DOI 10.15673/2072-9812.3/2014.40572
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(3) 38–47 $d\omega$

О продолжении А-деформаций поверхностей положительной кривизны с краем

Татьяна Юрьевна Подоусова, Нина Владимировна Вашпанова

Аннотация Бесконечно малые (б.м.) ареальные деформации (А-деформации) высших порядков поверхностей включают в себя как частный случай А-деформации первого порядка и б.м. изгибания высших порядков. Исследование их является важным этапом в изучении непрерывных ареальных деформаций. Поэтому целесообразно рассмотреть задачу о возможности продолжения заданных б.м. ареальных деформаций первого порядка поверхностей в А-деформации конечного порядка.

Следует отметить, что эта задача для б.м. изгибаний рассматривалась в работах [1]-[3].

Ключевые слова А-деформации поверхностей, полное геодезическое кручение

УДК 514.76

§1. Об основных уравнениях А-деформаций высших порядков поверхностей

Пусть S - регулярная поверхность класса C^3 в E_3-пространстве, гомеоморфная области G плоскости (или всей плоскости), задана векторно-параметрическим уравнением

$$\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2),$$

где x^1, x^2 - криволинейные координаты текущей точки S.

Б.м. деформация n-ого порядка поверхности S с регулярными полями смещения $\overset{k}{\overline{y}}(x^1, x^2) \in C^3$ вида:

$$\overset{*}{\overline{r}}(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + \sum_{k=1}^{n} t^k \overset{k}{\overline{y}}(x^1, x^2), \tag{1}$$

при которой приращение элемента площади поверхности есть величина не менее чем $(n+1)$-го порядка относительно малого параметра t (чем мы будем пренебрегать), называется *б.м. ареальной деформацией*, или, кратко, *А-деформацией конечного порядка* n.

Частные производные векторов смещения разложим по линейно независимым векторам $\overline{r_i} = \frac{\partial r}{\partial x^i}, (i = 1, 2)$ и $\overline{n}$ (единичный вектор нормали S) в виде:

$$\overset{k}{\overline{y}}_i = c_{i\alpha} \overset{k}{T}{}^{\alpha\beta} \, \overline{r}_\beta + c_{i\alpha} \overset{k}{T}{}^{\alpha} \, \overline{n}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где $c_{i\alpha}$- дискриминантный тензор S $(c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g},$ $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, g_{\alpha\beta}$-метрический тензор $S)$, $\overset{k}{T}{}^{\alpha\beta}, \overset{k}{T}{}^{\alpha}$ - некоторые тензорные поля на S.

В случае А-деформаций n-ого порядка они являются решением следующей системы уравнений [4]:

$$\overset{k}{T}{}^{\alpha i}_{,\alpha} - b^i_\alpha \overset{k}{T}{}^{\alpha} = 0, \quad b_{\alpha\beta} \overset{k}{T}{}^{\alpha\beta} + \overset{k}{T}{}^{\alpha}_{,\alpha} = 0, \quad c_{\alpha\beta} \overset{k}{T}{}^{\alpha\beta} = -\overset{k}{L}. \tag{3}$$

Запятой здесь обозначено ковариантное дифференцирование на базе $g_{ij}, b^{i\alpha} = g^{i\beta} b_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ - коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, а функции $\overset{k}{L}$ имеют следующий вид:

$$\overset{k}{L} = \frac{1}{2} \overset{k}{A}{}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} + \sum_{m=1}^{k-1} \Big(\frac{1}{2}(c_{i\gamma}c_{j\sigma} - g_{i\sigma}g_{j\gamma}) \overset{m}{T}{}^{\gamma\sigma} \overset{k-m}{T}{}^{ij} + \frac{1}{2}(c_{i\gamma}g_{j\sigma} + g_{i\sigma}c_{j\gamma}) \overset{m}{T}{}^{\gamma\sigma} \overset{k-m}{A}{}^{ij} +$$

$$+ \frac{1}{4} c_{i\gamma}c_{j\sigma} \overset{m}{A}{}^{\gamma\sigma} \overset{k-m}{A}{}^{ij} \Big), \tag{4}$$

где

$$\overset{k}{A}{}^{ij} = \sum_{m=1}^{k-1} \left(\overset{m}{T}{}^{is} \overset{k-m}{T}{}^{jt} g_{st} + \overset{m}{T}{}^{i} \overset{k-m}{T}{}^{j} \right). \tag{5}$$

Система уравнений (3) называется основной системой уравнений А-деформаций конечного порядка n. Она записана относительно произвольно выбраной на S координатной системы и содержит $4n$ уравнений относительно $6n$ неизвестных функций $\overset{k}{T}{}^{\alpha\beta}, \overset{k}{T}{}^{\alpha}, (k = \overline{1, n}, \alpha, \beta = 1, 2)$.

