{b}{p-3} R_{i(l_1 m)j} + \frac{a^{\alpha}}{p-2} R_{\alpha(ij)l_1} y^m \right) \right] + \right. \\ \left. \left. a_{l_1 \dots l_{p-2}}^{\alpha} R_{\alpha(ij)l_{p-1}} \right\} = 0 \quad (1.14)$$

Проальтернируем (1.14) по индексам j и l_1 , результат просимметрируем по индексам i и j приняв во внимание уравнения (1.14), получаем:

$$2p(p-1) a_{l_1(ij)} = \frac{1}{3} \left\{ (p-2) \left[3(p-3) \left(-2 \frac{a_{ij}^{\alpha} t_{\alpha l_1}}{p-2} - \frac{1}{p-2} \left(\frac{b_{l_1}}{p-2} t_{ij} - \frac{b_{(i t_j)l_1}}{p-2} \right) \right) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{a_{(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 m)\alpha}}{p-3} - \frac{a_{(i}^{\alpha} R_{l_1)(j m)\alpha}}{p-3} - \frac{a_{(j}^{\alpha} R_{l_1)(i m)\alpha}}{p-3} + \frac{a_{l_1}^{\alpha} R_{\alpha(ij)m}}{p-3} - \frac{a_{(i}^{\alpha} R_{j)(\alpha m)l_1}}{p-3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{p-2} \frac{b}{p-3} R_{i(l_1 m)j} \right) y^m \right] + \frac{a^{\alpha}}{p-2} R_{\alpha(ij)l_1} \left. \right\} + (p-1) \left(\frac{b_{(i} g_{j)l_1}}{p-2} - \frac{b_{l_1}}{p-2} g_{ij} \right)$$

Свернув последнее соотношение с $y^i y^j g^{l_1 h}$ и приняв во внимание (1.5), (1.6), (1.9) и алгебраические свойства тензора Римана, получаем (1.8).

Замечание 1 Формулы (1.8) дают выражение p -х членов рядов (1.4) через их $(p-1)$ -е члены, объекты пространства \tilde{V}_n^2 в окрестности точки M_0 и члены рядов (1.6).

Используя найденные рекуррентные представления, получим формулу общего члена рядов (1.4).

Лемма 2 Для того чтобы ряды (1.4) определяли компоненты вектора смещения аналитических бесконечно малых конформных преобразований в пространстве \tilde{V}_n^2 , необходимо, чтобы a^h удовлетворяли уравнениям (1.7),

а все последующие члены рядов имели вид:

$$\begin{aligned}
 a_2^h &= a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \\
 a_{2p}^h &= \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^\alpha t_\alpha^{(p)h} + \frac{1}{2p} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \\
 &+ \frac{(-1)^p}{4(2p-1)} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} \frac{b^\alpha}{2p-2s-1} t_\alpha^{(s)h} g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (p=2, 3, \dots)
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
 a_3^h &= \frac{1}{3} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \\
 a_5^h &= \frac{1}{12} b^\alpha t_\alpha^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{5} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \\
 a_{2p+1}^h &= \frac{1}{2p+1} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \frac{1}{2p} \left[\frac{p+1}{2p+1} b^\alpha t_\alpha^h + \right. \\
 &\left. + \sum_{s=2}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}(p-s)}{2p-2s+1} \frac{b^\alpha}{2p-2s+1} t_\alpha^{(s)h} \right] g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (p=3, 4, \dots)
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Доказательство. Из соотношения (1.8) при $p=2$ имеем

$$a_2^h = a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \tag{1.17}$$

Далее из (1.8) при $p=4$ с учетом (1.17) следует, что

$$a_4^h = -\frac{1}{3} a^\alpha t_\alpha^{(2)h} + \frac{1}{3 \cdot 4} b^h t_\alpha^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{4} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \tag{1.18}$$

Но к такому же результату мы приходим из (1.15) при $p=2$. Таким образом, формулы (1.15) верны для $p=2$. Пусть они имеют место для $p=m$, т.е.

$$\begin{aligned}
 a_{2m}^h &= \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} a^\alpha t_\alpha^{(m)h} + \frac{(-1)^m}{4(2m-1)} \left[\frac{2m-3}{m-1} \frac{b^\alpha}{2m-4} t_\alpha^h + \frac{2m-5}{m-2} \frac{b^\alpha}{2m-6} t_\alpha^{(2)h} + \right. \\
 &+ \left. \frac{2m-7}{m-3} \frac{b^\alpha}{2m-5} t_\alpha^{(3)h} + \dots + b^\alpha t_\alpha^{(m-1)h} \right] g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{2m} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right)
 \end{aligned}$$

Докажем, что она имеет место и для $p=m+1$.

