

О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II

Александр Анатольевич Кадубовский

Аннотация В работе рассматривается класс гладких функций с тремя критическими значениями на двумерной сфере S^2 , у которых кроме M локальных максимумов и m локальных минимумов только одна критическая точка типа седло. Для функций из указанного класса представлен полный топологический инвариант, с помощью которого для произвольных натуральных M и m установлены явные формулы для подсчета числа топологически неэквивалентных (в двух различных аспектах) таких функций.

Ключевые слова smooth function, saddle critical point, surface, topological classification, 2-color chord diagram, non-crossing partition, Narayana number.

УДК 517.938.5 + 519.514.17

*Посвящается памяти
моего научного руководителя
Владимира Васильевича Шарко*

Введение

Представленная статья является логическим завершением цикла авторских работ [14]–[17], посвященных получению явных формул для подсчета точного числа топологически неэквивалентных (в двух различных аспектах) гладких функций определенного класса на двумерной сфере S^2 .

Пусть $(N, \partial N)$ – гладкая поверхность с краем ∂N (∂N может быть). Обозначим через $C^\infty(N)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на N с краем $\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N$, все критические точки которых изолированы и лежат во внутренности N на одной линии уровня, а на компонентах связности края $\partial_- N$ ($\partial_+ N$) они принимают одинаковое значение a (b).

Функции f и g из $C^\infty(N)$ называют *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизмы $h : N \rightarrow N$ и $l : R^1 \rightarrow R^1$ (l сохраняет ориентацию), такие что $g = l \circ f \circ h^{-1}$. Если h сохраняет ориентацию, функции f и g будем называть *O-топологически эквивалентными*. В дальнейшем также будем полагать, что N – замкнутая ориентируемая поверхность.

Пусть $f \in C^\infty(N)$, а $x_0 \in N$ – ее изолированная критическая точка, не являющаяся локальным экстремумом. Если топологический тип линий уровня при переходе через x_0 меняется (не меняется), то такую точку x_0 (следуя [18], [11]) называют существенно (соответственно несущественной) критической точкой.

Хорошо известно [5], что в некоторой окрестности своей существенно критической точки x_0 функция f топологически эквивалентна функции $f_n(x; y) = \operatorname{Re}(x + iy)^n + c_n$, причем $n \geq 2$ (непрерывной заменой координат приводится к виду $f_n = \operatorname{Re}z^n + c_n$). Более того, локально, функции классифицируются целым числом – индексом Пуанкаре. Напомним, что индексом Пуанкаре $\operatorname{ind}^f(x_0)$ критической точки x_0 функции f называют индекс Пуанкаре ее поля градиента $\operatorname{grad} f$ для некоторой римановой метрики. Также известно, что для функции $f = \operatorname{Re}z^n$ индекс Пуанкаре равен $\operatorname{ind}^f(0) = 1 - n$, а для каждой критической точки на поверхности $\operatorname{ind}^f(x_0) \leq 1$ [5].

Число k существенно критических точек x_j функции f вместе со значениями n_j (показателями в представлениях f в виде $f_j = \operatorname{Re}z^{n_j} + c_{n_j}$ в окрестностях x_j) называют топологическим сингулярным типом функции f .

В работе В.В. Шарко [18] изучен вопрос топологической эквивалентности функций из класса $C^\infty(N)$. Ним установлено, что существует лишь конечное число топологически неэквивалентных функций с фиксированным сингулярным типом, равное числу неизоморфных цветных спин-графов, расширения которых гомеоморфны поверхности N . Однако неизвестно сколько таких классов эквивалентности. В общем случае эта задача оказалась очень сложной и остается нерешенной к этому времени проблемой.

1 Постановка задачи

Если же ограничиться рассмотрением класса функций $C_{M,m}(N_g)$ с тремя критическими значениями на замкнутой ориентируемой поверхности N_g (рода $g \geq 0$), у которых кроме M локальных максимумов и m локальных минимумов **только одна** существенно критическая точка x_0 (в дальнейшем – вырожденная критическая точка типа седло), то упомянутая выше задача несколько упрощается.

