DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50164
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(1) 74–83 $d\omega$

Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств

Ирина Николаевна Курбатова, Ольга Тарасовна Сисюк

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений между римановыми пространствами с рекуррентно-параболической структурой.

Ключевые слова Риманово пространство, параболическая структура.

УДК 517.764

1 Введение.

1°. В 1968 году, исследуя проблему моделирования (в смысле поведения пробных частиц) физических полей, академик А.З. Петров пришел к задаче квази-геодезического отображения (КГО) римановых пространств V_4 сигнатуры Минковского [1].При этом движение свободной частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением частицы в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы типа Лоренца, то есть геодезические линии пространства V_4 переходят в так называемые квази-геодезические линии другого пространства $\overline{V}_4$, в результате чего, по выражению А.З. Петрова, «происходит перекачка энергии в силу». Им были получены и в некоторой мере исследованы основные уравнения КГО, которые в общей по отображению системе координат имеют вид:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)} + \varphi_{(i}(x)F^h_{j)}(x)$$

$$\overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \qquad \overline{F}_{ij}(x) = F^\alpha_j(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\overline{\Gamma}^h_{ij}, \Gamma^h_{ij}$ компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_4$ и V_4 с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F^h_i - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование.

КГО представляют собой широкое обобщение понятия геодезических отображений [2], теория которых уже давно является классическим разделом современной дифференциальной геометрии, и имеют существенное пересечение с другими известными ее обобщениями, такими как HP-отображения почти комплексных многообразий [3], отображения аффинносвязных и римановых пространств с сохранением комплекса геодезических [4], почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств [2], F-планарные отображения пространств аффинной связности [5].

Изучению КГО при некоторых дополнительных условиях посвящены работы [6]-[8]. Причем там уже понятие КГО обобщается на случай римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности, а также из определенных геометрических соображений накладывется требование, чтобы КГО $f : V_n \to \overline{V}_n$ удовлетворяло условию взаимности, т.е. обратное отображение $f^{-1} : \overline{V}_n \to V_n$ также было квази-геодезическим, соответствующим тому же аффинору $F^h_i(x)$.

2°. Для сокращения выкладок условимся операцию свертывания с аффинором называть сопряжением по соответствующему индексу и обозначать следующим образом:

$$A^{\cdots}_{\bar{i}\ldots} = A^{\cdots}_{\alpha\ldots}F^{\alpha}_i, \qquad A^{\bar{i}\ldots}_{\cdots} = A^{\alpha\ldots}_{\cdots}F^i_{\alpha}.$$

3°. Напомним, что X_n считается наделенным *e-структурой* [2], если в нем задана аффинорная структура $F^h_i(x)$, удовлетворяющая условиям

$$F^{\alpha}_i F^h_{\alpha} = e\delta^h_i,$$

где $e = -1, 1$ или 0. При $e = 1$ ее называют структурой почти произведения (гиперболической); при $e = -1$ - почти комплексной (эллиптической); при $e = 0$ - почти касательной (параболической).

В теории почти комплексных многообразий (при $e = -1$) аффинорную структуру, определенную на римановом пространстве (V_n, g_{ij}), называют почти эрмитовой [7], если она согласована с метрикой в виде

$$g_{\overline{i}\overline{j}} = g_{ij}.$$

В зависимости от того, какие условия дифференциального характера накладываются на аффинор в римановом пространстве с е-структурой, выделяют следующие классы пространств [7]: келерово - при $F^h_{i,j} = 0$, где «,» - знак ковариантной производной по связности V_n; К-пространство – при $F^h_{i,j} + F^h_{j,i} = 0$; Н-пространство - при $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0$, где $F_{hi} = g_{h\alpha} F^\alpha_i$ и др.

Предметом нашего исследования будут КГО $f : V_n \to \overline{V}_n$ определенного типа в предположении, что F^h_i порождает на V_n и $\overline{V}_n$ структуру, которую мы назвали рекуррентно-параболической.