Действительно, из Леммы 1 следует, что

$$a_{2m+2}^h = \left[-\frac{2m-1}{2m+12m} a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2m+2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{1_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \right] \tag{1.19}$$

Учитывая (1.19), получаем, что

$$a_{2m+2}^h = -\frac{2m-1}{2m+1} \left\{ \frac{(-1)^{m+1}}{2m-1} a^\beta t_\beta^{(m)\alpha} + \frac{(-1)^{(m+1)}}{4(2m-1)} \left[\frac{2m-3}{m-1} b^\beta t_\beta^\alpha + \frac{2m-5}{m-2} b^\beta t_\beta^{(2)\alpha} + \dots + b^\beta t_\beta^{(m-1)\alpha} \right] g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{2m} \left(b_{2m+1} y^h - \frac{1}{2} b_{2m-2}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \right\} + \frac{1}{2m+2} \left(b_{2m+1} y^h - \frac{1}{2} b_{2m}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right)$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание алгебраические свойства тензора Римана, приходим к (1.15). Аналогично доказывается справедливость формул (1.16).

Исследуем сходимость рядов, члены которых находятся из формул (1.15) и (1.16). Справедливо утверждение.

Лемма 3 *Ряды (1.4), члены которых определяются формулами (1.15) и (1.16) сходятся абсолютно и равномерно на множестве*

$$|R_{\circ l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2}| \leq \frac{3c}{n} \quad (c < 1)$$

Доказательство. Доказательство проведем для (1.15) (для (1.16) доказывается аналогично). Очевидно, что

$$|a_{2p}^h| \leq \left| \frac{(-1)^{(p+1)}}{2p-1} a^\alpha t_\alpha^{(p)h} \right| + \left| \frac{1}{2p} b_{2p-1} y^h \right| + \left| \frac{1}{4p} b_{2p-2}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right| + \left| \frac{1}{4} \frac{(-1)^p}{2p-1} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} b_{2p-2s-2}^\alpha t_\alpha^{(s)h} \right| \cdot |g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}|$$

Оценим каждый модуль отдельно. Введем следующие обозначения:

$$\max \{|t_k^h|\} = \frac{c}{n}, \quad \max \{|a^h|\} = c_1.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|t_k^{(2)h}| = |t_\alpha^h \cdot t_k^\alpha| \leq |t_\alpha^h| \cdot |t_k^\alpha| \leq \frac{c}{n} \cdot \frac{c}{n} \cdot n = \frac{c^2}{n}$$

$$|t_k^{(3)h}| \leq \frac{c^3}{n}$$

...

$$|t_k^{(p)h}| \leq \frac{c^p}{n}$$

Поэтому

$$\left| \frac{(-1)^{(p+1)}}{2p-1} a^\alpha t_\alpha^{(p)h} \right| \leq c_1 \cdot \frac{c^p}{n}$$

Следовательно, ряды $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} a^\alpha t_\alpha^{(p)h}$ мажорируются числовым рядом

$\sum_{p=2}^{\infty} c^p$, который сходится при $c < 1$. По теореме Вейерштрасса ([5]) указанные ряды сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$\left| R_{\circ, l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \right| \leq \frac{3c}{n},$$

где $c < 1$. Далее, ряды $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{2p} \frac{b}{2p-1}$ и $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{b^h}{2p-2}$ сходятся в силу аналитичности функции $\psi(y)$ из (1.6).

Рассмотрим ряды:

$$\lambda^h = \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{2p-2s-2} \frac{b^\alpha}{2p-2s-2} t_\alpha^{(s)h} \quad (1.20)$$

Нетрудно показать, что (1.20) можно записать в эквивалентном виде:

$$\lambda^h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k+1} b^\alpha \sum_{s=1}^{\infty} t_\alpha^{(s)h} \quad (b_\circ^\alpha = b^\alpha)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} \frac{b^\alpha}{2p-2s-2} t_\alpha^{(s)h} \right| &= \left| \sum_{s=1}^{\infty} t_\alpha^{(s)h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k+1} b^\alpha \right| \leq \\ &\leq 2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |t_\alpha^{(s)h} b^\alpha| \end{aligned}$$

Но

$$|t_\alpha^{(s)h} b^\alpha| \leq |t_\alpha^{(s)h}| \cdot |b^\alpha| = \frac{c^s}{n} \sum_{m=1}^n |b_{2k}^m|$$

Таким образом,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |t_\alpha^{(s)h} b^\alpha| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^s}{n} \left(|b_{2k}^1| + |b_{2k}^2| + \dots + |b_{2k}^n| \right) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{\infty} c^s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n |b_{2k}^m| \right)$$

Числовой ряд $\sum_{s=1}^{\infty} c^s$ сходится при $c < 1$, ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n |b_{2k}^m|$ сходятся в силу аналитичности функции $\psi(y)$ из (1.6). Лемма доказана.