А именно, как следует из работы [4], для функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ топологическим инвариантом является индекс Пуанкаре единственной критической точки x_0 типа седло, который равен

$$\text{ind}^f(x_0) = 2 - 2g - M - m.$$

Полным топологическим инвариантом для функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ является, так называемая, 2-цветная O -диаграмма с

$$n = 2g - 1 + M + m$$

хордами, которая содержит M черных (белых) и m белых (черных) циклов. Кроме того, в работах автора [11], [12] полностью решена задача о подсчете числа O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{1,1}(N_g)$, $g \geq 1$.

Однако, в общем случае (для произвольных натуральных M , m и $g \geq 0$), подсчет числа топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ также оказался достаточно сложной комбинаторной задачей. Даже для функций на двумерной сфере S^2 вопрос оставался открытым.

Формулы (в явном виде) для подсчета числа O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(S^2)$ ранее были известны только для начальных M и произвольных $n \geq M$ (или, что тоже, для начальных M и натуральных $m = n + 1 - M$), а именно:

для $M = 1, 2, 3, 4$ и $\forall n \geq M$ формулы были получены в работе [14];

для $M = 5, 6$ и $\forall n \geq M$ – в работе [15];

для $M = 7, 8$ и $\forall n \geq M$ – в работе [16];

для $M = 9$ и $\forall n \geq M$ – в работе [17].

Модернизации полного топологического инварианта для функций из класса $C_{M,m}(S^2)$, возможным его интерпретациям, а также получению формул для подсчета точного числа O -топологически (топологически) неэквивалентных таких функций для произвольных $M, m \in \mathbb{N}$ и посвящена данная статья.

2 2-цветные хордовые диаграммы: основные понятия и определения

Напомним (напр. [3]), что хордовой диаграммой порядка n или, коротко, n -диаграммой называют конфигурацию на плоскости, состоящую из окружности, $2n$ точек на ней (являющихся вершинами правильного $2n$ -угольника) и n хорд, соединяющих указанные точки. Хордовые диаграммы называют изоморфными, если одну можно получить из другой в результате поворота. Диаграммы называют эквивалентными, если их можно совместить в результате поворота, зеркальной симметрии, или же их композиции.

Определение 1 Окружность с $2n$ точками на ней (являющихся вершинами правильного $2n$ -угольника), дуги которой поочередно раскрашены в два цвета (черный и белый) и фиксированной нумерацией указанных вершин (числами от 1 до $2n$ по часовой стрелке) будем называть 2-цветным $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-цветной n -диаграммой будем называть хордовую n -диаграмму, построенную на основе 2-цветного $2n$ -шаблона.

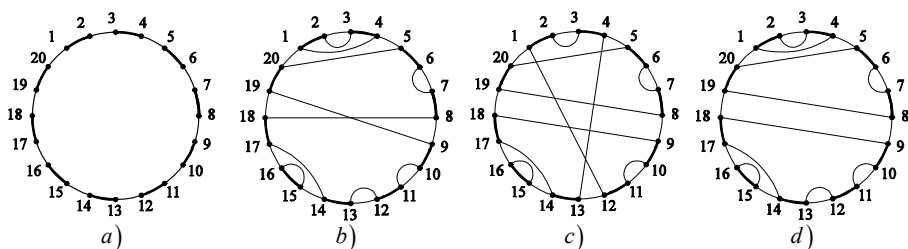


Рис. 1

- a) 2-цветный 20-шаблон;
- b) N -диаграмма (с 10 хордами), у которой 7 белых и 3 черных циклов;
- c) O -диаграмма (с 10 хордами), у которой 6 белых и 3 черных циклов;
- d) планарная O -диаграмма (с 10 хордами), у которой 7 белых и 4 черных циклов

Определение 2 2-цветную n -диаграмму, которая не содержит (содержит) хорд, соединяющих вершины с номерами одинаковой четности, будем называть O -диаграммой (N -диаграммой) — рис. 1 b), c). Множество 2-цветных O -диаграмм с n хордами обозначим через \mathfrak{S}_n^O .

Определение 3 b -циклом (w -циклом) диаграммы из класса \mathfrak{S}_n^O будем называть чередующуюся последовательность хорд и черных (соответственно белых) дуг, которые образуют гомеоморфный образ (ориентированной) окружности — рис. 1 b) — d).

