DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.49278
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(1) 24–33

Критерий топологической сопряженности двумерных однородных внутренних отображений

Игорь Юрьевич Власенко

Аннотация В настоящее время в задаче описания топологического строения и топологической классификации получено много результатов, относящихся к различным классам обратимых отображений — гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В то же время необратимые автоморфизмы, по сравнению с обратимыми, сравнительно не изучены. Отображения, отличные от голоморфных, и некоторых других специальных классов необратимых отображений, таких, как одномерные отображения отрезка, как правило, представляют собой "terra incognita" для задач топологической классификации. Голоморфные отображения одной комплексной переменной являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Однако и для них классификация даже полиномов второго порядка $z^2 + c$ является непростой задачей.

В данной работе описаны некоторые топологические свойства и дан критерий топологической сопряженности для некоторого класса разветвленных накрытий двумерной сферы, который является естественным обобщением класса внутренних отображений, у которых координатные функции являются однородными многочленами произвольной степени двух действительных переменных.

Ключевые слова внутренние отображения, классы топологической сопряженности, однородные отображения, цилиндр

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.49278

УДК 517.938.5

Отображения из одного пространства в другое топологически классифицируются как классы топологической эквивалентности, т. е. замены координат гомеоморфизмами в образе и прообразе. В случае, когда отображение отображает пространство в себя, существуют и другие, более детальные способы классификации, дополнительно подразделяющие классы топологической эквивалентности, это классификация с точностью до левого или правого действия гомеоморфизмом и классификация с точностью до топологической сопряженности (т. е. описания свойств, инвариантных относительно сопряженности гомеоморфизмом[1]).

Для классификации с точностью до топологической сопряженности получено много результатов, относящихся к различным классам обратимых отображений — гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В то же время необратимые автоморфизмы, по сравнению с обратимыми, сравнительно не изучены. Отображения, отличные от голоморфных, и некоторых других специальных классов необратимых отображений, таких, как одномерные отображения отрезка, как правило, представляют собой “terra incognita” для задач топологической классификации.

Голоморфные отображения одной комплексной переменной являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Однако и для них классификация даже полиномов второго порядка $z^2 + c$ является непростой задачей (см. [2]).

В этой работе для некоторого класса разветвленных накрытий двумерной сферы $\hat{\mathbb{C}}$ (и при этом неразветвленных накрытий вложенного цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\} \subset \hat{\mathbb{C}}$), который является естественным обобщением класса внутренних отображений, у которых координатные функции являются однородными многочленами произвольной степени двух действительных переменных, были изучены некоторые топологические инварианты сопряженности, описаны их свойства и дан критерий топологической сопряженности.

Предварительные сведения.

Внутренним отображением будем называть непрерывный открытый (образ любого открытого множества открыт) конечнократный (у каждой точки число прообразов конечно) эпиморфизм. Подробнее о внутренних отображениях см. [6].

[1] f и g топологически сопряжены, если $\exists$ гомеоморфизм h: $fh = hg$. Подробнее см. [4].

Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем однородным порядка k, если $\forall t \geq 0$ $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ $f(t^k \overline{x}) = t^k f(\overline{x})$.

Пусть $\hat{\mathbb{C}}$ — двумерная сфера, являющаяся замыканием двумерного цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ точками $\overline{0}$ и ∞, и $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — его внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\overline{0}$ и ∞.

Заметим, что не всякое однородное отображение является внутренним. Например, однородное порядка 2 отображение $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ складывает блинчиком окрестность точки $\overline{0}$ и внутренним не является.

Обозначим через $O_f^+(x)$ положительную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x) |\ n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x) |\ n < 0\}$. Широкой траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.

Так как f — конечнократный эпиморфизм, то естественно эти траектории воспринимать как наборы из отдельных точек.

