DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50160
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(1) 63–73 $d\omega$

4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий

Ирина Николаевна Курбатова

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений римановых пространств с почти и полукватернионной структурой.

Ключевые слова Келерово пространство, кватернионная структура.

УДК 517.764

1 Введение.

В современной дифференциальной геометрии интенсивно изучаются различные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств и голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий.

Напомним, что геодезическое отображение одного пространства аффинной связности A_n на другое $\overline{A}_n$ определяется как взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором образом каждой геодезической линии A_n является геодезическая линия $\overline{A}_n$.

Если на римановом пространстве определена ковариантно постоянная почти комплексная структура, согласованная с метрикой , его называют келеровым [1]. Теорема Яно-Вестлейка [2] утверждает, что геодезическое отображение келерова пространства на келерово с сохранением комплексной структуры является тривиальным. Поэтому для келеровых пространств вводят более общие, так называемые голоморфно проективные отображения, введенные Т.Оцуки и Я.Тасиро [3]. Обстоятельное изложение результатов, полученных в теории геодезических и голоморфно проективных отображений, содержится в [2],[4]. Еще одно из направлений современной дифференциальной геометрии - теория дифференцируемых многообразий, снабженных различными геометрическими структурами, в частности, алгебраическими, то есть изоморфно предсталяющими некоторую алгебру [5],[6]. Объединяет эти направления теория диффеоморфизмов многообразий с различными аффинорными структурами, таких, например, как квази-геодезические, почти геодезические, тригеодезические, p-геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.

В [7] Синюковым Н.С. и Й.Микешем были введены в рассмотрение квазипланарные отображения, представляющие собой весьма широкое обобщение геодезических и голоморфно-проективных отображений пространств аффинной связности без кручения с произвольной аффинорной структурой.

Отметим, что во всех вышеуказанных отображениях многообразия были наделены лишь одной аффинорной структурой определенного типа.

Мы исследуем отображения пространств аффинной связности без кручения с почти и полукватернионной структурой, которые называем 4-квазипланарными [8].

Как известно, почти кватернионным пространством [1] называется дифференцируемое многообразие X_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые наряду с

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h + \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что тензор

$$\overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h,$$

также определяет почти комплексную структуру. При этом связь между $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h &= -\overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = \overset{3}{F}{}_i^h,\\
\overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h &= -\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = \overset{1}{F}{}_i^h,\\
\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h &= -\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \overset{2}{F}{}_i^h.
\end{aligned} \tag{3}$$

Любые две из трех определяют исходную почти кватернионную структуру на X_n.

Почти кватернионная структура на пространстве аффинной связности A_n с объектом связности Γ называется келеровой [1], если каждая из образующих аффинорных структур - келерова, то есть

$$\overset{s}{F}{}^h_{i,j} = 0, \quad s = 1, 2, 3,$$

где $<,>$ - знак ковариантной производной по связности Γ.

Почти кватернионную структуру на римановом пространстве V_n с метрическим тензором g_{ij} чаще всего согласовывают в виде

$$g_{\alpha\beta}\overset{s}{F}{}^\alpha_i \overset{s}{F}{}^\beta_j = g_{ij}, \quad s = 1, 2, 3, \tag{4}$$

или, что то же,

$$g_{i\alpha}\overset{s}{F}{}^\alpha_j = -g_{j\alpha}\overset{s}{F}{}^\alpha_i, \quad s = 1, 2, 3. \tag{5}$$

2 4-квазипланарные отображения пространств аффинной связности с почти кватернионной структурой.

1°. Рассмотрим пару пространств аффинной связности без кручения A_n, $\overline{A}_n$ с объектами связности Γ, $\overline{\Gamma}$ и почти кватернионными структурами $(\overset{1}{F}, \overset{2}{F})$, $(\overset{1}{\overline{F}}, \overset{2}{\overline{F}})$, соответственно.