Пусть λ – число черных и белых циклов диаграммы из \mathfrak{S}_n^O . Тогда родом диаграммы следует считать (напр. [3], [13]) целое число g , определяемое соотношением

$$g = \frac{n - \lambda + 1}{2}. \quad (1)$$

Определение 4 *Диаграмму из класса \mathfrak{S}_n^O , род которой равен нулю, будем называть диаграммой минимального рода или, коротко, планарной диаграммой – рис. 1 d). Подмножество планарных диаграмм из класса \mathfrak{S}_n^O , которые содержат точно k ($1 \leq k \leq n$) черных (или, что тоже, $n - k + 1$ белых) циклов обозначим $\mathfrak{S}_{k,n}$.*

Хорошо известно (напр. из [3], [2]), что n -диаграмма (по сути из \mathfrak{S}_n^O) является планарной тогда и только тогда, когда она не содержит пересекающихся хорд.

Определение 5 *Как и в случае (нераскрашенных) хордовых n -диаграмм, 2-цветные диаграммы будем называть*

изоморфными, *если их можно совместить в результате поворота (по часовой стрелке) около общего центра;*

эквивалентными, *если их можно совместить в результате зеркальной симметрии и/или поворота около общего центра.*

Известно (напр. из [3], [11]), что n -диаграмму (в том числе из \mathfrak{S}_n^O) можно отождествить с ее «склежкой» – подстановкой-инволюцией α , столбцы которой – суть номера вершин, инцидентных одной хорде. Так, например, диаграмме на рис. 1 d) соответствует подстановка

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 20 & 7 & 6 & 19 & 18 & 11 & 10 & 13 & 12 & 17 & 16 & 15 & 14 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Более того, как следует из работ [3], [11], циклическая группа C_{2n}^* порядка n , порожденная перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n - 2 & 2n - 1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

действует на множестве склеек диаграмм из \mathfrak{S}_n^O как **сопряжение**, а именно:

диаграммы $D_1(\alpha_1)$ и $D_2(\alpha_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует $\gamma \in C_{2n}^*$ такая, что $\alpha_1 = \gamma^{-1} \circ \alpha_2 \circ \gamma$.

С действием диэдральной группы на различных классах хордовых n -диаграмм (на классах соответствующих склеек) можно ознакомиться, например, в работах [3], [13], [2].

3 Исчисление топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на 2-сфере

Как было отмечено ранее, для функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ полным топологическим инвариантом является 2-цветная O -диаграмма с $n = 2g - 1 + M + m$ хордами, которая содержит M черных (белых) и m белых (черных) циклов.

Обозначим через $\mathfrak{S}_{M,m}^n$ класс 2-цветных диаграмм указанного типа.

Тогда, как следует из работ [4] и [11], имеют место утверждения

Теорема А Число O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ равно числу неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{M,m}^n$.

Теорема В Число топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ равно числу неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{M,m}^n$.

Очевидно, что для функций из класса $C_{M,m}(S^2)$ (на двумерной сфере S^2) полным топологическим инвариантом является 2-цветная O -диаграмма с $n = M + m - 1$ хордами, которая содержит точно M черных (белых) и m белых (черных) циклов. С учетом формулы (1), род такой диаграммы равен нулю. Поэтому функциям из класса $C_{M,m}(S^2)$ соответствуют именно планарные 2-цветные O -диаграммы.

Таким образом, если через $C_{k,n-k+1}(S^2)$ обозначить класс гладких функций на 2-сфере, у которых кроме k локальных максимумов и $n - k + 1$ локальных минимумов только одна вырожденная критическая точка типа седло (индекс Пуанкаре которой равен $1 - n$), то имеют место утверждения

Предложение 1 Число O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ равно числу неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Предложение 2 Число топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ равно числу неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Пример 1 Среди неизоморфных диаграмм, приведенных на рис. 2:

1 из класса $\mathfrak{S}_{1,4}$, 2 из класса $\mathfrak{S}_{2,4}$, 2 из класса $\mathfrak{S}_{3,4}$, 1 из класса $\mathfrak{S}_{4,4}$.

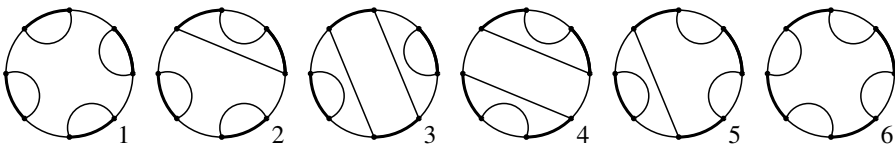


Рис. 2 все неизоморфные (неэквивалентные) 2-цветные планарные диаграммы $n = 4$

Таким образом, существует 2 топологически неэквивалентные функции из класса $C_{2,3}(S^2)$, 2 – из класса $C_{3,2}(S^2)$, 1 из $C_{1,4}(S^2)$ и 1 из $C_{4,1}(S^2)$.

