DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50150
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(1) 34–46 $d\omega$

Псевдосферическая поверхность в $\mathbb{R}^4$ не допускает двух различных преобразований Бьянки

В. А. Горькавый Е. Н. Невмержицкая

Аннотация Доказано, что если псевдосферическая поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, не лежащая ни в каком $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, допускает преобразование Бьянки, то это преобразование Бьянки единственно.

Ключевые слова Псевдосферическая поверхность, преобразование Бьянки, орициклические координаты, сопряженная сеть

УДК 514

1 Введение

Данная работа посвящена проблематике обобщения классической теории двумерных преобразований Бьянки-Беклунда псевдосферических поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ на случай двумерных поверхностей в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Указанная тематика была инициирована работами Ю.А. Аминова и А. Сыма [1]-[2], а затем получила развитие в работах авторов, см., например, [6]-[11], и обзор [12]. Проведенные исследования показали, что, с одной стороны, часть классических результатов успешно переносится на случай поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, тогда как, с другой стороны, некоторые результаты уже перестают быть верными, чем и объясняется интерес к этому направлению.

С аналитической точки зрения, псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^3$ и их геометрические преобразования Бьянки-Беклунда интерпретируются в терминах решений уравнения синус-Гордона и их специальных преобразований, также называемых преобразованиями Бьянки-Беклунда, см. [13]. Поэтому обобщение рассматриваемой теории на случай псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, при соответствующей аналитической интерпретации, может привести к нахождению аналогов уравнения синус-Гордона, что вызывает дополнительный интерес с точки зрения современной теории интегрируемых систем.

В развиваемом нами подходе обобщение понятия преобразования Бьянки для двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^4$ носит геометрический характер и опирается на следующее определение, дословно воспроизводящее соответствующее определение из классической теории для поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [13], [14].

Определение 1. Диффеоморфизм поверхностей $\psi : F^2 \to \tilde{F}^2$ в $\mathbb{R}^4$ называется *преобразованием Бьянки-Беклунда*, если он удовлетворяет трем свойствам:

(B_1) прямые в $\mathbb{R}^4$, соединяющие соответствующие точки на F^2 и $\tilde{F}^2$, касаются обеих поверхностей;

(B_2) расстояние между соответствующими точками на F^2 и $\tilde{F}^2$ постоянно и равно l_0;

(B_3) касательные плоскости поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в соответствующих точках ортогональны.[1]

Ранее было установлено, что, как и в классическом трехмерном случае, если две поверхности в $\mathbb{R}^4$ соединены преобразованием Бьянки, то тогда обе поверхности являются псевдосферическими, т.е. имеют постоянные отрицательные гауссовы кривизны $K = \tilde{K} = -1/l_0^2$ [6]. Кроме того, преобразование Бьянки псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^4$, как и в $\mathbb{R}^3$, допускает простое описание с применением орициклических координат [7], ср. [1], [3].

С другой стороны, между поведением поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и в $\mathbb{R}^4$, с точки зрения преобразований Бьянки, имеется и существенное различие. Так, каждая псевдосферическая поверхность в $\mathbb{R}^3$ допускает непрерывное однопараметрическое семейство различных преобразований Бьянки. В то же время псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^4$ в ситуации общего положения вообще не допускают преобразований Бьянки [1], [6]-[7]. Псевдосферические поверхности в $\mathbb{R}^4$, допускающие преобразования Бьянки и не лежащие в $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, образуют очень специальный класс псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^4$ –

[1] В более общем случае, когда речь идет о преобразовании Беклунда, условие ортогональности в (B_3) заменяется на условие постоянства угла $\omega \in (0, \pi/2]$ между касательными плоскостями поверхностей F^2 и $\tilde{F}^2$ в соответствующих по диффеоморфизму $\psi : F^2 \to \tilde{F}^2$ точках.

в [7] дано полное описание таких поверхностей и их преобразований Бьянки в терминах решений некоторой специальной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Непосредственно в данной работе мы рассматриваем вопрос о том, сколько именно различных преобразований Бьянки может допускать произвольная псевдосферическая поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$. Основным результатом является

Теорема 1 *Пусть F^2 – регулярная класса C^k, $k \geq 6$, поверхность в $\mathbb{R}^4$, не лежащая ни в каком $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Тогда F^2 допускает не более одного преобразования Бьянки.*

Из доказанного утверждения вытекает корректность понятия *пара псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^4$, связанных инволютивным преобразованием Бьянки*. Аналогичная ситуация имеет место, например, для пар изотермических поверхностей в $\mathbb{R}^3$, связанных преобразованием Кристоффеля. Аналитическое объяснение подобного феномена для изотермических поверхностей было предложено в рамках современной теории интегрируемых систем [5]. Было бы интересным реализовать аналогичный подход, с применением интегрируемых систем, и для картановых псевдосферических поверхностей в $\mathbb{R}^4$.