Назовем 4-*квазипланарным отображением* $f : A_n \to \overline{A}_n$ *(4КПО), сохраняющим почти кватернионную структуру* [8], взаимно однозначное отображение между их точками, при котором в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеет место зависимость

$$\overline{\Gamma}{}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x)\overset{s}{F}{}^h_{j)}(x), \tag{6}$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}^h_i = \delta^h_i, \quad \overset{3}{F}{}^h_i = \overset{1}{F}{}^\alpha_i \overset{2}{F}{}^h_\alpha, \quad \overset{s}{F}{}^h_i(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}^h_i(x),$$

$\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы. Нетрудно видеть, что при отображениях (6) сохраняются кривые вида

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \ldots n,$$

вдоль которых выполняются дифференциальные уравнения

$$\lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{a}(t)\overset{s}{F}{}^h_\alpha,$$

$$\lambda^h = \frac{dx^h}{dt},$$

где $\overset{s}{a}(t)$ - некоторые функции параметра t, $<,>$ - знак ковариантной производной по связности Γ. Эти кривые представляют собой аналог геодезических линий пространств аффинной связности и аналитически планарных кривых почти комплексных многообразий.

2°. Рассмотрим пару римановых почти кватернионных пространств (V_n, g_{ij}), $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в 4КПО, сохраняющем почти кватернионную структуру. Предположим, что лишь одна из почти комплексных структур, скажем $\overset{1}{F}$, абсолютно параллельна в $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, то есть

$$\overset{1}{F}{}^h_{i|j} = 0,$$

где $<\,|\,>$ - знак ковариантной производной по связности $\overline{\Gamma}$.

Из (6) следует, что в этом случае

$$\begin{aligned}\overset{1}{F}{}^h_{i,j} + \delta^h_j(\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i + \overset{1}{q}_i) + \overset{1}{F}{}^h_j(\overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i - \overset{\circ}{q}_i) + \overset{2}{F}{}^h_j(\overset{2}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i - \overset{3}{q}_i) + \\ + \overset{3}{F}{}^h_j(\overset{3}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i + \overset{2}{q}_i) - 2\overset{3}{q}_j \overset{2}{F}{}^h_i + 2\overset{2}{q}_j \overset{3}{F}{}^h_i = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Опуская здесь индекс h в V_n и симметрируя по индексам h, i, получаем

$$\begin{aligned}g_{j(h}(\overset{\circ}{q}_{|\alpha|} \overset{1}{F}{}^\alpha_{i)} + \overset{1}{q}_{i)}) - \overset{1}{F}_{j(h}(\overset{1}{q}_{|\alpha|} \overset{1}{F}{}^\alpha_{i)} - \overset{\circ}{q}_{i)}) - \\ - \overset{2}{F}_{j(h}(\overset{2}{q}_{|\alpha|} \overset{1}{F}{}^\alpha_{i)} - \overset{3}{q}_{i)}) - \overset{3}{F}_{j(h}(\overset{3}{q}_{|\alpha|} \overset{1}{F}{}^\alpha_{i)} + \overset{2}{q}_{i)}) = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

После свертывания этих соотношений с g^{hj} по индексам h, j оказывается, что

$$\overset{\circ}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i + \overset{1}{q}_i = 0. \tag{9}$$

Тогда из (8) с учетом (9), (1), (3), (5) имеем

$$\overset{2}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i - \overset{3}{q}_i = 0. \tag{10}$$

Таким образом, из (9), (10), (7) следует, что если при 4КПО римановых пространств V_n, $\overline{V}_n$ с сохранением почти кватернионной структуры аффинор $\overset{1}{F}$ в $\overline{V}_n$ определяет келерову структуру, то в V_n на него возникают условия дифференциального характера вида

$$\overset{1}{F}{}^h_{i,j} = 2\overset{3}{q}_j \overset{2}{F}{}^h_i - 2\overset{2}{q}_j \overset{3}{F}{}^h_i.$$

Отсюда легко видеть, что если вV_n аффинор $\overset{1}{F}$ также абсолютно параллелен, то по необходимости

$$\overset{3}{q}_j = \overset{2}{q}_j = 0.$$

В этом случае 4КПО (6) вырождается в $\overset{1}{F}$-планарное [7]:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \sum_{s=0}^{1} \overset{s}{q}_{(i}(x)\overset{s}{F}{}^h_{j)}(x).$$