4 Диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ и «non-crossing partition»

Определение 6 Разбиением $\pi_{k,n}$ множества $[n] = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ (partition of $[n]$ with k blocks) называют совокупность k непустых, попарно не пересекающихся подмножеств $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ множества $[n]$, объединение которых есть $[n]$. Подмножества π_i принято называть блоками $\pi_{k,n}$.

Разбиение $\pi_{k,n}$ зачастую представляют в виде $\pi = \pi_1/\pi_2/\dots/\pi_k$. Причем, принято считать, что внутри каждого блока элементы расположены в порядке возрастания, а сами блоки расположены в порядке возрастания их минимальных элементов (напр. [7]).

Определение 7 Разбиение называют «без самопересечений» (non-crossing partition) или же, коротко, планарным, если не существует элементов $a < b < c < d$ таких, что a и c содержатся в одном, a и d в другом блоке. Множество всех таких разбиений обозначим как $NCP(n)$, а подмножество разбиений, содержащих точно k блоков, — через $NCP_{k,n}$.

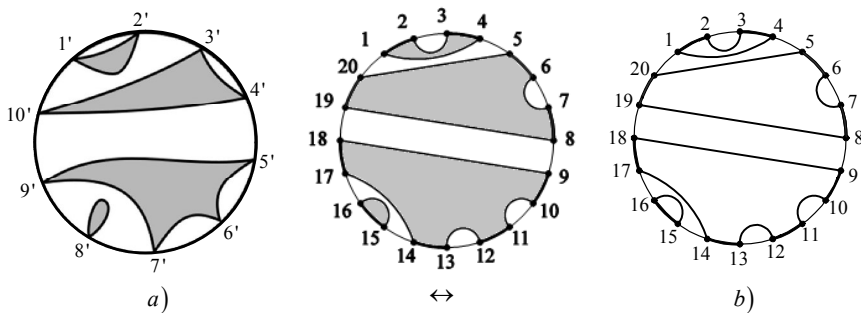


Рис. 3 а) представление планарного разбиения $\pi = (1, 2)(3, 4, 10)(5, 6, 7, 9)(8)$ в виде круговой диаграммы с 10 вершинами; б) 2-цветная O -диаграмма рода 0 (построенная на 2-цветном $2n$ -шаблоне, $n = 10$), соответствующая разбиению π

В виду биективности, которая очевидным образом возникает между разбиениями из множества $NCP_{k,n}$ и диаграммами из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, 2-цветную планарную диаграмму и соответствующее ей разбиение в дальнейшем будем отождествлять.

Более того, число неизоморфных (а также неэквивалентных) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ равно числу неизоморфных (соответственно неэквивалентных) круговых диаграмм, отвечающих разбиениям из множества $NCP_{k,n}$. Причем в понятие изоморфности (эквивалентности) последних вкладывается такой же смысл как и для 2-цветных диаграмм (напр. [2]).

5 Перечисление диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$

Введем следующие обозначения:

$P(n; k)$ – число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, то есть $P(n; k) = |\mathfrak{S}_{k,n}| = |NCP_{k,n}|$;

$P^*(n; k)$ – число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$;

$P^{**}(n; k)$ – число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Известно, например из [8], что $|NCP_{k,n}|$ равна числу Нараяна $N(n; k)$ («Narayana number»), которое определяется по формуле

$$N(n; k) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}. \quad (2)$$

Так как $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $N(n; 1) = N(n; n) = 1$, то

$$P^*(n; 1) = P^*(n; n) = 1, \quad (3)$$

$$P^{**}(n; 1) = P^{**}(n; n) = 1. \quad (4)$$

Более того, так как

$$N(n; k) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} = \frac{1}{n} C_n^{n-k+1} \cdot C_n^{n-k} = N(n; n-k+1), \quad (5)$$