Далее мы представим доказательство приведенного утверждения, рассмотрение носит локальный характер.

2 Преобразование Бьянки и внутренняя геометрия

Пусть F^2 – регулярная поверхность в $\mathbb{R}^4$, заданная радиус-вектором $r = r(u,v)$. Обозначим через $g = \langle dr, dr \rangle = g_{ij} du^i du^j$ первую фундаментальную форму поверхности, Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля, n_1 и n_2 – ортонормированный базис нормалей на F^2, $L^\sigma = \langle d^2 r, n_\sigma \rangle = L^\sigma_{ij} du^i du^j$ – соответствующие вторые фундаментальные формы, $\mu_1 = \langle \partial_u n_1, n_2 \rangle$ и $\mu_2 = \langle \partial_v n_1, n_2 \rangle$ – коэффициенты кручения.

В силу теоремы Аллендорфера о снижении коразмерности, поверхность с ненулевой кривизной в $\mathbb{R}^4$ принадлежит некоторому $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ тогда, и только тогда, когда ее точечная коразмерность не превосходит 1. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что точечная коразмерность поверхности равна 2, т.е.

$$rank \begin{pmatrix} L^1_{11} & L^1_{12} & L^1_{22} \\ L^2_{11} & L^2_{12} & L^2_{22} \end{pmatrix} \equiv 2, \qquad (1)$$

это в точности означает, что F^2 не лежит ни в каком $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Если поверхность F^2 допускает преобразование $\psi : F^2 \to \tilde{F}^2$, удовлетворяющее условию (B_1), то тогда F^2 является либо линейчатой, либо картановой, см. [6]-[7], [13]. Линейчатые поверхности в $\mathbb{R}^4$ были рассмотрены в [8], никакая из таких поверхностей не допускает преобразований, удовлетворяющих вместе с (B_1) и условиям (B_2)-(B_3). Поэтому поверхность F^2 обязана быть картановой, т.е., по определению, имеет точечную коразмерность $\nu \equiv 2$ и несет на себе сопряженную сеть. Обратим внимание, что упомянутая сопряженная сеть на F^2 определена однозначно[2], поскольку сопряженность координатных линий сети подразумевает их одновременную сопряженность относительно обеих вторых фундаментальных форм L^1 и L^2, линейно независимых в силу условия (1).

Не уменьшая общности, можно считать, что локальные координаты (u, v) на F^2 специализированы таким образом, что координатные линии $u = const$ и $v = const$ как раз и образуют сопряженную сеть. Это означает, что в рассматриваемой параметризации обе вторые фундаментальные формы являются диагональными

$$L^1_{12} \equiv 0, \quad L^2_{12} \equiv 0. \tag{2}$$

Отметим, что параметризация $r(u, v)$ поверхности F^2 сопряженными координатами (u, v) является, вообще говоря, уже гладкой класса C^{k-1}. При этом остается свобода в выборе шкалирующей замены координат $\hat{u} = f(u)$, $\hat{v} = h(v)$, очевидно сохраняющей сопряженную сеть координатных линий.

Для поверхности F^2 построим преобразования $\psi_1 : F^2 \to \tilde{F}^2_1$ и $\psi_{-1} : F^2 \to \tilde{F}^2_{-1}$, задаваемые формулами

$$\tilde{r} = r - \frac{1}{\Gamma^2_{12}} \partial_u r \tag{3}$$

и

$$\tilde{r} = r - \frac{1}{\Gamma^1_{12}} \partial_v r. \tag{4}$$

соответственно. Следуя классической терминологии, преобразования ψ_1 и ψ_{-1} называются *первым преобразованием Лапласа* и *минус первым преобразованием Лапласа* поверхности F^2. Оба этих преобразования удовлетворяют условию двойного касания (B_1), что проверяется дифференцированием

[2] Этим поверхности в $\mathbb{R}^4$ существенно отличаются от поверхностей в $\mathbb{R}^3$, поскольку каждая поверхность в $\mathbb{R}^3$ несет на себе множество различных сопряженных сетей.