В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое не нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Определение 1 *Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим ее через $O_f^{\perp}(x)$.*

Как легко видеть из определения, если среди образов x нет периодической точки, а f имеет в точках орбиты больше одного прообраза, то широкая траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, причем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 2 *Точка x называется блуждающей точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.*

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих даны в [3]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 3 *Точка x называется нейтрально блуждающей точкой f, если найдется такая ее связная окрестность U, что $\forall n \geq 0$ открытое множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности такие, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одну точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$.*

Определение 4 *Точка x называется суперблуждающей точкой f, если она блуждающая и нейтрально блуждающая.*

Обозначим через Ω множество неблуждающих (не являющихся блуждающими) точек. Обозначим через $\Omega^{\perp}$ множество нейтрально неблуждающих (не являющихся нейтрально блуждающими) точек. Заметим, что это замкнутые множества.

Определение 5 *Блуждающая точка x называется регулярной, если $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(x)$ — δ-окрестность точки x, и $\exists N > 0$ такое, что $\forall k > N$ и $\forall k < -N$ $f^k(\delta(x)) \subset \epsilon(\Omega)$, где $\epsilon(\Omega)$ — ϵ-окрестность множества Ω, $f^k(\delta(x))$ — образ $\delta(x)$ при отображении f^k.*

Множество регулярных точек открыто.

Критерий топологической сопряженности двумерных однородных внутренних отображений.

Напомним, что $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое (степени >1) отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\overline{0}$ и ∞.

Лемма 1 $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$, $\forall t > 0$, *нейтральные сечения $O^{\perp}(\overline{x})$ и $O^{\perp}(t\overline{x})$ подобны с центром подобия в $\overline{0}$.*

Доказательство Достаточно показать, что $\forall t > 0$ $\forall$ $\overline{y} \in O^{\perp}(\overline{x})$ $t\overline{y} \in O^{\perp}(t\overline{x})$,

Рассмотрим $\overline{y} \in O^{\perp}(\overline{x})$. По определению, $\exists n \geq 0$ $\overline{y} \in f^{-n}(f^n(\overline{x}))$. Обозначим $\overline{z} = f^n(\overline{x})$. Но в то же время $\overline{z} = f^n(\overline{y})$. Из-за однородности, $f^n(t\overline{x}) = t^{kn} f^n(t\overline{x}) = t^{kn}\overline{z}$. Но по той же причине $f^n(t\overline{y}) = t^{kn} f^n(t\overline{y}) = t^{kn}\overline{z}$. Из этого следует, что $f^n(t\overline{y}) = f^n(t\overline{x})$ и, следовательно, $t\overline{y} \in f^{-n}(f^n(t\overline{x}))$ и $t\overline{y} \in O^{\perp}(t\overline{x})$. Лемма доказана.

Лемма 2 *У отображения f точки $\overline{0}$ и ∞ обладают открытыми бассейнами притяжения.*

Доказательство Рассмотрим образ диска D_r, ограниченного окружностью S_r вокруг центра координат радиуса r под действием отображения f. Точка $\overline{0}$ — неподвижная, принадлежит внутренности диска D_r, а отображение f — внутреннее. Поэтому ее образ точка $\overline{0}$ тоже лежит во внутренности образа диска D_r. Граница образа диска D_r лежит в образе окружности S_r.

Рассмотрим образ окружности S_1. Обозначим $d_1^{min} = \min \rho(O, f(S_1))$, $d_1^{max} = \max \rho(O, f(S_1))$, где ρ — эвклидова метрика. Тогда $d_1^{max} \geq d_1^{min} > 0$, так как $f(S_1)$ — компактная кривая, не проходящая через точку $\overline{0}$.

Для $f(S_r)$ в силу подобия

$$d_r^{min} = \min \rho(O, f(S_r)) = r^k d_1^{min},$$

$$d_r^{max} = \max \rho(O, f(S_r)) = r^k d_1^{max}.$$

Тогда для $r < 1/d_1^{max}$ $d_r^{max} < r$, а для $r > 1/d_1^{min}$ $d_r^{min} > r$, что и дает утверждение леммы.

Лемма 3 *На каждом луче, исходящем из центра координат, лежит ровно одна точка, не принадлежащая бассейнам притяжения точек $\overline{0}$ и ∞.*

Доказательство Рассмотрим произвольный луч, исходящий из центра координат. бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞ — открытые множества, луч — линейно связное множество, поэтому множество точек луча, не входящих в бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, непусто.