то для натуральных $n \geq k \geq 2$ имеют место и соотношения

$$P^*(n; k) = P^*(n; n-k+1), \quad (6)$$

$$P^{**}(n; k) = P^{**}(n; n-k+1). \quad (7)$$

5.1 Число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$

Лемма 1 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число неизоморфных (неэквивалентных относительно действия циклической группы порядка n) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^*(n; k) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} + \sum_{j|(n;k), j \neq 1} \varphi(j) \left(\frac{n-k}{j} + 1 \right) \frac{1}{\frac{n}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}-1} + \sum_{j|(n;k-1), j \neq 1} \varphi(j) \left(\frac{k-1}{j} + 1 \right) \frac{1}{\frac{n}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}+1} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}} \right), \quad (8)$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера (количество натуральных чисел, не превосходящих q и взаимно простых с ним); $(s; t)$ – наибольший общий делитель чисел s и t ; а суммирование во втором и третьем слагаемых ведется по всем делителям (исключая 1-цу) чисел $(n; k)$ и $(n; k-1)$ соответственно.

Замечание 1 Учитывая (5), соотношение (8) можно представить в виде

$$P^*(n; k) = \frac{1}{n} \left(N(n; k) + \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \left(\frac{n-k}{j} + 1 \right) \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{n-k}{j} + 1\right) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \left(\frac{k-1}{j} + 1 \right) \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{k-1}{j} + 1\right) \right). \quad (9)$$

Доказательство Все диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, которые инвариантны относительно поворота на некоторый угол $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$, $j \neq 1$ («самосовмещаются» при повороте около центра шаблона на угол ω_j в направлении движения часовой стрелки) разобьем на диаграммы двух типов.

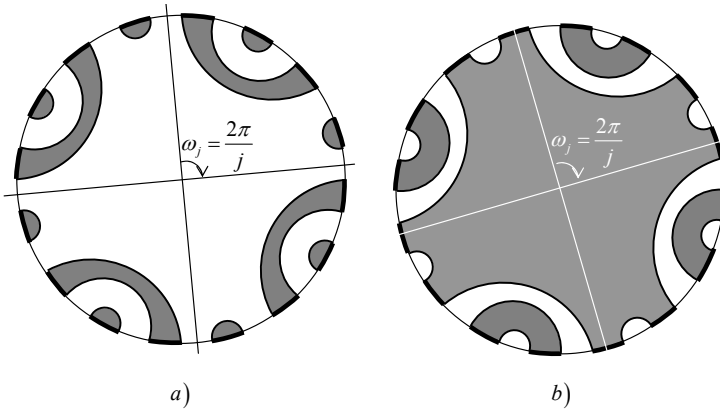


Рис. 4 а) планарная 16-диаграмма I типа; б) планарная 16-диаграмма II типа

I типа – те, которые не содержат черного цикла («черного полигона»), инвариантного относительно поворота на некоторый угол. Очевидно, что в этом случае число j должно быть общим делителем чисел n и k – рис. 1 а).

II типа – те, которые содержат черный цикл («черный полигон»), инвариантный относительно поворота на некоторый угол. Очевидно, что в этом случае число j должно быть общим делителем чисел n и $k - 1$ – рис. 1 б).

Тогда, применяя лемму Бернсайда, величину $P^*(n; k)$ можно представить в виде

$$P^*(n; k) = \frac{1}{n} \left(N(n; k) + \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; k; j) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; k; j) \right), \quad (10)$$

где $\rho_1(n; k; j)$, $\rho_2(n; k; j)$ — число диаграмм I и II типа соответственно, которые инвариантны относительно поворота на угол ω_j ($j \neq 1$).

Так как $N(n; k) = N(n; n - k + 1)$, $P^*(n; k) = P^*(n; n - k + 1)$, то с учетом того факта, что для произвольных натуральных $a > b$ справедливо равенство $(a; b) = (a; a - b)$, имеем

$$\begin{aligned} n \cdot P^*(n; k) &= N(n; k) + \\ &+ \left(\sum_{j|(n;k), j \neq 1} \phi(j) \rho_1(n; k; j) + \sum_{j|(n;k-1), j \neq 1} \phi(j) \rho_2(n; k; j) \right) = \quad (11) \\ &= n \cdot P^*(n; n - k + 1) = N(n; n - k + 1) + \\ &+ \left(\sum_{\substack{j|(n;n-k+1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; n - k + 1; j) + \sum_{\substack{j|(n;n-k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; n - k + 1; j) \right) = \\ &= N(n; k) + \left(\sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; n - k + 1; j) + \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; n - k + 1; j) \right) \quad (12) \end{aligned}$$

Из соотношений (11) и (12) получаем равенство

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; k; j) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; k; j) = \\ &= \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; n - k + 1; j) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; n - k + 1; j), \quad (13) \end{aligned}$$

которое позволяет выдвинуть гипотезу о том, что при (допустимых) фиксированных n, k, j величины $\rho_1(n; k; j)$ и $\rho_2(n; n - k + 1; j)$, а также $\rho_2(n; k; j)$ и $\rho_1(n; n - k + 1; j)$ совпадают.