(3)-(4) с применением формул Вейнгартена и с учетом условия сопряженности координатных линий (2). Более того, если какое-либо преобразование рассматриваемой поверхности F^2 удовлетворяет условию (B_1), то тогда это преобразование описывается либо в виде (3), либо в виде (4), см. [13], [6]-[7].

Рассмотрим пару поверхностей F^2, $\tilde{F}_1^2$ и связывающее их преобразование ψ_1, заданное формулой (3). Как отмечалось, указанное преобразование удовлетворяет условию (B_1), проанализируем выполнимость условий (B_2) и (B_3). Для расстояния l между соответствующими точками F^2 и $\tilde{F}_1^2$ получаем из (3) следующее элементарное выражение:

$$l^2 = \frac{g_{11}}{(\gamma_{12}^2)^2}. \tag{5}$$

Так же легко показать, что для угла ω между $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$ имеет место формула[3]

$$\cos\omega = \frac{\Gamma_{11}^2}{\sqrt{(\Gamma_{11}^2)^2 + \dfrac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \sum\limits_{\sigma} (L_{11}^{\sigma})^2}} \tag{6}$$

Поэтому условие (B_2) записывается в виде

$$l_0^2 \left(\Gamma_{12}^2\right)^2 = g_{11}. \tag{7}$$

а условие (B_3) – в виде

$$\Gamma_{11}^2 \equiv 0. \tag{8}$$

Аналогично, рассматривая преобразование ψ_{-1}, заданное формулой (4), получаем, что условия (B_2)-(B_3) для ψ_{-1} принимают вид

$$l_0^2 \left(\Gamma_{12}^1\right)^2 = g_{22}, \tag{9}$$

$$\Gamma_{22}^1 \equiv 0. \tag{10}$$

Подводя итог, можем сделать следующий промежуточный вывод. Если рассматриваемая картанова поверхность F^2 в $\mathbb{R}^4$, параметризованная сопряженными координатами, удовлетворяет обе пары условий (7)-(8) и (9)-(10),

[3] Взаимное расположение пары двумерных подпространств в $\mathbb{R}^4$ определяется двумя углами – стационарными значениями углов между векторами из одного и другого подпространств [3], [4]. Поскольку, благодаря выполнению условия двойного касания B_1, плоскости $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$ пересекаются по прямой, соединяющей точки P и $\tilde{P}$, один из двух стационарных углов между этими плоскостями равен нулю, а второй стационарный угол – это и есть ω, он определяется как угол между векторами в $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$, ортогональными к прямой $P\tilde{P}$.

то тогда F^2 допускает в точности два различных преобразования Бьянки, и эти преобразования задаются в виде (3)-(4). Если выполнена только одна из пар условий (7)-(8) или (9)-(10), то F^2 допускает в точности одно преобразование Бьянки, и это преобразование задается в виде (3) или (4) соответственно. Если же не выполнена ни одна из пар условий (7)-(8) и (9)-(10), то тогда F^2 не допускает преобразований Бьянки.

Условия (7)-(10) имеют внутренне-геометрический смысл и накладывают определенные ограничения на сопряженную сеть координатных линий u, v на F^2 и, как следствие, на саму поверхность F^2.

Лемма 1 *Поверхность $F^2 \subset \mathbb{R}^4$ удовлетворяет условиям (7)-(10) тогда, и только тогда, когда, с точностью до шкалирующего преобразования сопряженных координат $\hat{u} = f(u)$, $\hat{v} = h(v)$, метрика поверхности F^2 имеет вид*

$$ds^2 = \frac{l_0^2}{u^2v^2(uv+2)^2}\left(v^2(du)^2 - 2uv(uv+1)dudv + u^2(dv)^2\right). \tag{11}$$

Доказательство Условие (8) в терминах коэффициентов g_{ij} имеет вид:

$$g_{11}\cdot\partial_u g_{12} - \frac{1}{2}g_{11}\cdot\partial_v g_{11} - \frac{1}{2}g_{12}\cdot\partial_u g_{11} \;=\; 0,$$

то есть,

$$\partial_u\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \;=\; \partial_v\sqrt{g_{11}}.$$

Как следствие, существует функция $\varphi(u,v)$ такая, что $\sqrt{g_{11}} = \partial_u\varphi$ и $\dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} = \partial_v\varphi$, т.е.