Если к тому же потребовать, чтобы $\overset{2}{F}$ (а следовательно и $\overset{3}{F}$) было ковариантно постоянно в V_n и $\overline{V}_n$, то рассуждения, аналогичные предыдущим, дадут нам

$$\overset{\circ}{q}_j = \overset{1}{q}_j = \overset{2}{q}_j = \overset{3}{q}_j = 0,$$

т.е. 4КПО келеровых кватернионных многообразий выродится в аффинное

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x).$$

Логично считать все эти варианты тривиальными с точки зрения 4КПО почти кватернионных многообразий.

Итак, нами доказана

Теорема 1 *4КПО почти кватернионных пространств $V_n \longrightarrow \overline{V}_n$ с сохранением структуры при условии абсолютной параллельности хотя бы одного из структурных аффиноров $\overset{s}{F}$, $s = 1, 2, 3$, в V_n и $\overline{V}_n$ тривиально.*

В силу доказанной теоремы, при изучении 4КПО имеет смысл рассматривать дифференциальные условия более общего характера, чем ковариантное постоянство аффиноров почти кватернионной структуры. В [8], [9] мы пошли по этому пути и исследовали 4КПО так называемых Q^*-пространств.

3 Понятие полукватернионной структуры.

Введем в рассмотрение структуру, которая порождается парой почти комплексных структур, коммутирующих между собой. Назовем ее *полукватернионной*. Соответственно, назовем *почти полукватернионным* риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые наряду с

$$\overset{1}{F}{}^\alpha_i \overset{1}{F}{}^h_\alpha = -\delta^h_i, \quad \overset{2}{F}{}^\alpha_i \overset{2}{F}{}^h_\alpha = -\delta^h_i \tag{11}$$

удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h - \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0. \tag{12}$$

Тензор

$$\overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h,$$

очевидно, определяет структуру почти произведения [4]:

$$\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \delta_i^h. \tag{13}$$

Связь между $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h &= \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = \overset{3}{F}{}_i^h, \\ \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h &= -\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\overset{1}{F}{}_i^h, \\ \overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h &= \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = -\overset{2}{F}{}_i^h. \end{aligned} \tag{14}$$

В качестве примера такой структуры может служить тройка аффиноров с компонентами

$$(\overset{1}{F}{}_i^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_k \\ E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\overset{2}{F}{}_i^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E_k \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & -E_k & 0 & 0 \\ -E_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\overset{3}{F}{}_i^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ 0 & 0 & E_k & 0 \end{pmatrix},$$

В дальнейшем полагаем, что аффиноры $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$ на V_n определяют почти эрмитову структуру [1], то есть

$$\overset{1}{F}{}_{ij} = -\overset{1}{F}{}_{ji}, \qquad \overset{2}{F}{}_{ij} = -\overset{2}{F}{}_{ji}, \qquad \overset{1}{F}{}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{1}{F}{}_j^\alpha, \qquad \overset{2}{F}{}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{2}{F}{}_j^\alpha. \tag{15}$$

Тогда из (14) по необходимости следует

$$\overset{3}{F}{}_{ij} = \overset{3}{F}{}_{ji}, \qquad \overset{3}{F}{}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{3}{F}{}_j^\alpha. \tag{16}$$

Как обычно, под келеровой будем понимать полукватернионную структуру на V_n, для которой

$$\overset{s}{F}{}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

4 4КПО полукватернионных келеровых пространств.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}$, $\overset{s}{\overline{F}}$, $s = 1, 2, 3$, находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место (6) при условиях (11)-(16). Кроме того, в V_n и $\overline{V}_n$ выполняются соотношения

$$\overset{s}{F}{}^h_{i,j} = 0, \qquad \overset{s}{F}{}^h_{i|j} = 0, \quad s = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Из зависимости между ковариантными производными $\overset{s}{F}$ в V_n и $\overline{V}_n$ с учетом (6) и (11)-(17) аналогично тому, как это делалось выше, находим :

$$\overset{\circ}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F}{}^\alpha_i = \overset{2}{q}_\alpha \overset{2}{F}{}^\alpha_i = \overset{3}{q}_\alpha \overset{3}{F}{}^\alpha_i. \tag{18}$$

при $\overset{3}{F}{}^\alpha_\alpha \neq \pm n$.