Из уравнений (1.8) и (1.10) имеем:

$$2p a_{2p-1}^{(ij)} = \left\{ -\frac{2p-3}{2p-1} \left[(2p-2) a_{2p-3}^{(i) t_j} \alpha - a_{2p-2} \mu_{ij}^\alpha \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{p} \left[(p-1) \left(b_{2p-2}^{(i) g_j} y^l - b_{2p-3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + b_{2p-1} g_{ij} \right] \right\} \quad (1.21)$$

$$(2p+3) a_{2p+2}^{(ij)} = \left\{ -\frac{p}{p+1} \left[(2p+1) a_{2p}^{(i) t_j} \alpha - a_{2p+1} \mu_{ij}^\alpha \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2p+3} \left[(2p+1) \left(b_{2p+1}^{(i) g_j} y^l - b_{2p} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + b_{2p+2} g_{ij} \right] \right\} \quad (1.22)$$

Подстановка соотношений (1.1), (1.8), (1.10), (1.7) и (1.22) в уравнения (1.8) дает

$$a_{ij} = b g_{ij}$$

$$\frac{4p}{2p+1} \left(a_{2p-1}^{(i) t_j} \alpha + a_{2p} \mu_{ij}^\alpha \right) + \frac{p}{p+1} \left(b_{2p}^{(i) g_j} y^l - b_{2p+1} g_{ij} - \right. \\ \left. - b_{2p-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b_{2p-1} t_{ij} = 0 \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

$$\frac{2m+1}{m+1} \left(a_{2m}^{(i) t_j} \alpha + a_{2m+1} \mu_{ij}^\alpha \right) + \frac{2m+1}{2m+3} \left(b_{2m+1}^{(i) g_j} y^l - b_{2m+2} g_{ij} - \right. \\ \left. - b_{2m} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b_{2m} t_{ij} = 0 \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.24)$$

Таким образом, доказано утверждение:

Лемма 4 Для того, чтобы ряды (1.4), члены которых находятся из рекуррентных соотношений (1.8)-(1.10), определяли компоненты вектора смещения аналитических бесконечно малых конформных преобразований в пространстве \tilde{V}_n^2 , необходимо выполнение уравнений (1.7), (1.23) и (1.24).

Объединяя Леммы 1-4, получаем теорему.

Теорема 1 Для того, чтобы ряды (1.4) определяли компоненты вектора смещения, аналитических бесконечно малых конформных преобразований в пространстве \tilde{V}_n^2 , необходимо и достаточно выполнение условий (1.7), (1.15), (1.16), (1.23) и (1.24).

Рассмотрим уравнение (1.24) при $m = 0$:

$$a_{(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 l_2)\alpha} + S_{l_1 l_2} \left[a_{l_1}^{\alpha} R_{\alpha(ij)l_2} + b_{l_1(i} g_{j)l_2} - b_{l_1 l_2} g_{ij} - b_{ij} g_{l_1 l_2 i} - b R_{il_1 l_2 j} \right] = 0$$

Свертывание последнего соотношения с $g_{l_1 l_2} g^{ij}$ на основании (1.7) дает

$$b_{ij} g^{\alpha\beta} = \frac{bR}{2(n-1)}$$

Свертывая теперь (1.21) с $g^{l_1 l_2} g^{ij}$ и принимая во внимание последнее равенство находим b_{ij} :

$$b_{ij} = \frac{1}{n-2} \left[a_{(i}^{\alpha} R_{j)\alpha} - \frac{bR}{2(n-1)} g_{ij} \right] \quad (1.25)$$

Аналогично поступая с уравнениями (1.23) при $p = 1$, используя (1.10), получаем выражение $b_{l_1 l_2 l_3}$ через $b, b_{l_1}, a_{l_1}, a_{l_1 l_2}$ и объекты пространства \tilde{V}_n^2 в точке M_0 . Далее из (1.24) при $m = 1$ находим выражение $b_{l_1 l_2 l_3 l_4}$ через те же объекты. Продолжая этот процесс, убеждаемся в том, что все члены ряда (1.6) за исключением b и b_1 выражаются через $a_{l_1}, a_{l_1 l_2}$ и объекты пространства \tilde{V}_n^2 в точке M_0 .