$$g_{11} = (\partial_u\varphi)^2, \quad g_{12} = \partial_u\varphi\partial_v\varphi. \tag{12}$$

Условие (7) в терминах g_{ij} записывается в виде

$$-\frac{1}{2}g_{12}\cdot\partial_v g_{11} + \frac{1}{2}g_{11}\cdot\partial_u g_{22} = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\sqrt{g_{11}}\frac{1}{l_0}. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (13), получаем:

$$\frac{1}{2}\partial_u g_{22} - \partial_{uv}\varphi\,\partial_v\varphi = \left(g_{22} - (\partial_v\varphi)^2\right)\partial_u\varphi\frac{1}{l_0},$$

то есть,

$$\partial_u(g_{22} - (\partial_v\varphi)^2) = 2(g_{22} - (\partial_v\varphi)^2)\partial_u\varphi\frac{1}{l_0}.$$

Полученное равенство имеет место тогда и только тогда, когда существует функция $f(v)$ такая, что

$$g_{22} = (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\frac{\varphi}{l_0}} f^2(v).$$

Мы можем избавиться от $f(v)$, сделав шкалирующее преобразование $v \to \tilde{v}$ такое, что $d\tilde{v} = \pm f(v)dv$. Поэтому, не уменьшая общности, можем сразу положить $f(v) = 1$.

Как следствие, метрика рассматриваемой картановой поверхности F^2 будет иметь вид

$$g_{11} = (\partial_u \varphi)^2, \quad g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi, \quad g_{22} = (\partial_u \varphi)^2 + e^{2\frac{\varphi}{l_0}}, \tag{14}$$

т.е. получаем метрику плоскости Лобачевского $ds^2 = (d\varphi)^2 + e^{2\frac{\varphi}{l_0}}(dv)^2$ кривизны $K \equiv -\frac{1}{l_0^2}$ в орициклических координатах: координатные линии $v = const$ являются параллельными геодезическими, а их ортогональные траектории $\varphi = const$ являются орициклами.

Подставляя в (9)-(10) найденные выше выражения (14) для g_{ij}, получаем следующие уравнения для функции $\varphi(u, v)$:

$$l_0^2 (\partial_{uv}\varphi)^2 - 2l_0 \partial_{uv}\varphi \partial_u \varphi \partial_v \varphi - (\partial_u \varphi)^2 e^{2\frac{\varphi}{l_0}} = 0, \tag{15}$$

$$l_0 \partial_{vv}\varphi - 2(\partial_v \varphi)^2 - e^{2\frac{\varphi}{l_0}} = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) можно переписать в виде

$$\partial_{vv} e^{-2\frac{\varphi}{l_0}} + 2\frac{1}{l_0^2} = 0,$$

а его решением будет функция

$$\varphi = -\frac{l_0}{2} \ln(\frac{h_1(u) - (v + h_2(u))^2}{l_0^2}), \tag{17}$$

где $h_1(u) > 0$ и $h_2(u)$ – произвольные функции. Подставим полученное выражение для φ в оставшееся уравнение (15):

$$(h_1')^2 - 4(h_2')^2 h_1 = 0.$$

Решение можно записать в виде $h_1 = (h_2 + C)^2$, где C – константа интегрирования, от которой можно избавиться с помощью замены $v \to v - C$. Подставляя $h_1 = (h_2)^2$ в (17), находим:

$$\varphi = -\frac{l_0}{2} \ln\left(\frac{h_2(u)^2 - (v + h_2(u)^2}{l_0^2}\right). \tag{18}$$

Возвращаясь к формулам (14), получаем следующие выражениям для коэффициентов метрики рассматриваемой поверхности F^2:

$$g_{11} = l_0^2\,\frac{(h_2')^2}{(v+2h_2)^2}, \quad g_{12} = l_0^2\,\frac{h_2'(v+h_2)}{(v+2h_2)^2}, \quad g_{22} = l_0^2\,\frac{h_2^2}{v^2(v+2h_2)^2}.$$

Легко заметить, что функция $h_2(u)$ отвечает свободе в выборе шкалирующего преобразования $u = u(\tilde{u})$, сохраняющего сопряженность координат u и v. Удобно положить $h_2 = 1/u$. Тогда коэффициенты g_{ij} примут следующий симметричный вид, который и указан в формулировке леммы:

$$g_{11} = \frac{l_0^2}{u^2(uv+2)^2}, \quad g_{12} = -\frac{l_0^2(uv+1)}{uv(uv+2)^2}, \quad g_{12} = \frac{l_0^2}{v^2(uv+2)^2}. \qquad (19)$$

Обратно, если коэффициенты g_{ij} первой фундаментальной формы поверхности F^2 заданы выражениями (19), то тогда непосредственным вычислением символов Кристоффеля можно убедиться в выполнении условий (7)-(10). Лемма доказана.