Заметим, что $\overset{3}{F}{}^\alpha_\alpha = \pm n$ соответствует $\overset{3}{F}{}^h_i = \pm\delta^h_i$ и, следовательно, $\overset{1}{F}{}^h_i = \pm\overset{2}{F}{}^h_i$. Таким образом, при $\overset{3}{F}{}^\alpha_\alpha = \pm n$ полукватернионная келерова структура вырождается в классическую келерову [1].

5 Структурные особенности 4КПО полукватернионных келеровых пространств.

1°. Ввиду $\overset{3}{F}{}^h_{i,j} = 0$ аффинорная структура $\overset{3}{F}{}^h_i$ интегрируема [4],поэтому в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, называемую адаптированной (к аффинору), в которой аффинор приводится к виду:

$$(\overset{3}{F}{}^h_i) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

то есть

$$\overset{3}{F}{}^a_b = \delta^a_b, \qquad \overset{3}{F}{}^A_B = \delta^A_B, \qquad \overset{3}{F}{}^A_b = \overset{3}{F}{}^a_B = 0, \tag{20}$$

$a, b = 1, 2, \ldots, m; A, B = m + 1, m + 2, \ldots, n.$

В адаптированной системе координат ввиду (16) приобретает специфику и матрица метрического тензора:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix},$$

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50160

где $G_1 = {G_1}^T$, $G_2 = {G_2}^T$,то есть

$$g_{ab}(x) = g_{ba}(x); \qquad g_{AB}(x) = g_{BA}(x); \qquad g_{aB}(x) = 0.$$

Из (17) следует, что в адаптированной системе координат для символов Кристоффеля второго рода имеем:

$$\Gamma^A_{bc} = \Gamma^A_{Bc} = \Gamma^a_{BC} = \Gamma^a_{Bc} = 0.$$

Это, в свою очередь, приводит к тому, что

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c); \qquad g_{AB} = g_{AB}(x^C); \qquad g_{aB}(x) = 0, \tag{21}$$

то есть V_n - приводимо [4].

Нами доказана

Теорема 2 *Полукватернионное келерово пространство по необходимости приводимо.*

2°. Нетрудно видеть, что вследствие (17) образ полукватернионного келерова пространства при 4КПО также приводим и в адаптированной системе координат, общей по отображению,

$$\overline{g}_{ab} = \overline{g}_{ab}(x^c); \qquad \overline{g}_{AB} = \overline{g}_{AB}(x^C); \qquad \overline{g}_{aB}(x) = 0.$$

Соотношения (14),(15),(18), записанные в адаптированной системе координат, дают нам

$$\overset{1}{F}{}^a_B = \overset{1}{F}{}^A_b = 0, \qquad \overset{2}{F}{}^a_B = \overset{2}{F}{}^A_b = 0, \qquad \overset{2}{F}{}^a_b = -\overset{1}{F}{}^a_b, \qquad \overset{2}{F}{}^A_B = \overset{1}{F}{}^A_B, \tag{22}$$

$$(\overset{1}{q}_a, \overset{1}{q}_A) = (-\overset{\circ}{q}_b \overset{1}{F}{}^b_a, \overset{\circ}{q}_B \overset{1}{F}{}^B_A), \qquad (\overset{2}{q}_a, \overset{2}{q}_A) = (\overset{\circ}{q}_b \overset{1}{F}{}^b_a, -\overset{\circ}{q}_B \overset{1}{F}{}^B_A), \tag{23}$$