2 Понятие рекуррентно-параболической структуры

1°. Назовем *рекуррентно-параболической* заданную на(псевдо)римановом пространстве V_n аффинорную структуру $F^h_i(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$F^\alpha_i F^h_\alpha = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F^\alpha_j g_{\alpha i}, \tag{1}$$

$$F^h_{i,j} = \rho_j(x) F^h_i(x) \tag{2}$$

где круглыми скобками обозначена операция симметрирования без множителя; «,» - знак ковариантной производной в пространстве V_n; ρ_j - ковариантный вектор. Само V_n при этом также будем называть *рекуррентно-параболическим.*

Ввиду (1) и (2) для тензора Римана V_n возникают дополнительные свойства. Действительно, применив тождество Риччи к аффинору $F^h_i(x)$, на основании (2) имеем:

$$\rho_{[j,k]} F^h_i = R^{\overline{h}}_{ijk} - R^h_{\overline{i}jk} \tag{3}$$

Напомним [2], что одним из критериев интегрируемости *е-структуры* является обращение в 0 его тензора Нейенхейса:

$$N^h_{ij} = F^h_{\overline{i},j} - F^h_{j,\overline{i}} + F^h_{i,\overline{j}} - F^h_{\overline{j},i}$$

Из (2) на основании (1) следует, что $F^h_{\overline{i},j} = 0$, поэтому тензор Нейенхейса рекуррентно-параболической структуры представится в виде

$$N^h_{ij} = F^h_{i,\overline{j}} - F^h_{j,\overline{i}}$$

или, с учетом (2),

$$N^h_{ij} = \rho_{\overline{j}} F^h_i - \rho_{\overline{i}} F^h_j.$$

Будем полагать, что аффинорная структура $F_i^h(x)$ интегрируема, тогда из последних соотношений следует:

$$\rho_{\bar{j}} F_i^h - \rho_{\bar{i}} F_j^h = 0.$$

Если здесь опустить индекс h в V_n, затем проциклировать по i, j, h и сравнить результат с исходными равенствами, то вследствие (1) получим $\rho_{\bar{i}} F_{jh} = 0$, то есть:

$$\rho_{\bar{i}} = 0. \tag{4}$$

2°. Так как наша параболическая структура F_i^h является интегрируемой, в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, (ее называют адаптированной к аффинору), в которой аффинор имеет следующий вид:

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть:

$$F_b^{a+m} = \delta_b^a, \qquad F_{b+m}^{a+m} = F_b^a = F_{b+m}^a = 0$$

$a, b = 1, 2, \ldots, m = \frac{n}{2}$.

Введем вспомогательный тензор B_i^h, такой что:

$$B_\alpha^h B_i^\alpha = 0, \qquad F_\alpha^h B_i^\alpha + B_\alpha^h F_i^\alpha = \delta_i^h. \tag{5}$$

При этом, очевидно, по необходимости

$$F_\alpha^\beta B_\beta^\alpha = m.$$

Этот тензор определяется с большим произволом. В частности, в адаптированной к аффинору F_i^h системе координат он представляется в виде

$$(B_i^h) = \begin{pmatrix} P & E_m \\ -P^2 & -P \end{pmatrix},$$

где P–произвольная квадратная матрица порядка m.

3 КГО рекуррентно-параболических пространств

1°. Рассмотрим пару римановых пространств (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в КГО, соответствующем аффинору F_i^h, удовлетворяющем условию взаимности. В общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения КГО представляются в виде:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \tag{6}$$

$$\overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \qquad \overline{F}_{ij}(x) = F^{\alpha}_{j}(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\overline{\Gamma}^{h}_{ij}, \Gamma^{h}_{ij}$ компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F^h_i - аффинор. Пусть V_n является рекуррентно-параболическим. Найдем связь между ковариантными производными F^h_i в пространствах $\overline{V}_n$ и V_n , используя (6), (1) и (2):

$$F^h_{i|j} = \rho_j F^h_i + \psi_{\bar{i}}\delta^h_j + \varphi_{\bar{i}}F^h_j - \psi_i F^h_j \tag{7}$$

При свертывании с B^h_j по h,j с учетом (5) отсюда находим

$$\varphi_{\bar{i}} = \psi_i$$

Тогда из (7) следует:

$$F^h_{i|j} = \rho_j F^h_i,$$

т.е. в римановом пространстве $\overline{V}_n$ аффинор F^h_i также является рекуррентным, причем с тем же вектором рекуррентности ρ_j.

Нами доказана

Теорема 1 *Образ рекуррентно-параболического пространства при КГО по необходимости также параболически-рекуррентен.*

2°. Заметим, что при свертывании (6) по h, j с учетом $\varphi_{\bar{i}} = \psi_i$ имеем

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} + (n+2)\psi_i,$$

что говорит о градиентности вектора ψ_i.