Замечание 2 Так как члены рядов (1.4) выражаются через a^h, a_1^h, b, b_1 и объекты пространства \tilde{V}_n^2 в точке M_0 , то учитывая уравнения (1.7), (1.23) и (1.24), приходим к известному результату ([4]) о том, что максимальный порядок r группы Ли аналитических бесконечно малых конформных преобразований в римановом пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 удовлетворяет неравенству

$$r \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2 Конформные преобразования второй степени

Рассмотрим бесконечно малые конформные преобразования второй степени в пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 для риманова пространства V_n , скалярная кривизна R которого в точке M_0 отлична от нуля. Так как в этом случае в (1.4)

$$a_p^h = 0 \quad (p \geq 3) \quad (2.1)$$

то из уравнений (1.7) и рекуррентных соотношений (1.8) - (1.10) следует

$$a_{(ij)} = b g_{ij} \quad (2.2)$$

$$a_2^h = a_\alpha^h t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b_1 y^h - \frac{1}{2} b_1^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{3} a_2^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{4} \left(b_3 y^h - \frac{1}{2} b_3^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\left[b_{2m-1} y^h - \frac{1}{2} b_{2m-2}^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] = 0 \quad (m \geq 3) \quad (2.5)$$

$$\left[b_{2k} y^h - \frac{1}{2} b_{2k-1}^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

На основании (2.1) уравнения (1.23) - (1.24) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \left[a_{(i}^\alpha t_{j)\alpha} + a_{2\alpha}^\alpha \mu_{ij}^\alpha \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[b_{(i} g_{j)l} y^l - b_3 g_{ij} - b_{ij} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - b_1 t_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p+1} \left[b_{(i} g_{j)l} y^l - \frac{b}{2p+1} g_{ij} - \frac{b_{ij}}{2p-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - \frac{b}{2p-1} t_{ij} = 0 \\ & (p = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \left[a_{(i}^\alpha t_{j)\alpha} + a_{1\alpha}^\alpha \mu_{ij}^\alpha \right] + \\ & + \frac{1}{3} \left[b_{(i} g_{j)l} y^l - \frac{b}{2} g_{ij} - b_{ij} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - b t_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2k+1}{2k+3} \left[b_{(i} g_{j)l} y^l - \frac{b}{2k+2} g_{ij} - \frac{b_{ij}}{2k} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - \frac{b}{2k} t_{ij} = 0 \\ & (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим уравнения (2.6). Свернем обе части с $g_{hl} y^l$:

$$\left(b_{l_1 l_2 \dots l_{2k}} g_{l_{2k+1} l_{2k+2}} \right) y^{l_1} \dots y^{l_{2k+2}} = 0$$

Последнее соотношение запишем в эквивалентном виде

$$S_{l_1 l_2 \dots l_{2k+2}} \left(b_{l_1 l_2 \dots l_{2k}} g_{\circ l_{2k+1} l_{2k+2}} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Свертывание (2.11) с $g_{\circ}^{l_1 l_2} g_{\circ}^{l_3 l_4} \dots g_{\circ}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ дает:

$$b_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}} g_{\circ}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots g_{\circ}^{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} = 0 \quad (2.12)$$

Свернем теперь (2.11) с $g_{\circ}^{l_3 l_4} \dots g_{\circ}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ и примем во внимание (2.12):

$$b_{l_1 l_2 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g_{\circ}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots g_{\circ}^{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} = 0 \quad (2.13)$$

Свертывание (2.11) с $g_{\circ}^{l_5 l_6} \dots g_{\circ}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ при условии (2.13) дает

$$b_{l_1 l_2 l_3 l_4 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} g_{\circ}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots g_{\circ}^{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} = 0 \quad (2.14)$$

Продолжая этот процесс, на $(k-1)$ шаге мы имеем

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2k-2} \alpha \beta} g_{\circ}^{\alpha \beta} = 0 \quad (2.15)$$

И наконец, свернув с $g_{\circ}^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ на основании (2.15) убеждаемся в том, что

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2k-2}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