Заметим, что из представленного доказательства вытекает следующее очевидное

Следствие 1 *Поверхность* $F^2 \subset \mathbb{R}^4$ *удовлетворяет (7)-(10) тогда, и только тогда, когда* F^2 *имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну* $K \equiv -\frac{1}{l_0^2}$*, а семейства координатных линий* $u = const$ *и* $v = const$ *сопряженной сети на* F^2 *представлены семействами параллельных геодезических на* F^2.

Обратим внимание, что в ходе доказательства Леммы 1 мы воспользовались упомянутой ранее свободой в выборе шкалирующего преобразования сопряженных координат на F^2. При этом параметризация поверхности сопряженными координатами после такого шкалирования будет уже, вообще говоря, гладкой класса C^{k-2}.

3 Фундаментальные уравнения теории поверхностей

Предположим теперь, что поверхность F^2 допускает два различных преобразования Бьянки. Как отмечалось выше, это эквивалентно тому, что F^2 допускает параметризацию сопряженными координатами так, что выполнены условия (7)-(10). В силу Леммы 1 это означает, что поверхность F^2 может быть параметризована сопряженными координатами $(u,\, v)$ так, что ее метрика примет вид (11).

Детерминант матрицы коэффициентов первой квадратичной формы поверхности F^2 равен

$$\det g = -\frac{l_0^4}{uv(uv+2)^3}, \tag{20}$$

поэтому область определения Ω сопряженных координат $(u,\, v)$ принадлежит одно из двух следующих областей, переводящихся друг в друга преобразованием $u \to -u$, $v \to -v$:

$$\Omega_1 = \left\{(u,v) \in R^2 | u > 0, v < 0, uv + 2 > 0\right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{(u,v) \in R^2 | u < 0, v > 0, uv + 2 > 0\right\}.$$

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что $\Omega \subset \Omega_1$.

Запишем фундаментальные уравнения для поверхности F^2 в указанной параметризации с учетом (1), (2), (11):
уравнение Гаусса

$$L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = \frac{l_0^2}{uv(uv+2)^3}, \tag{21}$$

уравнения Кодацци

$$v(uv+2)\left(L_{11}^2 \mu_2 - \partial_v L_{11}^1\right) + L_{11}^1 \,=\, 0, \tag{22}$$

$$v(uv+2)\left(L_{11}^1 \mu_2 + \partial_v L_{11}^2\right) - L_{11}^2 \,=\, 0, \tag{23}$$

$$u(uv+2)\left(L_{22}^2 \mu_1 - \partial_u L_{22}^1\right) + L_{22}^1 \,=\, 0, \tag{24}$$

$$u(uv+2)\left(L_{22}^1 \mu_1 + \partial_u L_{22}^2\right) + L_{22}^2 \,=\, 0, \tag{25}$$

уравнение Риччи

$$l_0^2\left(\partial_v \mu_1 - \partial_u \mu_2\right) + (uv+1)(uv+2)\left(L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2\right) \,=\, 0. \tag{26}$$

Если сложить уравнение (22), умноженное на $-L_{11}^1$, с уравнением (23), умноженным на L_{11}^2, то получим

$$\partial_v\left((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2\right) \,=\, \frac{2}{v(uv+2)}\left((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2\right), \tag{27}$$

откуда следует, что имеет место представление

$$(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 \,=\, -l_0^2 \frac{v}{uv+2}\left(p_1(u)\right)^2, \tag{28}$$