4 КГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское $\overline{V}_n$.

1°. Рассмотрим КГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское $\overline{V}_n$. Для начала найдем зависимость между тензорами Римана пространств V_n и $\overline{V}_n$, находящихся в квази-геодезическом отображении. На основании уравнений (6), (1) и (2) получим:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + A_{\bar{i}j}\delta^h_k - A_{\bar{i}k}\delta^h_j + A_{ij}F^h_k - A_{ik}F^h_j + A_{[kj]}F^h_i$$

где мы обозначили $A_{ik} = \varphi_{i,k} + \varphi_i\rho_k - \varphi_{\bar{k}}\varphi_i - \varphi_{\bar{i}}\varphi_k$.

Пусть риманово пространство $\overline{V}_n$ - плоское, то есть $\overline{R}^h_{ijk} = 0$, тогда

$$R^h_{ijk} + A_{\bar{i}j}\delta^h_k - A_{\bar{i}k}\delta^h_j + A_{ij}F^h_k - A_{ik}F^h_j + A_{[kj]}F^h_i = 0 \tag{8}$$

Отсюда после свертывания по индексам h, k найдем:

$$R_{ij} + nA_{\bar{i}j} - A_{i\bar{j}} - A_{j\bar{i}} = 0, \tag{9}$$

где R_{ij} - тензор Риччи пространства V_n. Альтернируя это выражение по индексам i, j, имеем:

$$A_{\bar{i}j} = A_{\bar{j}i} \tag{10}$$

и, следовательно,

$$A_{\overline{ij}} = 0.$$

В связи с этим (9) дают нам $R_{\bar{i}j} = 0$.

Опустим в соотношениях (8) индекс h в V_n:

$$R_{hijk} + A_{\bar{i}j}g_{hk} - A_{\bar{i}k}g_{hj} + A_{ij}F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{[kj]}F_{hi} = 0$$

Произведем здесь сопряжение с аффинором поочередно по индексам k и j и сложим полученные равенства. В результате видим, что

$$(A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}})F_{hk} - (A_{\bar{i}k} + A_{i\bar{k}})F_{hj} + (A_{\bar{k}j} + A_{k\bar{j}})F_{hi} = 0$$

Поднимем здесь индекс h в пространстве V_n, а затем свернем полученное соотношение с B^k_h по индексам h, k с учетом (5):

$$m(A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}}) - (A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}}) + (A_{i\bar{j}} - A_{j\bar{i}}) = 0$$

Альтернируя данные равенства по индексам i, j, и принимая во внимание (10), обнаруживаем, что:

$$A_{i\bar{j}} = A_{j\bar{i}} \tag{11}$$

Следовательно, предыдущие равенства приводят нас при $n \neq 2$ к

$$A_{\bar{i}j} = -A_{j\bar{i}}. \tag{12}$$

Тогда из (9) следует

$$R_{ij} = -(n+1)A_{\bar{i}j}. \tag{13}$$

Вернемся к выражениям (8) и свернем их с тензором g^{ij} :

$$R_{hk} + g_{hk}A_{\overline{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} + F_{hk}A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2A_{\overline{h}k} = 0$$

Производя здесь сопряжение по индексу h , получим

$$A_{\overline{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} = 0,$$

а альтернируя по индексам h, k, соответственно,

$$A_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 0.$$

В результате последние равенства принимают вид:

$$R_{hk} + 2A_{\overline{h}k} = 0$$

Вычитая из этого выражение равенство (13), обнаруживаем, что:

$$A_{\overline{h}k} = 0,$$

и, значит, $R_{hk} = 0$, то есть наше пространство по необходимости – Риччи-плоское.

С учетом вышесказанного из (8) следует:

$$R^h_{ijk} + A_{ij} F^h_k - A_{ik} F^h_j + A_{[kj]} F^h_i = 0,$$

или, что то же,

$$R_{hijk} + A_{ij} F_{hk} - A_{ik} F_{hj} + A_{[kj]} F_{hi} = 0$$

Заменим здесь индексы h на k, i на j, а результат вычтем из исходных равенств:

$$(A_{ji} + A_{ij}) F_{hk} - A_{ik} F_{hj} + A_{jh} F_{ki} + A_{[kj]} F_{hi} - A_{[hi]} F_{kj} = 0 \qquad (14)$$