вследствие чего из основных уравнений 4КПО (6) находим:

$$\Gamma^A_{bc} = \Gamma^A_{Bc} = \Gamma^a_{Bc} = \Gamma^a_{BC} = 0 \qquad \overline{\Gamma}^A_{bc} = \overline{\Gamma}^A_{Bc} = \overline{\Gamma}^a_{Bc} = \overline{\Gamma}^a_{BC} = 0 \tag{24}$$

$$\overline{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + 2\overset{\circ}{q}_{(b}\delta^a_{c)} + 2\overset{1}{q}_{(b}\overset{1}{F}{}^a_{c)}, \tag{25}$$

$$\overline{\Gamma}^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} + 2\overset{\circ}{q}_{(B}\delta^A_{C)} + 2\overset{1}{q}_{(B}\overset{1}{F}{}^A_{C)} \tag{26}$$

Несложно проверить, что из (25),(17),(21),(22) следует

$$\overset{\circ}{q}_b = \overset{\circ}{q}_b(x^a), \qquad \overset{\circ}{q}_B = \overset{\circ}{q}_B(x^A), \qquad \overset{1}{F}{}^b_a = \overset{1}{F}{}^b_a(x^c), \qquad \overset{1}{F}{}^B_A = \overset{1}{F}{}^B_A(x^C)$$

Это означает, что полукватернионные келеровы пространства V_n и $\overline{V}_n$, находящиеся в 4КПО, представляют собой произведение $V_n = V_m \times V_{n-m}$, $\overline{V}_n = \overline{V}_m \times \overline{V}_{n-m}$, причем $V_m(x^a)$ и $\overline{V}_m(x^a)$ являются келеровыми относительно аффинора $\overset{1}{F}{}^a_b(x^c)$ и 4КПО $f : V_n \longrightarrow \overline{V}_n$ индуцирует HP-отображение $f_1 : V_m \longrightarrow \overline{V}_m$ с сохранением комплексной структуры $\overset{1}{F}{}^a_b$, соответствующее вектору $2\overset{\circ}{q}_b(x^a)$ [2].

Аналогично $V_{n-m}(x^A)$ и $\overline{V}_{n-m}(x^A)$ являются келеровыми относительно аффинора $\overset{1}{F}{}^B_A(x^C)$ и 4КПО $f : V_n \longrightarrow \overline{V}_n$ индуцирует HP-отображение $f_2 : V_{n-m} \longrightarrow \overline{V}_{n-m}$ с сохранением комплексной структуры $\overset{1}{F}{}^B_A$, соответствующее вектору $2\overset{\circ}{q}_B(x^A)$.

3°. Покажем, как можно сконструировать 4КПО.

Рассмтрим две пары келеровых пространств. Первая - (V_m, g_{ab}, F^a_b) и $(\overline{V}_m, \overline{g}_{ab}, \overline{F}^a_b)$, находящиеся в HP-отображении $f_1 : V_m \longrightarrow \overline{V}_m$ с сохранением комплексной структуры. Тогда в общей по отображению f_1 системе координат (x^c), $a, b, c = 1, 2, \dots m$ основные уравнения этого отображения имеют вид:

$$\overline{\Gamma}^a_{bc}(x^d) = \Gamma^a_{bc}(x^d) + \psi_{(b}(x^d)\delta^a_{c)} + \varphi_{(b}(x^d)F^a_{c)}(x^d), \tag{27}$$

где $\Gamma, \overline{\Gamma}$ - объекты римановой связности $V_m, \overline{V}_m$, соответственно; ψ_a, φ_a - некоторые ковекторы, причем $F^a_c = \overline{F}^a_c$,

$$F^a_c F^c_b = -\delta^a_b, \quad g_{ac}F^c_b = -g_{bc}F^c_a, \quad F^a_{b,c} = F^a_{b|c} = 0, \quad \varphi_a = -\psi_c F^c_a. \tag{28}$$

Вторая пара - келеровы (V_{n-m}, g_{AB}, F^A_B) и $(\overline{V}_{n-m}, \overline{g}_{AB}, \overline{F}^A_B)$, находящиеся в HP-отображении $f_2 : V_{n-m} \longrightarrow \overline{V}_{n-m}$ с сохранением комплексной структуры. Тогда в общей по отображению f_2 системе координат (x^C), $A, B, C = m+1, m+2, \dots n$ основные уравнения этого отображения имеют вид:

$$\overline{\Gamma}^A_{BC}(x^D) = \Gamma^A_{BC}(x^D) + \psi_{(B}(x^D)\delta^A_{C)} + \varphi_{(B}(x^D)F^A_{C)}(x^D), \tag{29}$$