Убедимся в справедливости выдвинутой гипотезы.

С учетом введенной терминологии и обозначений, величина $\rho_1(n; k; j)$ определяет число всех тех диаграмм (из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$), которые инвариантны относительно поворота на угол $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$ и не содержат черного цикла («черного полигона»), инвариантного относительно поворота на угол ω_j . Но тогда каждая такая диаграмма (с k черными и $n - k + 1$ белыми циклами) содержит белый цикл («белый полигон»), инвариантный относительно поворота на угол ω_j .

Если черные дуги перекрасить в белый цвет, а белые дуги — в черный цвет, то каждая из упомянутых выше диаграмм будет

- инвариантной относительно поворота на такой же угол ω_j ;
- содержать $n - k + 1$ черных циклов, среди которых один черный цикл («черный полигон»), инвариантный относительно поворота на угол ω_j .

Тогда очевидно, что при фиксированных n, k, j выполняется равенство

$$\rho_1(n; k; j) = \rho_2(n; n - k + 1; j), \quad (14)$$

а, с учетом (13), — и равенство

$$\rho_2(n; k; j) = \rho_1(n; n - k + 1; j). \quad (15)$$

Таким образом, если $\rho_1(n; k; j)$ обозначить как $\rho(n; k; j)$, то, с учетом (14) и (15), имеет место равенство

$$\rho_2(n; k; j) = \rho(n; n - k + 1; j). \quad (16)$$

И поэтому доказательство леммы сводится к доказательству того факта, что число $\rho_1(n; k; j)$ (всех) диаграмм I типа, инвариантных относительно поворота на угол ω_j (неподвижных относительно действия соответствующего элемента циклической группы), можно вычислить по формуле

$$\rho_1(n; k; j) = \left(\frac{n - k}{j} + 1 \right) \frac{1}{n} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j} - 1}. \quad (17)$$

В работе [10] (Theorem 7.2) установлено, что при $j \geq 2$ число $[N(n; k')]$ разбиений из класса $NCP_{k,n}$, которые имеют ранг k' (в наших терминах $k = n - k'$ блоков) и являются инвариантными относительно поворота на угол $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$, можно вычислить по формуле

$$[N(n; k')] = \frac{n - k'}{n} \cdot \left(C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k'}{j}} \right)^2. \quad (18)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_1(n; k; j) &= [N(n; n - k)] = \frac{n - (n - k)}{n} \cdot \left(C_{\frac{n}{j}}^{\frac{n-k}{j}} \right)^2 = \frac{k}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{n-k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{n-k}{j}} = \\ &= \frac{k}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} = \frac{k}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot \frac{\frac{n-k}{j} + 1}{\frac{k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j} - 1} = \left(\frac{n - k}{j} + 1 \right) \cdot \frac{1}{n} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j} - 1}. \end{aligned}$$

Следствие 1 Для произвольного простого n число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить посредством соотношений

$$P^*(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} C_n^k C_n^{k-1} + \frac{n-1}{n}, & k = 1; n \\ \frac{1}{n^2} C_n^k C_n^{k-1}, & k \neq 1; n. \end{cases} \quad (19)$$

Замечание 2 Следует отметить, что начальные значения величины $P^*(n, k)$ для натуральных $1 \leq k \leq n \leq 9$ совпадают с членами последовательности A209805 («Triangle read by rows: $T(n, k)$ is the number of k -block noncrossing partitions of n -set up to rotations») [10], полученных автором (Tilman Piesk, March 10 2012) программным путем.

Кроме того, с учетом результатов работы [2], имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^n P^*(n, k) = p_n^* = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} C_{2n}^n + \sum_{\substack{1 \leq i < n, \\ i|n}} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) C_{2i}^i \right), \quad (20)$$

где p_n^* — число неизоморфных разбиений из класса $NCP(n)$, или, что то же, — число неизоморфных 2-цветных планарных n -диаграмм.