§2. Запись основных уравнений А-деформаций высших порядков поверхностей положительной гауссовой кривизны в комплексном виде

Пусть S - односвязная неминимальная ($2H \neq 0$, H - средняя кривизна S) поверхность принадлежит класу $C_\lambda^{\ell+4}(\overline{G}), (0<\lambda<1, \ell \geq 0)$, т.е. существует такая параметризация в $\overline{G}$ поверхности S, что функции, которые задают S в этой параметризации будут класса $C_\lambda^{\ell+4}(\overline{G})$ [5].

Предположим, что полная кривизна K этой поверхности удовлетворяет следующему условию:

$$K \geq K_0 > 0 \qquad (\text{в } \overline{G}), \quad K_0 = const. \tag{6}$$

В силу (6) на S "в целом"существует сопряженно изотермическая сеть, относительно которой вторая квадратичная форма равна

$$II = b_{11}\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2\right),$$

причем $b_{11} = b_{22} = \sqrt{gK} \in C_\lambda^{\ell+2}(\overline{G})$.

Тогда основную систему уравнений (3) А-деформаций n-ого порядка можно записать в комплексном виде [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overset{1}{W}}{\partial \overline{z}} - A \overset{1}{W} - \overline{B}\, \overline{\overset{1}{W}} = \overset{1}{F}\left(\overset{1}{T^{\alpha}}\right), \\ \frac{\partial \overset{2}{W}}{\partial \overline{z}} - A \overset{2}{W} - \overline{B}\, \overline{\overset{2}{W}} = \overset{2}{F}\left(\overset{1}{W}, \overset{1}{T^{\alpha}}, \overset{2}{T^{\alpha}}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \overset{n}{W}}{\partial \overline{z}} - A \overset{n}{W} - \overline{B}\, \overline{\overset{n}{W}} = \overset{n}{F}\left(\overset{1}{W}, \dots, \overset{n-1}{W}, \overset{1}{T^{\alpha}}, \dots, \overset{n}{T^{\alpha}}\right) \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\overset{k}{W}(z) = \sqrt{g}\left(\left(\overset{k}{T^{11}} + \frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} g^{11} + \overset{k}{D^{11}}\right) - \imath\left(\overset{k}{T^{12}} + \frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} g^{12} + \overset{k}{D^{12}}\right)\right) \tag{8}$$

-функции комплексной переменной $z = x^1 + \imath x^2, \imath^2 = -1$, причем

$$\overset{k}{T^{11}} = -\overset{k}{T^{22}} - \frac{\overset{k}{T^{\alpha}_{,\alpha}}}{2H}\left(g^{11} + g^{22}\right) - \left(\overset{k}{D^{11}} + \overset{k}{D^{22}}\right), \tag{9}$$

$$\overset{k}{T^{21}} = \overset{k}{T^{12}} + \overset{k}{D^{12}} - \overset{k}{D^{21}} - \frac{1}{\sqrt{g}}\overset{k}{L}. \tag{10}$$

Функции $\overset{k}{F}$ и $\overset{k}{D}{}^{ij}$ соответственно имеют вид:

$$\overset{k}{F}=\frac{g_{22}+\imath g_{12}}{2\sqrt{g}}\left(\left(\frac{\overset{k}{T}{}^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}\right)_{1}+b_{11}\overset{k}{T}{}^{1}\right)-\frac{g_{12}+\imath g_{11}}{2\sqrt{g}}\left(\left(\frac{\overset{k}{T}{}^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}\right)_{2}+b_{11}\overset{k}{T}{}^{2}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{g}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\overset{k}{L}\right)+\overset{k}{D}{}^{\alpha 1}_{,\alpha}-\imath\overset{k}{D}{}^{\alpha 2}_{,\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(2\Gamma^{1}_{12}+\Gamma^{2}_{22}-\imath\Gamma^{2}_{12}\right)\overset{k}{L}, \qquad (11)$$