где $p_1(u)$ – произвольная положительная функция, гладкая класса C^{k-4}. Аналогичным образом из уравнений (24)-(25) вытекает, что

$$(L^1_{22})^2 + (L^2_{22})^2 \,=\, l_0^2 \frac{u}{uv+2}\,(p_2(v))^2, \tag{29}$$

где $p_2(v)$ – произвольная положительная функция, гладкая класса C^{k-4}. Как следствие равенств (28)-(29), мы можем записать следующее представление для коэффициентов вторых квадратичных форм поверхности F^2:

$$L^1_{11} \,=\, l_0 \frac{\sqrt{-v}}{\sqrt{uv+2}}\,p_1\,\cos\alpha, \quad L^2_{11} \,=\, l_0 \frac{\sqrt{-v}}{\sqrt{uv+2}} p_1\,\sin\alpha; \tag{30}$$

$$L^1_{22} \,=\, l_0 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{uv+2}}\,p_2\,\cos\beta, \quad L^2_{22} \,=\, l_0 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{uv+2}}\,p_2\,\sin\beta, \tag{31}$$

где $\alpha(u,v)$ и $\beta(u,v)$ – произвольные функции, гладкие класса C^{k-4}. В виду формул (30)-(31), уравнения Кодацци сведутся к двум уравнениям

$$\mu_1 \,=\, -\partial_u\beta, \quad \mu_2 \,=\, -\partial_v\alpha, \tag{32}$$

которые мы можем рассматривать как выражения для определения коэффициентов кручения μ_1 и μ_2.

В результате остаются уравнение Гаусса и уравнение Риччи, которые можно записать, используя функцию $\omega = \alpha - \beta$, в следующем виде:

$$\cos\omega = -\frac{1}{p_1 p_2 (uv+2)^2 (\sqrt{u})^3 (\sqrt{-v})^3}, \tag{33}$$

$$\partial_{uv}\omega \,-\, p_1 p_2 \sqrt{u}\sqrt{-v}(uv+1)\sin\omega \,=\, 0. \tag{34}$$

Лемма 2 *У системы (33)-(34) не существует гладкого класса* C^2 *решения* $\omega(u,v)$, $p_1(u) > 0$, $p_2(v) > 0$.

Доказательство Выражая $\omega(u,v)$ из (33) и подставляя в (34), после ряда громоздких вычислений получаем следующее дифференциальное уравнение для функций $q_1(u) = (p_1(u))^2$, $q_2(v) = (p_2(v))^2$:

$$\frac{dq_1}{du}\,\frac{dq_2}{dv}\,u^3 v^3 (uv+2)^6 +$$

$$+\frac{dq_1}{du}\,q_2\,u^3 v^2 (7uv+6)(uv+2)^5 \,+\, \frac{dq_2}{dv}\,q_1\,u^2 v^3 (7uv+6)(uv+2)^5 +$$

$$+\,q_1\,q_2\,u^2 v^2 (49u^2v^2 + 68uv + 36)(uv+2)^4 \,-\, 16 \,=\, 0. \tag{35}$$

Дифференцируя (35) отдельно по u и по v, получим два уравнения

$$\frac{d^2q_1}{du^2}\, u^3v^2(uv+2)^5\, \left(\frac{dq_2}{dv}\, v(uv+2) \,+\, (7uv+6)q_2\right) \,+\, ... \,=\, 0, \qquad (36)$$

$$\frac{d^2q_2}{dv^2}\, u^2v^3(uv+2)^5\, \left(\frac{dq_1}{du}\, u(uv+2) \,+\, (7uv+6)q_1\right) \,+\, ... \,=\, 0, \qquad (37)$$

где троеточиями обозначены полиномы от u, v, q_1, q_2, $\dfrac{dq_1}{du}$, $\dfrac{dq_2}{dv}$.

Дифференцируя (35) по u и затем по v, получим уравнение вида

$$A\,\frac{d^2q_1}{du^2}\,\frac{d^2q_2}{dv^2} \,+\, B\,\frac{d^2q_1}{du^2} \,+\, C\,\frac{d^2q_2}{dv^2} \,+\, D \,=\, 0, \qquad (38)$$

где A, B, C, D – полиномы от u, v, q_1, q_2, $\dfrac{dq_1}{du}$, $\dfrac{dq_2}{dv}$.

Если

$$\frac{dq_2}{dv}\, v(uv+2) \,+\, (7uv+6)q_2 \neq 0, \quad \frac{dq_1}{du}\, u(uv+2) \,+\, (7uv+6)q_1 \neq 0$$

в какой-то точке из Ω, то в окрестности этой точки мы можем найти $\dfrac{d^2q_1}{du^2}$ и $\dfrac{d^2q_2}{dv^2}$ из (36)-(37), а затем подставить найденные выражения в (38). Оказывается, что это приводит к соотношению

$$\left(\frac{dq_2}{dv} v(uv+2) + (7uv+6)q_2\right)\left(\frac{dq_1}{du} u(uv+2) + (7uv+6)q_1\right) = 0, \qquad (39)$$

что противоречит предположению. Поэтому хотя бы один из множителей в (39) обязан обращаться в ноль тождественно в Ω.