5.2 Число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$

Применяя лемму Бернсайда, число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^{**}(n, k) = \frac{1}{2} \left(P^*(n, k) + \frac{1}{n} \cdot P_{n,k}^{sim} \right), \quad (21)$$

где $P_{n,k}^{sim}$ — число тех диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, которые являются симметричными относительно хотя бы одной из n различных осей симметрии 2-цветного $2n$ -шаблона. Причем

$$P_{n,k}^{sim} = \begin{cases} n \cdot p_0(n, k), & n = 2m \pm 1 \\ \frac{n}{2} \cdot (p_1(n, k) + p_2(n, k)), & n = 2m, \end{cases}$$

где $p_0(n, k)$ — число диаграмм из $\mathfrak{S}_{k,n}$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии, проходящей через середины диаметрально-противоположных черной и белой дуг 2-цветного $2n$ -шаблона;

$p_1(n, k)$ ($p_2(n, k)$) — число диаграмм из $\mathfrak{S}_{k,n}$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии, проходящей через середины диаметрально-противоположных черных (соответственно белых) дуг $2n$ -шаблона.

Хорошо известно (напр. из [8]), что существует биективное соответствие между элементами множества $NCP_{k,n}$ (а потому и $\mathfrak{S}_{k,n}$) и элементами множества, известными как «Dyck n -paths with exactly k peaks». Как следует из работ [1] и [2], величина $T(n, k) = \frac{1}{n} \cdot P_{n,k}^{sim}$ совпадает с числом объектов, именуемых как «symmetric Dyck paths of semi-length n with k peaks»

(последовательность A088855 в [10]). Более того, в работе [1] (Example 37) показано, что

$$T(n, k) = C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \cdot C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}, \quad (22)$$

где $[q]$ — целая часть числа q (определяемая как наибольшее целое, меньшее или равное q); $\lceil q \rceil$ — функция «потолок», определяемая как наименьшее целое, большее или равное q .

С учетом соотношений (21) и (22), имеет место

Лемма 2 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число неэквивалентных (относительно действия диэдральной группы порядка $2n$) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^{**}(n, k) = \frac{1}{2} \left(P^*(n, k) + C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \cdot C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \right), \quad (23)$$

где $\lfloor q \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq q\}$, $\lceil q \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq q\}$, а $P^*(n, k)$ определяется по формуле (8).

Заметим, что начальные значения величины $P^{**}(n, k)$ совпадают с членами последовательности A209612 [10].

Результаты и выводы

На основании Предложений 1 и 2, Леммы 1 и Леммы 2 имеют место основные результаты работы

Теорема 1 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ можно вычислить с помощью формулы (8).

Теорема 2 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ можно вычислить с помощью формулы (23).

Начальные значения числа O -топологически и топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ для натуральных $2 \leq k \leq n \leq 18$ приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Кроме того, в представленной статье впервые приводится решение задачи (более известной под названием) «Enumeration of non-crossing partitions of $[n]$ with k blocks under rotation and reflection», результаты которой были анонсированы в материалах «XV международной научной конференции им. академика Михаила Кравчука» и международной конференции «Геометрия в Одессе – 2014».

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1																
3	1	1															
4	2	2	1														
5	2	4	2	1													
6	3	10	10	3	1												
7	3	15	25	15	3	1											
8	4	26	64	64	26	4	1										
9	4	38	132	196	132	38	4	1									
10	5	56	256	536	536	256	56	5	1								
11	5	75	450	1260	1764	1260	450	75	5	1							
12	6	104	765	2736	5102	5102	2736	765	104	6	1						
13	6	132	1210	5445	13068	17424	13068	5445	1210	132	6	1					
14	7	172	1868	10247	30711	52634	52634	30711	10247	1868	172	7	1				
15	7	213	2763	18219	66807	143151	184041	143151	66807	18219	2763	213	7	1			
16	8	266	3994	31092	136710	357980	575284	575284	357980	136710	31092	3994	266	8	1		
17	8	320	5600	50960	264992	832832	1635920	2044900	1635920	832832	264992	50960	5600	320	8	1	
18	9	390	7726	80976	491054	1823676	4298400	6566914	6566914	4298400	1823676	491054	80976	7726	390	9	1

Таблица 1: начальные значения числа *O-топологически* неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$, $2 \leq k \leq n \leq 18$