$$\overset{k}{D}{}^{ij}=\frac{1}{4H}\left(Kd^{i\gamma}c^{jl}g_{\alpha\gamma}g_{l\beta}\overset{k}{B}{}^{\alpha\beta}-c^{\alpha j}b_{\alpha\beta}\overset{k}{B}{}^{i\beta}\right)-\frac{1}{8H^{2}}c^{ij}\sum_{m=1}^{k-1}\overset{m}{T}{}^{\rho}_{,\rho}\overset{k-m}{T}{}^{\xi}_{,\xi}\ . \qquad (12)$$

Здесь

$$\overset{k}{B}{}^{\alpha\beta}=\sum_{m=1}^{k-1}\left(\overset{m}{T}{}^{\alpha}\overset{k-m}{T}{}^{\beta}+\overset{m}{D}{}^{\alpha s}\overset{k-m}{D}{}^{\beta t}g_{st}+\frac{1}{2}\overset{m}{T}{}^{\sigma}_{,\sigma}\left(\overset{k-m}{D}{}^{\alpha\beta}+\overset{k-m}{D}{}^{\beta\alpha}\right)\right), \qquad (13)$$

Γ^{k}_{ij}-символы Христоффеля второго рода, d^{ij}-элементы матрицы, обратной для матрицы $\|b_{ij}\|$:

$$d^{ij}=\frac{1}{K}c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta}.$$

Следует отметить, что функции A и B, которые входят в каждое уравнение системы (7) такие же, как и в уравнении, полученном Векуа И.Н. при исследовании б.м. изгибаний первого порядка поверхности положительной кривизны [5].

Система уравнений (7) является нелинейной неоднородной относительно функций $\overset{1}{W},\overset{2}{W},...,\overset{n}{W}$. Однако, при $k=1$ первое уравнение системы будет линейным относительно функции $\overset{1}{W}$ (см., например, [7]),при $k=2$ второе уравнение будет линейным относительно $\overset{2}{W}$, но не является линейным относительно $\overset{1}{W}$ ([8]) и т.д. При $k=n$ n-ое уравнение системы (7) не является линейным относительно $\overset{1}{W},\overset{2}{W},...,\overset{n-1}{W}$.

Кроме известных функций точки S и искомых комплексных функций $\overset{1}{W},\overset{2}{W},...,\overset{n}{W}$ в правые части $\overset{1}{F},\overset{2}{F},...,\overset{n}{F}$ уравнений (7) входят и функции $\overset{1}{T}{}^{\alpha},...,\overset{n}{T}{}^{\alpha}$. Для обеспечения определенности системы уравнений (7) тензорные поля $\overset{1}{T}{}^{\alpha},...,\overset{n}{T}{}^{\alpha}$ считаем заданными в $\overline{G}$.Эти функции можно задать значениями вариаций единичной нормали [6]. В частности, доказано, что каждая А-тривиальная деформация n-ого порядка поверхности положительной гауссовой кривизны содержится в нулевом решении системы уравнений (7) при $\overset{k}{F}=0$. Верно и обратное. Нулевым решением $\overset{k}{W}=0$ системы уравнений

(7) при $\overset{k}{F}=0$ определяются только А-тривиальные деформации конечного порядка n.

Б.м. ареальная деформация n-ого порядка называется *А-тривиальной* деформацией, если векторы смещения $\overset{k}{y}(x^1,x^2)$ из (2) окажутся векторами смещения для б.м. изгибания n-ого порядка.

Отсюда вытекает, что каждое решение системы уравнений (7), полученное при $\overset{k}{F}\neq 0, (k=\overline{1,n})$ а также любое ненулевое решение (7) при $\overset{k}{F}=0$ определяют б.м. ареальную деформацию n-ого порядка поверхности положительной гауссовой кривизны, которая не является А-тривиальной.