где $\Gamma, \overline{\Gamma}$ - объекты римановой связности $V_{n-m}, \overline{V}_{n-m}$, соответственно; ψ_A, φ_A - некоторые ковекторы, причем $F^A_C = \overline{F}^A_C$,

$$F^A_C F^C_B = -\delta^A_B, \quad g_{AC}F^C_B = -g_{BC}F^C_A, \quad F^A_{B,C} = F^A_{B|C} = 0, \quad \varphi_A = -\psi_C F^C_A. \tag{30}$$

Построим $V_n = V_m \times V_{n-m}$ и $\overline{V}_n = \overline{V}_m \times \overline{V}_{n-m}$ с метрическими тензорами

$$(g_{ij}(x^k)) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & g_{AB} \end{pmatrix}, \quad (\overline{g}_{ij}(x^k)) = \begin{pmatrix} \overline{g}_{ab} & 0 \\ 0 & \overline{g}_{AB} \end{pmatrix},$$

$i, j, k = 1, 2, \dots n.$

Нетрудно проверить, что с учетом (27) - (30) зависимость между компонентами объектов римановой связности V_n и $\overline{V}_n$ будет иметь вид (6), где

$$\overset{1}{(F_i^h)} = \begin{pmatrix} -F_b^a & 0 \\ 0 & F_B^A \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{(F_i^h)} = \begin{pmatrix} F_b^a & 0 \\ 0 & F_B^A \end{pmatrix}, \quad \overset{3}{(F_i^h)} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$(\overset{\circ}{q}_i) = (\overset{\circ}{q}_a, \overset{\circ}{q}_A) = (\frac{1}{2}\psi_a(x^c), \frac{1}{2}\psi_A(x^C)), \quad \overset{\circ}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F_i^\alpha} = \overset{2}{q}_\alpha \overset{2}{F_i^\alpha} = \overset{3}{q}_\alpha \overset{3}{F_i^\alpha}.$$

При этом выполняются (11) - (17).

Итак, мы получили 4КПО келеровых полукватернионных пространств $f : (V_n, g_{ij}, \overset{s}{F_i^h}) \longrightarrow (\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overset{s}{F_i^h})$ с сохранением структуры.

Учитывая тот факт, что в теории НР-отображений келеровых пространств известно достаточно много классов келеровых пространств, допускающих нетривиальные НР-отображения, мы получаем эффективный способ конструирования полукватернионных келеровых пространств и их 4-квазипланарных отображений.

Список литературы

1. Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой // Итоги науки: Геометрия, 1963. М.: ВИНИТИ.1965 165–212.
2. J.Mikes, A.Vanzurova, I.Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations//Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
3. Otsuki, T.; Tashiro, Y. On curves in Kaehlerian spaces. J.Okayama Univ. 4, 57-78 (1954).
4. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств //М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
5. Широков А.П. Пространства над алгебрами и их применения// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения/ ВИНИТИ. М., 2002. Т.73. С.135-161.
6. Вишневский В.В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения/ ВИНИТИ. М., 2002. Т.73.С.5-64.
7. Микеш Й., Синюков Н.С. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности //Известия ВУЗов. Математика. 1983. No. 1. С. 55-61.
8. Курбатова И.Н. О 4-квазипланарных отображениях почти кватернионных многообразий // Известия ВУЗов. Математика .1986. No. 1. С. 75-78.
9. Курбатова И.Н. О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий // Мат.Студiї. - 2013. - Т.40, No. 1.- С. 95-103.

Ирина Николаевна Курбатова
ОНУ, Одесса, Украина
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50160

Irina N. Kurbatova

4-quasiplanar mappings of almost quaternion and semi-quaternion manifolds

We investigate special type mappings of Riemannian spaces with almost and semi-quaternion structure.