Аналогично из (2.5) следует

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2m-1}} = 0 \quad (m = 3, 4, \dots) \quad (2.17)$$

Поскольку имеет место (2.16), то все уравнения системы (2.10) выполняются тождественно. Заметим, что согласно (2.17) из совокупности (2.8) остается только одно - при $p = 2$:

$$S_{l_1 l_2 \dots l_5} \left(b_{l_1 l_2 l_3} R_{i l_4 l_5} \right) = 0 \quad (2.18)$$

а остальные выполняются тождественно. Из (2.9) на основании (2.16) имеем:

$$a_{(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 l_2) \alpha} + a_{(l_1}^{\alpha} R_{l_2)(ij) \alpha} = b_{\circ} R_{i(l_1 l_2) j}$$

Сворачивая последнее уравнение с $g_{\circ}^{l_1 l_2}$, получаем:

$$a_{(i}^{\alpha} R_{j)\alpha} + a_{\alpha\beta} R_{(ij)}^{\alpha\beta} = b R_{ij}$$

Но из (2.2) вытекает, что

$$a_{\alpha\beta} R_{(ij)}^{\alpha\beta} = b R_{ij},$$

поэтому

$$a_{(i}^{\alpha} R_{j)\alpha} = 0 \quad (2.19)$$

Свернем (2.19) с g^{ij} , воспользовавшись (2.2) и тем, что скалярная кривизна отлична от нуля, получаем:

$$b = 0 \quad (2.20)$$

Принимая во внимание соотношения (2.16), (2.17) и (2.20), видим, что функция $\psi(y)$ в (1.6) имеет вид

$$\psi(y) = b_l y^l + b_{l_1 l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} \quad (2.21)$$

Известно ([1],[2]), решение обобщенных уравнений Киллинга (1.3) при $\psi = const$ определяет вектор смещения бесконечно малых гомотетических преобразований в римановом пространстве. Формула (2.21) свидетельствует о справедливости теоремы.

Теорема 2 Вектор смещения бесконечно малых гомотетических преобразований второй степени в пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 для V_n ненулевой скалярной кривизны в окрестности точки M_0 по необходимости является вектором Киллинга.

Уравнения (2.9) в соответствии с (2.16) и (2.20) принимают вид

$$a_{(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a_{(l_1}^{\alpha} R_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \quad (2.22)$$

Далее из уравнений (2.4) имеем

$$\left[\frac{1}{9} \left(2a_{j l_1}^{\alpha} R_{\alpha l_2 l_3 j} + a_{l_1 l_2}^{\alpha} R_{\alpha(j l_3) i} \right) - \frac{1}{4} \left(3b_{j l_1 l_2} g_{i l_3} + b_{l_1 l_2 l_3} g_{ij} - b_{i j l_1} g_{l_2 l_3} - b_{i l_1 l_2} g_{j l_3} \right) \right] | y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0$$

Просимметризовав последнее соотношение по индексам i и j , на основании (2.7) получаем

$$\left\{ a_{l_1 l_2}^\alpha R_{\alpha(ij)l_3} - \frac{1}{2} b_{l_1} R_{il_2 l_3 j} + \frac{3}{4} \left[3 \left(b_{l_1 l_2(i} g_{j)l_3} - b_{ijl_1} g_{l_2 l_3} \right) + b_{l_1 l_2 l_3} g_{ij} \right] \right\} | y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0 \quad (2.23)$$

Уравнения (2.23) свернем с y^l и результат подставим в (2.4):

$$\left(\frac{1}{3} b_{l_1 l_2 l_3} \delta_{l_4}^h + \frac{1}{2} b_{l_1 l_2}^h g_{l_3 l_4} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} = 0$$

Из последнего уравнения подобно тому, как получено (2.16), получаем:

$$b_{l_1 l_2 l_3} = 0 \quad (2.24)$$

На основании (2.24) уравнения (2.18) (а тогда и все уравнения системы (2.8)) выполняются тождественно.

Подставляя (2.24) в (2.23), получаем:

$$\left(a_{l_1 l_2}^\alpha R_{\alpha(ij)l_3} - \frac{1}{2} b_{l_1} R_{il_2 l_3 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0 \quad (2.25)$$

$$\left(a_{l_1 l_2}^\alpha R_{l_3 l_4 \alpha} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} = 0 \quad (2.26)$$

Легко видеть, что уравнения (2.26) (а тогда и уравнения (2.4)) выполняются тождественно вследствие (2.25).