Предположим, например, что

$$\frac{dq_2}{dv}\, v(uv+2) \,+\, q_2(7uv+6) \,\equiv\, 0.$$

Записывая это соотношение как линейный полином по u и приравнивая к нулю коэффициенты этого полинома, получаем:

$$\frac{dq_2}{dv}\, v^2 \,+\, 7vq_2 \,\equiv\, 0,$$

$$\frac{dq_2}{dv}\, 2v \,+\, 6q_2 \,\equiv\, 0.$$

Как следствие, $q_2 \equiv 0$, что противоречит требованию $q_2 > 0$. Лемма доказана.

Таким образом, мы получаем, что если рассматриваемая поверхность F^2 допускает два различных преобразования Бьянки, то ей обязательно отвечает гладкое класса C^2 решение $\omega(u,v)$, $p_1(u) > 0$, $p_2(v) > 0$ системы (33)-(34). С другой стороны, в виду Леммы 2, такого решения у системы (33)-(34) не существует. Полученное противоречие и завершает доказательство Теоремы.

Список литературы

1. Aminov Yu.A., Sym A., *On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in* E^4, Math. Phys., An., Geom., 3, 75-89, (2000)

2. Aminov Yu.A., Sym A., *On Bianchi and Backlund transformations of two dimensional surfaces in four dimensional Euclidean space*, Backlund and Darboux transformations, The geometry of solitons, AARMS-CRM Workshop, Halifax, NS, 1999, Canada, June 4-9, (publ. by) Amer. Math. Soc., 91-93 (2001)

3. Aminov Yu.A., *Geometry of Submanifolds* , Gordon and Breach Science Publ., Amsterdam, (2001)

4. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А., *Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий*, Успехи математических наук, 46:2, 41-83, (1991)

5. Cieslinski J., Goldstein P., Sym A., *Isothermic surfaces in* E^3 *as soliton surfaces*, Phys. Lett., A 205, 1, 37-43, (1995).

6. Gorkavyy V., *On pseudo-spherical congruencies in* E^4, Математическая физика, анализ, геометрия, 10:4, 498-504, (2003)

7. Горькавый В.А., *Конгруэнции Бьянки двумерных поверхностей в* ^{4}, Математический сборник, 196:10, 79-102, (2005)

8. Gorkavyy V.O, Nevmerzhytska O.M., *Ruled surfaces as pseudo-spherical congruencies*, Журнал математической физики, анализа, геометрии, 5:3, 359-374, (2009)

9. Горькавый В.А., Невмержицкая Е.Н., *Аналог преобразования Бъянки для двумерных поверхностей в пространстве* S^3xR^1, Математические заметки, 89:6, 833-845, (2011)

10. Gorkavyy V., Nevmerzhitska O., *Pseudo-spherical submanifolds with degenerate Bianchi transformation*, Results in Mathematics, 60:1, 103-116, (2011)

11. Gorkavyy V., *An example of Bianchi transformation in* E^4, Журнал математической физики, анализа, геометрии, 8:3, 240-247, (2012)

12. Горькавый В.А., *Обобщение преобразования Бьянки-Бэклунда псевдосферических поверхностей*, Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, т.126 (2014), с.191-218

13. Tenenblat K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Pitman Monographs and Surveys in Pure Appl. Math, V.93, Longman Sci. Techn., Harlow, Essex; Wiley, New York, (1998)

14. Tenenblat K., Terng C.-L., *Backlund's theorem for n-dimensional submanifolds of* R^{2n-1}, Annals of Mathematics, 111, 477-490, (1980)

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50150

В. А. Горькавый
ФТИНТ им.Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Е. Н. Невмержицкая
ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина
E-mail: ennev@ukr.net

Vasyl Gorkavyy, Olena Nevmerzhitska

A pseudo-spherical surface in $\mathbb{R}^4$ does not admit two different Bianchi transformations

It is proved that if a pseudo-spherical surface in four-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^4$, which does not belong to $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, admits a Bianchi transformation, then this Bianchi transformation is unique.