§3. Вариации полного геодезического кручения при А-деформациях высших порядков поверхностей

Для произвольной регулярной поверхности полное геодезическое кручение определяется следующим образом [9]:

$$\tilde{K}=\frac{\rho}{g},$$

где $\rho=\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2, \rho_{\alpha\beta}$ - элементы четвертой квадратичной формы S:

$$\rho_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(c_{\alpha i}b^i_\beta+c_{\beta i}b^i_\alpha\right).$$

В работе [10] доказано, что $\tilde{K}=-E$. Здесь $E=H^2-K$ - эйлерова разность. Используя ранее найденные k-тые вариации коэффициентов первой и второй квадратичных форм соответственно [6]:

$$2\overset{k}{\varepsilon}_{ij}=\delta^k g_{ij}=\overset{k}{T}{}^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta}+c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)+c_{i\alpha}c_{j\beta}\overset{k}{A}{}^{\alpha\beta}, \tag{14}$$

$$\overset{k}{\beta}_{ij}=\delta^k b_{ij}=c_{i\alpha}b_{\beta j}\overset{k}{T}{}^{\alpha\beta}+c_{i\alpha}\overset{k}{T}{}^{\alpha}_{,j}-b_{ij}\overset{k}{L}+\overset{k}{B}{}^{ij}, \tag{15}$$

а также соотношение

$$Kd^{\alpha\beta}+b^{\alpha\beta}=2Hg^{\alpha\beta}$$

после некоторых преобразований, получим:

$$\delta^k\tilde{K}=Hc_{i\alpha}b^i_\beta\overset{k}{T}{}^{\alpha\beta}-\left(Hg_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta}\right)c^{j\beta}\overset{k}{T}{}^{\alpha}_{,j}+3(2H^2-K)\overset{k}{L}-$$
$$-Hb_{\alpha\beta}\overset{k}{A}{}^{\alpha\beta}+\left(Kd^{ij}-Hg^{ij}\right)\overset{k}{B}{}^{ij}+c^{i\alpha}c^{j\beta}\sum_{m=1}^{k-1}\overset{k}{\beta}{}^{ij}\left(\overset{k-m}{\beta}_{\alpha\beta}-2H\overset{k-m}{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right). \tag{16}$$

Следует отметить, что при $k=1$ из (16) получим вариацию $\delta\tilde{K}$, найденную при А-деформациях первого порядка [10].

§4. О продолжении А-деформаций первого порядка поверхностей

Б.м. ареальная деформация первого порядка поверхности S называется *продолжаемой* в А-деформации n-ого порядка, если вектор смещения $\overset{1}{\overline{y}}\,(x^1, x^2)$ А-деформации первого порядка таков, что в случае б.м. ареальных деформаций конечного порядка n он также является вектором смещения. Имеет место

Теорема 1.[11] *Односвязная поверхность S класса $C_\lambda^{\ell+4}, (0 < \lambda < 1, \ell \geq 0)$ положительной гауссовой кривизны и без точек округления с границей $\partial S \in C_\lambda^{\ell+4}$ допускает нетривиальную А-деформацию первого порядка в классе $C_\lambda^{\ell+3}(\overline{G})$ поверхностей, при которой сохраняется полное геодезическое кручение вдоль края ∂S. Компоненты вектора смещения при этом зависят от двух наперед заданных функций класса $C_\lambda^{\ell+3}(\overline{G})$ и от одной произвольной постоянной.*

Под сохраняемостью полного геодезического кручения поверхности S при б.м. ареальной деформации n-ого порядка мы понимаем (как это и принято в теории б.м. деформаций) то, что все k -тые вариации полного геодезического кручения $\delta^k \tilde{K}$ до n-ого порядка включительно равны нулю.