Продифференцировав (2.26) по y^i , опустив h с помощью g_{hi} , результат просимметризуем по индексам i и j и учтем (2.25):

$$\left(a_{l_1(i}^\alpha R_{j)l_2 l_3 \alpha} - \frac{1}{4} b_{l_1} R_{il_2 l_3 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0 \quad (2.27)$$

Тогда очевидно, что уравнения (2.7) есть не что иное, как сумма уравнений (2.25) и (2.27) при условии (2.24).

Подстановка (2.3) в (2.25) и (2.24) в (2.21) дает соответственно

$$C_{l_1 l_2 l_3} \left[a_{\alpha(l_1 l_2) \beta}^\alpha R_{\alpha(ij)l_3}^\beta - \frac{3}{2} \left(b_{\alpha} R_{\alpha(ij)l_1}^\alpha g_{l_2 l_3} - b_{l_1} R_{i(l_2 l_3)j} \right) \right] = 0 \quad (2.28)$$

$$\psi(y) = b_l y^l \quad (2.29)$$

В результате проведенных рассуждений приходим к теореме

Теорема 3 В пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 для риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны в точке M_0 существуют бесконечно малое конформное преобразование второй степени вида

$$\tilde{\xi}^h = a^h + a_{.l}^h y^l + a_{.l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2},$$

отличное от движения тогда и только тогда, когда

$$a_{(ij)} = 0$$

$$a_{.i}^\alpha R_{j(l_1 l_2)\alpha} + a_{.l_1}^\alpha R_{l_2(ij)\alpha} = 0$$

$$a_{.2}^h = a_{.1}^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b_1 y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right)$$

$$C_{l_1 l_2 l_3} \left[a_{.i}^\alpha R_{\alpha(l_1 l_2)\beta} R_{.i(j)l_3}^\beta - \frac{3}{2} \left(b_\alpha R_{.i(j)l_1}^\alpha g_{l_2 l_3} - b_{l_1} R_{i(l_2 l_3)j} \right) \right] = 0$$

$$\psi(y) = b_l y^l \quad (b_l \neq 0)$$

3 Приближенные конформные преобразования

Подобно тому, как вводилось понятие приближенного вектора Киллинга ([3]) определяется приближенный обобщенный вектор Киллинга.

Определение Вектор $\xi^h(x)$ называется приближенным конформным вектором Киллинга второго порядка в окрестности точки M_0 риманова пространства V_n , если для него в этой точке выполняются обобщенные уравнения Киллинга и их ковариантные дифференцированное продолжение первого порядка.

Бесконечно малое преобразование риманова пространства V_n , которое порождается приближенным конформным вектором Киллинга второго порядка, называется приближенным бесконечно малым конформным преобразованием второго порядка.

То аналогично с Теоремой 8 ([3]) доказываются утверждения.

Теорема 4 Приближенный конформный вектор Киллинга $\xi^h(x)$ риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны R в точке M_0 определяется в пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 вектора второй степени $\tilde{\xi}^h(y)$, который является приближенным обобщенным вектором Киллинга второго порядка в окрестности точки M_0 .

Теорема 5 *Бесконечно малое конформное преобразование второй степени в пространстве второго приближения \tilde{V}_n^2 для риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны R в точке M_0 реализует приближенные бесконечно малое конформное преобразование второго порядка в окрестности точки M_0 исходного V_n , отнесенного к римановой системе координат с началом в этой точке.*

Список литературы

1. Эйзенхарт Л.П.: Риманова геометрия. М, ИЛ, 1948, 316 стр.
2. Эйзенхарт Л.П.: Непрерывные группы преобразований. М, ИЛ, 1947, 287 стр.
3. Покась С.М.: Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения. Известия Пензенского государственного университета имени В.Г. Белинского, физико-математические науки, №26, 2011, стр. 173-183
4. Петров А.З.: Новые методы в теории относительности. М, Наука, 1966, 495 стр.
5. Будак Б.М., Фомин С.В.: Краткие интегралы и ряды. М, Наука, 1967, 607 стр.

Сергей Михайлович Покась

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, кафедра геометрии и топологии, Одесса, Украина

E-mail: pokas@onu.edu.ua

Sergey M. Pokas

Infinitesimal conformal transformations in a Riemannian space of the second approximation

We discuss analytic conformal transformations, introduce and examine second degree conformal movements in a Riemannian space of the second approximation. Established a connection between conformal movements and approximate conformal movements in spaces V_n and \tilde{V}_n^2 .