Предположим, что в этом множестве найдется две различных точки p_1 и $p_2 \neq p_1$. Поскольку эти точки находятся на одном луче, то их координаты пропорциональны: $p_2 = tp_1$, $t > 0$, $t \neq 1$. Рассмотрим $f^n(p_1)$, $n > 0$. Так как p_1 не входит в бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, то норма $||f^n(p_1)||$ ограничена: $\exists C_1, C_2 > 0$: $C_2 > ||f^n(p_1)|| > C_1$.

Рассмотрим $f^n(p_2)$, $n > 0$. $||f^n(p_2)|| = ||t^{kn} f^n(p_1)|| = t^{kn}||f^n(p_1)||$. Тогда $t^{kn}C_2 > ||f^n(p_2)|| > t^{kn}C_2$. Но, поскольку $t \neq 1$, отсюда следует, что в зависимости от того, что величина t больше или меньше 1, $f^n(p_2)$ стремится к $\overline{0}$ либо к ∞ при $n \to \infty$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4 *множество точек, не принадлежащих бассейнам притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, образует гомеоморфную окружности жорданову кривую, разделяющую бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞.*

Доказательство Обозначим множество точек, не принадлежащих бассейнам притяжения точек $\overline{0}$ и ∞ через γ_1. Бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞

по определению представляют собой открытые непересекающиеся множества. Соответственно, множество γ_1, замкнуто, является перегородкой между этими бассейнами притяжения в $\mathbb{R}^2$, и, как следует из доказательства леммы 2, ограничено. Следовательно, множество γ_1 — компакт.

Согласно лемме 3, на каждом луче, исходящем из центра координат, лежит ровно одна точка, не принадлежащая бассейнам притяжения точек $\overline{0}$ и ∞. Следовательно, точки из γ_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с лучами, исходящими из центра координат. Покажем, что эта биекция непрерывна, так как близкие точки находятся на близких лучах. Для этого зададим непрерывное отображение $p\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\} \to S^1$ формулой (в комплексных координатах) $p(z) = \frac{z}{|z|}$. Тогда его сужение $q = p|_{\gamma_1} : \gamma_1 \to S^1$ по определению непрерывно и является искомой биекцией.

Заметим, что множество лучей, исходящих из центра координат, гомеоморфно окружности и является компактом. Но непрерывная биекция компактов является гомеоморфизмом (см. например, [1]). Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма 5 *Жорданова кривая γ_1, разделяющая бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, нейтрально инвариантна (т. е. с каждой своей точкой содержит ее нейтральное сечение).*

Доказательство Произвольный аттрактор в объединении со своим бассейном притяжения можно записать в виде $\cup_n f^{-n}(U)$, где U — строго притягивающая окрестность аттрактора ($\overline{f(U)} \subset U$). Из такой записи очевидно, что любой аттрактор в объединении со своим бассейном притяжения является нейтрально инвариантным множеством.

Поскольку γ_1 является дополнением к двум нейтрально инвариантным множествам, то она сама также является нейтрально инвариантным множеством.

Возьмем некоторый луч, выходящий из центра координат. Обозначим точку пересечения этого луча и γ_1 через p_1. Тогда точки луча можно представить как $p_t = tp_1$, $t > 0$. Используя t как коэффициент подобия, построим набор кривых γ_t, $t > 0$, являющихся гомотетиями кривой γ_1 относительно начала координат. По построению это некоторое слоение цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$.

Из лемм 1 и 4 следует, что это слоение нейтрально инвариантно.

Обозначим через S_ϕ гомеоморфное окружности множество лучей, исходящих из начала координат, где расстояние между двумя лучами равно

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.49278

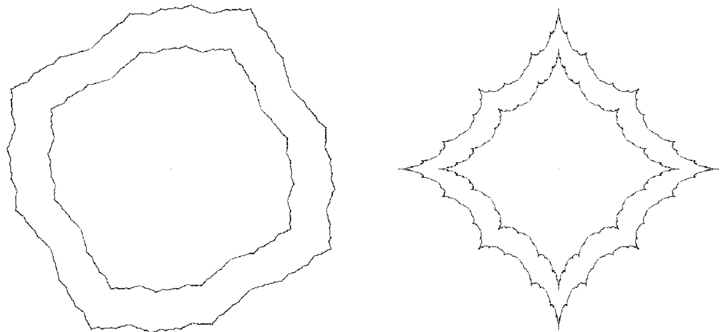

Рис. 1 γ_1 и $\gamma_{0.75}$ для $(x^2 + 0.5xy - y^2, -2xy)$ (a) и $(x^2 - y^2, -4xy)$ (b).