Рассмотрим следующую задачу: допускают ли А-деформации первого порядка поверхности положительной гауссовой кривизны при условии, что полное геодезическое кручение сохраняется вдоль края ∂S, продолжение в А-деформации n-ого порядка.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Каждая б.м. ареальная деформация первого порядка поверхности S класса $C_\lambda^{\ell+4}, (0 < \lambda < 1, \ell \geq 0)$ положительной гауссовой кривизны и без точек округления с краем $\partial S \in C_\lambda^{\ell+4}$, при которой сохраняется полное геодезическое кручение вдоль ∂S допускает продолжение в А-деформации n-ого порядка также сохраняющие полное геодезическое кручение вдоль края ∂S. Тензоры деформации при этом зависят от $2n$ наперед заданных функций класса $C_\lambda^{\ell+4}$ и от n произвольных (существенных) постоянных.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно построить функции $\overset{*}{\overline{r}}\,(x^1, x^2, t) \in C_\lambda^{\ell+4}(\overline{G})$ и удовлетворяющие следующим условиям:

а) $\overset{*}{\overline{r}}\,(x^1, x^2, 0) = \overline{r}(x^1, x^2)$;

б) $\overset{*}{\overline{r}}_t\,(x^1, x^2, 0) = \overset{1}{\overline{y}}\,(x^1, x^2)$;

в) элемент площади S сохраняется до n-ого порядка включительно всюду в $\overline{G}$;

г) вдоль края ∂S сохраняется полное геодезическое кручение, т.е $\delta^k \tilde{K} = 0, k = \overline{1, n}$.

Для этого в свою очередь достаточно построить последовательность функций $\overset{k}{\rho}\ (x^1, x^2)$, принадлежащих классу $C_\lambda^{\ell+3}(\overline{G})$ и подчиненных следующим условиям:

1) $\overset{0}{\rho}\ (x^1, x^2) = \overline{r}(x^1, x^2)$;

2) $\overset{1}{\rho}\ (x^1, x^2) = \overset{1}{\overline{y}}\ (x^1, x^2)$;

3) при любом $k, 2 \le k \le n$ выполнена краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overset{k}{W}}{\partial \overline{z}} - A\ \overset{k}{W} - \overline{B}\ \overset{k}{\overline{W}} = \overset{k}{F}\left(\overset{1}{W}, \overset{2}{W}, ..., \overset{k-1}{W}, \overset{1}{T}{}^\alpha, \overset{2}{T}{}^\alpha, ..., \overset{n}{T}{}^\alpha\right), (G) \\ \delta^k \tilde{K} = 0, (\partial G) \end{cases} \tag{17}$$

Функции $\overset{k}{T}{}^\alpha$ считаем заданными в $\overline{G}$ так, что

$$\overset{k}{T}{}^\alpha \in C_\lambda^{\ell+4}(\overline{G}), (0 < \lambda < 1, \ell \ge 0), \tag{18}$$

$$\overset{k}{T}{}^\alpha = 0, \qquad (\partial G), k = \overline{1, n}. \tag{19}$$

На основании выражения k-той вариации полного геодезического кручения (16), равенства (19), краевое условие $(17)_2$ приобретает вид:

$$c_{i\alpha} b^i_\beta\ \overset{k}{T}{}^{\alpha\beta} = \overset{k}{M}, \qquad (\partial G), \tag{20}$$

где функции $\overset{k}{M}$ представлены в реккурентной форме и зависят от известных и заданных функкий поверхности S:

$$\overset{k}{M} = b_{\alpha\beta}\ \overset{k}{A}{}^{\alpha\beta} - \frac{3(2H^2 - K)}{H}\ \overset{k}{L} - \frac{Kd^{ij} - Hg^{ij}}{H}\ \overset{k}{B}{}^{ij} -$$

$$-\frac{1}{H} c^{i\alpha} c^{j\beta} \sum_{m=1}^{k-1} \overset{k}{\beta}{}^{ij} \left(\overset{k-m}{\beta}_{\alpha\beta} - 2H\ \overset{k-m}{\varepsilon}_{\alpha\beta}\right). \tag{21}$$

Учитывая равенства (9), (10), краевое условие (20) можна представить в следующем виде:

$$\alpha\ \overset{k}{u} + \beta\ \overset{k}{v} = \overset{k}{\gamma}, \qquad (\partial G). \tag{22}$$

Здесь

$$\alpha = -2g^{12}, \qquad \beta = g^{22} - g^{11}, \qquad (\partial G)$$

$$\overset{k}{u} = \sqrt{g}\ \overset{k}{T}{}^{11}, \qquad \overset{k}{v} = -\sqrt{g}\ \overset{k}{T}{}^{12}, \qquad \overset{k}{\gamma} = \frac{1}{b_{11}} \left(\overset{k}{M} - \frac{g^{11}}{\sqrt{g}}\ \overset{k}{L}\right). \qquad (\partial G) \tag{23}$$