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1																
3	1	1															
4	2	2	1														
5	2	4	2	1													
6	3	8	8	3	1												
7	3	12	17	12	3	1											
8	4	19	41	41	19	4	1										
9	4	27	78	116	78	27	4	1									
10	5	38	148	298	298	148	38	5	1								
11	5	50	250	680	932	680	250	50	5	1							
12	6	67	420	1443	2651	2651	1443	420	67	6	1						
13	6	84	650	2835	6684	8912	6684	2835	650	84	6	1					
14	7	107	997	5281	15618	26667	26667	15618	5281	997	107	7	1				
15	7	131	1455	9330	33771	72188	92633	72188	33771	9330	1455	131	7	1			
16	8	161	2095	15840	68943	179970	288867	288867	179970	68943	15840	2095	161	8	1		
17	8	192	2912	25872	133280	417984	819920	1024900	819920	417984	133280	25872	2912	192	8	1	
18	9	231	4007	40992	246703	914190	2152728	3287867	3287867	2152728	914190	246703	40992	4007	231	9	1

Таблица 2: начальные значения числа *топологически* неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$, $2 \leq k \leq n \leq 18$

Список литературы

1. Barry P. *On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles* // Journal of Integer Sequences. – 2006. – V. 9, № 2. – Article 06.2.4, 34 pp. (electronic)
2. Callan D. *Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection* / D. Callan, L. Smiley // <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447>, 2005.
3. Cori R. *Counting non-isomorphic chord diagrams* / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. – 1998. – V. 204 Issue 1-2. – P. 55–73.
4. Kadubovsky A. *Classification of O -topologically non-equivalent function with color chord diagrams* / A. Kadubovsky, A. Klimchuk // Method of functional analysis and topology. – 2004. – Vol. 10, №3. – P. 23–32.
5. Prishlyak A. O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface* / A.O. Prishlyak // Topology and its Applications. – 2002. – Vol. 119, № 3. – P. 257–267.
6. Reiner V. *The Cyclic Sieving Phenomenon* / V. Reiner, D. Stanton, D. White // Journal of Combinatorial Theory, Series A 108. – 2004. – P. 17–50.
7. Simion R. *Noncrossing partitions* / R. Simion // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol. 217. – P. 367–409.
8. Stanley R. *Enumerative combinatorics* // Volume 2, Cambridge Univ. Press, New York, 1999.
9. Stanley R. *Catalan Addendum*// 6 June, 2010.
10. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
11. Кадубовський О. *Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях* / О. Кадубовський // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343–351.
12. Кадубовський О. *Про один клас хордових діаграм максимального роду* / О. Кадубовський // Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17–27.
13. Кадубовський О. А. *Двокольорові O - і N -діаграми* / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 10, Том I. – С. 41–50.
14. Кадубовський О. А. *Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері* / О.А. Кадубовський // Геометрія та топологія функцій: Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т 7, № 4, 2010. – С. 87–107.
15. Кадубовський О. А. *Про один клас гладких функцій на двовимірній сфері* / О.А. Кадубовський // Вісник СДПУ. Математика. – Слов'янськ: СДПУ. – Вип. 1(4), 2010. – С. 39–57.
16. Кадубовський О. А. *Двокольорові хордові O -діаграми мінімального роду* / О.А. Кадубовський, Ю.В. Гладичук // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. – 2011. – Вип. 1. – С. 49–60.
17. Кадубовський О. А. *Двокольорові хордові O -діаграми мінімального роду з $k = 9$ циклами певного кольору* / О.А. Кадубовський, К.В. Хабарова, Ю.В. Сапсай // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – 2014. – Вип. 4. – С. 69–84.
18. Шарко В. В. *Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхности* / В.В. Шарко // Український математичний журнал. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 687–700.

Александр Анатольевич Кадубовский

ДГПУ, Славянск, Украина

E-mail: kadubovs@ukr.net

Aleksandr An. Kadubovskiy

Donbass State Teachers' Training University, Slavyansk, Ukraine.

On the number of topologically non-equivalent functions with one degenerate saddle critical point on two-dimensional sphere, II

In this paper we consider the smooth functions with three critical values on two-dimensional sphere S^2 , that possess only one (degenerate) saddle critical point in addition to M local maxima and m local minima. For any natural M and m we calculate the number of topologically non-equivalent such functions.