углу между ними, измеренному против часовой стрелки. Тогда f индуцирует на S_ϕ необратимое внутреннее отображение f_ϕ без особых точек, т. е. накрытие.

В [3] описан полный топологический инвариант накрытий окружности, и дан критерий их топологической сопряженности: два накрытия окружности одной и той же степени топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их там определенные топологические инварианты эквивалентны.

Теорема 1 (Критерий топологической сопряженности) *Пусть f и g — внутренние и однородные порядка $k > 1$ необратимые отображения, не имеющие в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\overline{0}$ и ∞, и $f_\phi, g_\phi \colon S_\phi \to S_\phi$ — индуцированные ими внутренние отображения множества S_ϕ. f и g топологически сопряжены $\Longleftrightarrow$ f_ϕ и g_ϕ топологически сопряжены.*

Доказательство Заметим, что $f_\phi : S^1 \to S^1$ можно задать формулой $f_\phi = q \circ f \circ q^{-1}$, где q — гомеоморфизм из доказательства леммы 4. Отсюда следует, что если f и g топологически сопряжены, то f_ϕ и g_ϕ топологически сопряжены. Покажем, что верно и обратное.

По жордановой кривой $\gamma_1(f)$ на цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ строится слоение $\gamma_t(f)$, $t > 0$, на гомотетичные образы кривой $\gamma_1(f)$ относительно начала координат. Аналогично строится слоение $\gamma_t(g)$.

Заметим, что отображение-гомотетия с кривой $\gamma_p(f)$ на $\gamma_q(f)$ — это в точности покоординатное умножение на скаляр $\frac{q}{p}$. Это же отображение является и гомотетией с кривой $\gamma_p(g)$ на $\gamma_q(g)$. Обозначим покоординатное умножение на скаляр $\frac{q}{p}$ через $H^{p,q}$. Заметим, что $H^{p,q} \circ H^{q,p} = \mathrm{Id}$ (соотношение 1).

Поскольку f_ϕ и g_ϕ топологически сопряжены, найдется гомеоморфизм $h_\phi\colon S_\phi \to S_\phi$, такой, что $h_\phi g_\phi = f_\phi h_\phi$. Лучи из множества S_ϕ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками жордановой кривой $\gamma_1(f)$, разделяющей бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞ отображения f, и во взаимно однозначном соответствии с точками жордановой кривой $\gamma_1(g)$, разделяющей бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞ отображения g. Тогда h_ϕ индуцирует гомеоморфизм этих жордановых кривых $h_1\colon \gamma_1(f) \to \gamma_1(g)$, такой, что в сужении на них имеем $h_1 g = f h_1$ (соотношение 2).

Продолжим этот гомеоморфизм на цилиндр $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$. Определим $h_p\colon \gamma_p(f) \to \gamma_p(g)$ как $h_p = H^{1,p} \circ h_1 \circ H^{p,1}$. Определим $h\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ следующим образом: если $\overline{x} \in \gamma_p(f)$, то $h(\overline{x}) = h_p(\overline{x})$. Это определение корректно, так как при разных t кривые $\gamma_t(f)$ не пересекаются. Полученное отображение h взаимно однозначно и непрерывно по построению, и по непрерывности продолжается на точки $\overline{0}$ и ∞: $h(\overline{0}) = \overline{0}$ и $h(\infty) = \infty$. Заметим, что по теореме Тихонова непрерывная биекция между компактами является гомеоморфизмом. Таким образом, так построенное отображение $h\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ является гомеоморфизмом $\hat{\mathbb{C}}$.

Проверим, что h — искомый сопрягающий гомеоморфизм. Достаточно проверить на $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$.