Воспользовавшись равенствами (8), соотношения (22) запишем в комплексной форме:

$$Re(\overline{\lambda}\overset{k}{W}) = \overset{k}{\gamma}, \qquad (\partial G) \tag{24}$$

где

$$\lambda = -2g^{12} + \iota\left(g^{22} - g^{11}\right), \qquad (\partial G) \tag{25}$$

Тогда краевая задача (17) приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overset{k}{W}}{\partial \bar{z}} - A\overset{k}{W} - \overline{B}\,\overline{\overset{k}{W}} = \overset{k}{F}\left(\overset{1}{W}, ..., \overset{k-1}{W}, \overset{1}{T^{\alpha}}, ..., \overset{n}{T^{\alpha}}\right), (G) \\ Re(\overline{\lambda}\overset{k}{W}) = \overset{k}{\gamma}, \qquad (\partial G), \end{cases} \tag{26}$$

Докажем теперь существование последовательности функций $\overset{k}{\overline{\rho}}\ (x^1, x^2)$, принадлежащих классу $C_{\lambda}^{\ell+3}(\overline{G})$ и удовлетворяющих условиям 1),2),3).

Положим $\overset{0}{\overline{\rho}}\ (x^1, x^2) = \overline{r}(x^1, x^2)$. Этим будет обеспечено выполнение свойства 1. Так как имеет место теорема 1, то вектор смещений $\overset{1}{\overline{y}}\ (x^1, x^2)$ А-деформации первого порядка поверхности S положительной гауссовой кривизны, удовлетворяющий краевой задаче (26) при $k = 1$ существует и принадлежит классу $C_{\lambda}^{\ell+3}(\overline{G})$, а функция $\overset{1}{W} \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G})$[11].

Полагая $\overset{1}{\overline{\rho}}\ (x^1, x^2) = \overset{1}{\overline{y}}\ (x^1, x^2)$, обеспечим выполнение свойства 2).

Предположим далее, что найдены все функции $\overset{k}{W}$ класса $C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G})$ для всех k от 1 до $n-1$, где $n \geq 2$, удовлетворяющие краевой задаче (26):

$$\overset{k}{W} \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G}), k = \overline{1, n-1}. \tag{27}$$

Для нахождения функции $\overset{n}{W}$ достаточно решить краевую задачу (26) при $k = n$. Для этого нужно сначала вычислить индекс функции λ относительно границы ∂G области G. Функцию λ можно представить в виде:

$$\lambda = \frac{2g\sqrt{gE}}{\sqrt{K}} i \exp^{i\psi}, \tag{28}$$

где функция ψ связана с углом между координатными линиями определенной зависимостью ([5],стр.123).Отсюда следует, что

$$ind\lambda = 0. \tag{29}$$

Учитывая дифференциальные свойства известных функций S, находим:

$$A, B, \overset{n}{F} \in C_{\lambda}^{\ell+1}(\overline{G}), \tag{30}$$

$$\overset{n}{\mu}, \lambda \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G}). \tag{31}$$

В силу (29) заключаем, что однородная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial \overset{n}{W}}{\partial \overline{z}} - A \overset{n}{W} - \overline{B} \, \overline{\overset{n}{W}} = 0, (G) \\ Re(\overline{\lambda} \overset{n}{W}) = 0, \qquad (\partial G), \end{cases}$$

имеет ровно одно линейно независимое решение ([5], т: 4.11, с.257), а неоднородная задача (26) при $k = n$ всегда разрешима ([5], т: 4.12, с.257).

В силу теоремы 4.16 ([5], с.312), (30),(31) заключаем, что $\overset{n}{W} \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G})$, т.е. все функции

$$\overset{k}{W} \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G}), k = \overline{1, n}. \tag{32}$$

Учитывая равенства (8),(9), (10), дифференциальные свойства известных и заданных функций поверхности S, а также (32), из соотношений (2) получим, что $\overset{k}{\overline{y}}_i \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\overline{G})$.

