DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.41431
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(4) 7–11

Топологические инварианты слоения на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа

Игорь Юрьевич Власенко

Аннотация В голоморфной динамике слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа как аналитический инвариант известно давно. Однако тот факт, что в области притяжения суперпритягивающего цикла это слоение является не только аналитическим, но и топологическим инвариантом, был ранее неизвестен.

Ключевые слова голоморфные отображения, внутренние отображения, классы топологической сопряженности, блуждающее множество, множество Фату

УДК 517

Вступление.

Голоморфные отображения являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Не будем здесь давать обзор базовых понятий и основных результатов этой теории, ограничившись отсылкой к популярным учебникам по голоморфной динамике (см. например, [1]).

Специфика этой теории в том, что она построена на аналитических инвариантах голоморфных отображений, таких, как множества Фату и Жюлиа, а не топологических инвариантах (хотя то же разбиение на множества Фату и Жюлиа является и топологическим инвариантом голоморфных отображений). Однако в целом теория топологических инвариантов голоморфных отображений не развита.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.4/2014.41431

Поэтому применение к голоморфным отображениям топологической теории динамики внутренних отображений, построенной в [2], позволяет получить новые результаты, относящиеся к, казалось бы, давно и хорошо изученным отображениям. В основном, это вопросы, связанные с топологическими инвариантами голоморфных отображений, т. е. какие свойства этих отображений сохранятся при непрерывных заменах координат на многообразии, и вопросы о принадлежности внутренних отображений к классу голоморфноподобных отображений, т.е. возможно ли, что для данного внутреннего отображения найдется замена координат (гомеоморфизм) такой, что полученное сопряженное отображение (определение см. [3]) будет голоморфным.

Приведем здесь один такой новый результат, относяшийся к топологической инвариантности слоения на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа (еще используется название канонический потенциал, а в англоязычной литературе часто используется термин Douady-Hubbard potential), полученный применением теории из [2] к известным результатам голоморфной динамики.

Предварительные сведения.

В [2] было установлено, что для внутренних отображений существует много топологически различных типов множеств, соответствующих множествам блуждающих точек гомеоморфизмов в классическом определении.

Широкой траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{m,n\geq 0} f^{-m}\left(f^n\left((x)\right)\right)$. Нейтральным сечением точки x назовем множество $\{f^{-n}\left(f^n(x)\right) \mid n \geq 0\}$. Обозначим его через $O_f^{\perp}(x)$. Так как f — конечнократный эпиморфизм, то естественно эти множества воспринимать как наборы из отдельных точек.

Определение 1 *Точка x называется блуждающей точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U)\cap U=\emptyset$ для всех $m\in\mathbb{Z}$. Иначе точка называется неблуждающей.*

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих точек даны в [2]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 2 *Точка x называется нейтрально блуждающей точкой f, если найдется такая ее связная окрестность U, что $\forall n\geq 0$ открытое* *множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности таким образом, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одно точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$. Иначе точка называется нейтрально неблуждающей.*

Определение 3 *Точка x называется суперблуждающей точкой f, если она блуждающая и нейтрально блуждающая.*

Топологические инварианты в множестве Фату.

Используя определения и результаты из [2], и известные результаты из голоморфной динамики, в множестве Фату можно выделить дополнительные топологические инварианты.

Пусть аналитическая функция f имеет притягивающую критическую (в терминологии голоморфной динамики — суперпритягивающую) точку. Всегда можно подобрать такой локальный униформизующий параметр z, что $z = 0$ будет суперпритягивающей неподвижной точкой функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, \qquad (1)$$

где $n \geq 2$.

Теорема 1 (теорема Бёхтера) *Пусть функция f имеет вид (1). Тогда существует такая локальная голоморфная замена координат $w = \phi(z)$, что $\phi(0) = 0$, и относительно этой замены f сопряжена отображению $w \mapsto w^n$ всюду в некоторой окрестности нуля. Более того, ϕ единственна с точностью до умножения на некоторый корень степени $(n-1)$ из единицы.*

Отображения $w \mapsto w^n$, как показано в [2], обладает весьма специальной структурой блуждающего множества. Для этих отображений $\hat{\mathbb{C}}$ распадается на бассейн притяжения точки 0 (в полярных координатах множество точек с $\rho < 1$), бассейн притяжения точки ∞ (в полярных координатах множество точек с $\rho > 1$) и отталкивающую неблуждающую окружность с $\rho = 1$, Каждый из бассейнов притяжения состоит из особой неподвижной притягивающей точки и нейтрально неблуждающих[1] блуждающих[2] точек в смысле определений из [2] таких, что слоение на окружности $\{\varphi = const\}$ в

[1] Определение 2.
[2] Определение 3.

комплексных координатах является топологическим инвариантом: для любой блуждающей точки бассейна притяжения ее нейтральное сечение всюду плотно на содержащей эту точку окружности.

Как следствие из этого факта и из теоремы Бёхтера, получим следующее утверждение.

Теорема 2 *Пусть функция f имеет вид (1). Тогда в некоторой окрестности нуля f обладает топологически инвариантным слоением на гомеоморфные окружностям замыкания нейтральных сечений точек этой окрестности.*

Это слоение можно продолжить на всю область притяжения суперпритягивающей точки, хотя, возможно, слои уже не будут гомеоморфны окружностям, так как, если в области притяжения есть блуждающие точки ветвления, то в таких точках прообраз окружности превращается в букет окружностей. Заметим, что как аналитический инвариант области притяжения суперпритягивающей точки это слоение в голоморфной динамике давно известно: это слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа.

Однако тот факт, что это слоение является не только аналитическим, но и топологическим инвариантом, был ранее неизвестен.

При этом топологическим инвариантом слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа является только на бассейнах притяжения суперпритягивающих точек.

Рассмотрим бассейн притяжения геометрически притягивающего цикла. Так как множество особых точек отображения изолировано, у геометрически притягивающего цикла можно найти окрестность в его бассейне притяжения, не содержащую особых точек и такую, что сужение отображения на эту окрестность будет гомеоморфизмом на свой образ. Тогда притягивающиеся к циклу точки этой окрестности по определению являются супербдуждающими, и, как следствие, в бассейне притяжения геометрически притягивающей точки притягивающиеся к ней точки являются супербдуждающими. Поэтому на бассейнах притяжения геометрически притягивающих точек слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа не является топологически выделенным слоением и не сохраняется при сопряжении гомеоморфизмом.

Как следствие, получим следующее утверждение.

Теорема 3 *Слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа является топологическим инвариантом голоморфного* *отображения, при чем только на бассейнах притяжения суперпритягивающих точек.*

Список литературы

1. Milnor, J: Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. viii+257 pp.
2. Власенко И. Ю.: Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 101. Институт математики НАН Украины. Киев, 2014, 225 стр.
3. Кузаконь, В. М., Кириченко, В. Ф., Пришляк, О. О.: Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 97, Институт математики НАН Украины, Киев, 2013, 500 стр.
4. Стоилов, С.: О топологических принципах теории аналитических функций. М., Мир. 1964, 228 стр.
5. Трохимчук, Ю. Ю.: Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Институт математики НАН Украины. Киев, 2008, 538 стр.

Игорь Юрьевич Власенко
Институт математики НАНУ, Киев, Украина
E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Igor Yu. Vlasenko

Topological invariants of equipotential foliation of the Green's function of the Julia set

It is shown that the well-known equipotential foliation of the Green's function of the Julia set (also known as equipotential foliation of Douady-Hubbard potential of the Julia set) is in fact the topological invariant of holomorphic maps, but only in superattracting basins.