Пусть $\overline{x} \in \gamma_p(f)$. Тогда $\exists \overline{x}_1 \in \gamma_1(f)$: $\overline{x} = p\overline{x}_1 = H^{1,p}(\overline{x}_1)$. Заметим, что h коммутирует с гомотетиями $H^{p,q}$ по построению, а f и g коммутируют с $H^{p,q}$, поскольку они однородные, а $H^{p,q}$ — умножение на скаляр. Используя эту коммутативность, а также соотношения (1) и (2) выше, получим $h(f(\overline{x})) = h_p(f(\overline{x})) = h_p(f(H^{1,p}(\overline{x}_1))) = h_p(H^{1,p}(f(\overline{x}_1))) = H^{1,p}(h_1(H^{p,1}(H^{1,p}(f(\overline{x}_1))))) = H^{1,p}(h_1(f(\overline{x}_1))) = H^{1,p}(g(h_1(\overline{x}_1))) = g(H^{1,p}(h_1(H^{p,1}(\overline{x})))) = g(h_p(\overline{x})) = g(h(\overline{x}))$.

Таким образом, $h(f(\overline{x})) = g(h(\overline{x}))$ и f и g топологически сопряжены с помощью h. Теорема доказана.

Топологические свойства двумерных однородных внутренних отображений.

Рассмотрим внутреннее отображение $f_\phi\colon S_\phi \to S_\phi$. Для f_ϕ возникает следующая дихотомия: либо $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, либо $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$. Пусть d — степень отображений f и f_ϕ. Согласно результатам из [3], в этом случае f_ϕ топологически сопряжено стандартному растягивающему отображению $E_d = d \cdot \varphi \pmod{2\pi}$, у которого нейтральное сечение каждой точки всюду плотно в S_ϕ.

Используя [3] и теорему и леммы выше, сразу получим следующее.

Следствие 1 *Если у индуцированного отображением f на S_ϕ внутреннего отображения f_ϕ выполнено $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, то*

1. *жорданова кривая, которая разделяет бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, состоит из нейтрально неблуждающих неблуждающих точек;*
2. *замыкания нейтральных сечений точек цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ являются замкнутыми жордановыми кривыми, которые образуют естественное слоение цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$;*
3. *точки, притягивающиеся к $\overline{0}$ и ∞, являются нейтрально неблуждающими блуждающими точками;*
4. *бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞ обладают фундаментальными окрестностями II рода (определение 4.91 из [3]);*
5. *Пусть отображение f сохраняет ориентацию. Тогда отображение f топологически сопряжено голоморфному отображению z^d;*
6. *Пусть отображение f обращает ориентацию. Тогда отображение f топологически сопряжено антиголоморфному отображению $\overline{z}^d$.*

Рассмотрим оставшийся случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$. Жорданова кривая, которая разделяет бассейны притяжения точек $\overline{0}$ и ∞, в этом случае может содержать и блуждающие точки, которые, однако, по определению не будут регулярными. Также, в этом случае у отображения f появятся суперблуждающие точки: согласно лемме 1, точки, притягивающиеся к $\overline{0}$ и ∞, являются нейтрально неблуждающими блуждающими точками, если их луч принадлежит $\Omega^\perp(f_\phi)$, и суперблуждающими в другом случае.

Список литературы

1. Александров, П. С.: Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977, 368 стр.
2. Cabrera, C.: On the classification of laminations associated to quadratic polynomials. J. Geom. Anal. 18, no. 1, 29–67 (2008).
3. Власенко И. Ю.: Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 101. Институт математики НАН Украины. Киев, 2014, 225 стр.
4. Кузаконь, В. М., Кириченко, В. Ф., Пришляк, О. О.: Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 97, Институт математики НАН Украины, Киев, 2013, 500 стр.
5. Стоилов, С.: О топологических принципах теории аналитических функций. М., Мир. 1964, 228 стр.
6. Трохимчук, Ю. Ю.: Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Институт математики НАН Украины. Киев, 2008, 538 стр.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.49278

Игорь Юрьевич Власенко
Институт математики НАНУ, Киев, Украина
E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Igor Yu. Vlasenko

On the topological conjugacy of two-dimensional homogeneous inner mappings

For a class of branched coverings of the two-dimensional sphere the criterion of the topological conjugacy is given and some properties are listed. The class is a generalization of a class of inner mappings having homogeneous polynomials as their coordinate functions.