Отсюда следует, что

$$\overset{k}{\overline{y}} = \overset{k}{\overline{\rho}} (x^1, x^2) \in C_{\lambda}^{\ell+3}(\overline{G}), k = \overline{1, n}$$

Таким образом, поверхности, задаваемые вектор-функцией вида (1) принадлежат классу $C_{\lambda}^{\ell+3}(\overline{G})$. Теорема доказана.

Следствие. *При б.м. ареальной деформации n-ого порядка поверхности $S \in C_{\lambda}^{\ell+4}$ положительной гауссовой кривизны без точек округления со стационарным полным геодезическим кручением на ∂S главные направления геодезического кручения вдоль границы ∂S поверхности сохраняются.*

Доказательство. Полное и среднее геодезические кручения соответственно можно представить в следующем виде [10]:

$$\widetilde{K} = \tau_1 \cdot \tau_2, \qquad 2\widetilde{H} = \tau_1 + \tau_2,$$

где τ_1 и τ_2 - главные направления геодезического кручения.

Так как $\widetilde{H} = 0$, то $\tau_1 = -\tau_2$. Это значит, что $\delta^k \tau_1 = -\delta^k \tau_2 = p$. Тогда

$$\delta^k \widetilde{K} = -2\tau_1 p,$$

$$\widetilde{E} = \widetilde{H^2} - \widetilde{K} = -\widetilde{K} = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{4}\right)^2 = \frac{(2\tau_1)^2}{4} = \tau_1^2 \geq 0.$$

Отсюда

$$p = \frac{\delta^k \widetilde{K}}{2\sqrt{E}}.$$

При $\delta^k \widetilde{K} = 0$ получим, что главные направления геодезического кручения сохраняются. Следствие доказано.

Список литературы

1.*Исанов Т.Г.*, О продолжении бесконечно малых изгибаний //ДАН СССР, 1977,т.234,№6,с.1257-1260.
2.*Белоусова В.П., Караев В.* К вопросу о продолжении бесконечно малых изгибаний в аналитические //Известия АН Туркменской ССР, 1970, №6,с. 13-20.
3.*Климентов С.Б.* О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны //Матем. заметки, 1984, том 36, выпуск 3, 393–403.
4. *Дерманец Н.В.* Об основных уравнениях А-деформаций n-ого порядка поверхностей //Тезисы докладов научно-практич. конференции молодых ученых.-Одесса, 1983, ч.2,с.4-6.
5.*Векуа И.Н.*, Обобщенные аналитические функции, Москва, Физматгиз, 1988,с.509.
6. *Дерманец Н.В.* Определение А-деформаций высших порядков овалоида по заданным значениям вариаций нормали //Деп.в УкрНИИНТИ № 56 Ук-84, Деп.от 13.01.84, 40 с.
7. *Безкоровайная Л.Л.* О бесконечно малых ареальных деформациях овальных поверхностей //Известия Вузов, математика, 1983, №5, с.69-71.
8. *Безкоровайная Л.Л., Солохина Л.И.* Приведение одной геометрической задачи к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений в комплексной форме //В сб. "Второй республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям Тезисы докладов, Одесса, 1978, с.36-38
9. *Вашпанова Т.Ю.,Безкоровайна Л.Л.* LGT-сітка поверхні та її властивості //Вісник Київського національного університету імені Т.Шевченка, серія фізико-математичні науки, вип.№2, 2010. - с.7-11
10. *Подоусова Т.Ю.,Безкоровайна Л.Л.* Повний геодезичний скрут та деформації мінімальної поверхні //Збірник праць міжнародного геометричного центру. - 2013. - Т.3, №.3. - с.15-22.
11.*Подоусова Т.Ю., Безкоровайна Л.Л., Вашпанова Н.В.* Про існування А-деформацій першого порядку поверхонь додатньої гаусової кривини з краєм //Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2014".-Одеса(2014)-с.7-8.

Татьяна Юрьевна Подоусова,

ОГАСА, Одесса, Украина

E-mail: tatyana_top@mail.ru

Нина Владимировна Вашпанова

ОНАПТ,Одесса,Украина

Tatyana Podousova

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine.

Nina Vashpanova

Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine.

A continuation A-deformations of surfaces of positive curvature with boundary

In the given work probed the problem of the possibility of continuation the given A-deformations of first order of surfaces with positive curvature in A-deformations of finite order.