Поднимая здесь индекс h в V_n и свертывая результат с B^k_h по индексам h, k, ввиду (5) находим:

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

Вследствие этого (14) принимают вид:

$$A_{jh} F_{ki} - A_{ik} F_{hj} + 2A_{kj} F_{hi} - 2A_{hi} F_{kj} = 0$$

Если здесь просимметрировать по h, i, затем поменять индексы h, j местами и результат сложить с исходным равенством, получим

$$A_{kj} F_{hi} - A_{hi} F_{kj} = 0$$

Свертывание полученных соотношений с $g^{k\alpha} B^j_\alpha$ по индексам j, k дает нам:

$$A_{hi} = \frac{1}{m} F_{hi} A_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} B^\beta_\gamma$$

В результате (8) запишутся в виде:

$$R_{hijk} = C(F_{hk} F_{ij} - F_{hj} F_{ik} + 2F_{hi} F_{kj}) \qquad (15)$$

где $C = -\frac{1}{m} A_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} B^{\beta}_{\gamma}$ - инвариант, вообще говоря, не являющийся константой.

2°. Покажем, что пространство, в котором выполняются (15), является симметрическим. Для этого найдем ковариантную производную тензора Римана в пространстве V_n, учитывая (2):

$$R_{hijk,l} = K_l(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \tag{16}$$

где

$$K_l = C_{,l} + 2C\rho_l.$$

Проциклируем полученные соотношения по индексам j, k, l , а затем поднимем в них индекс h в пространстве V_n:

$$K_l(F^h_k F_{ij} - F^h_j F_{ik} + 2F^h_i F_{kj}) + K_j(F^h_l F_{ik} - F^h_k F_{il} + 2F^h_i F_{lk}) +$$
$$+ K_k(F^h_j F_{il} - F^h_l F_{ij} + 2F^h_i F_{jl}) = 0.$$

Свернем это равенство с B^k_h по индексам h и k:

$$mK_l F_{ij} - mK_j F_{ik} + 2K_i F_{kj} = 0.$$

В результате циклирования по индексам i, j, l отсюда получаем:

$$(2m + 2)(K_l F_{ij} + K_i F_{jl} + K_j F_{li}) = 0,$$

что вместе с предыдущим равенством дает нам $K_i F_{jl} = 0$ и, следовательно,

$$K_i = C_{,i} + 2C\rho_i = 0.$$

Тогда из (16) следует

$$R_{hijk,l} = 0$$

и, значит, риманово пространство V_n, допускающее нетривиальное КГО на плоское пространство $\overline{V}_n$, является симметрическим.

3°. Заметим, что ввиду (15) из (3) вытекает градиентность вектора ρ_i, то есть

$$\rho_i = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^i}.$$

Поэтому из

$$K_i = C_{,i} + 2C\rho_i = 0$$

для инварианта C в (15) имеет место представление

$$C = C_1 e^{-\rho(x)},$$

где C_1 - некоторая константа. В результате (15) принимают вид

$$R_{hijk} = C_1 e^{-\rho(x)}(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \tag{17}$$

Нами доказана

Теорема 2 *Если параболически-рекуррентное пространство V_n при $n \neq 2$ допускает нетривиальное КГО на плоское $\overline{V}_n = \overline{E}_n$, то оно по необходимости является Риччи-плоским, а его тензор Римана имеет структуру (17) при некоторой констание C_1.*

5 Метрики рекуррентно-параболических пространств, допускающих нетривиальное КГО на плоское пространство

Воспользуемся формулой А.П.Широкова для симметрических римановых пространств, позволяющей восстановить метрический тензор в окрестности некоторой точки $M(x_0)$ в V_n:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!}\overset{s}{m}_{ij}$$

Здесь

$$\overset{1}{m}_{ij} = m_{ij},$$

$$\overset{k+1}{m}_{ij} = \overset{k}{m}_{\alpha i} m_{\beta j} \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}$$

$$m_{ij} = \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta,$$

$\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}$ - значения компонент метрического и обратного ему тензоров в точке $M(x_0)$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta}$- значение компонент тензора Римана в $M(x_0)$, (y^h)-римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$.

Из (15) с учетом (1) легко видеть, что

$$\overset{k}{m}_{ij} = 0$$

при $k > 1$.

Таким образом, выражение для метрического тензора параболически-реккурентного пространства V_n, допускающего нетривиальное КГО на плоское пространство $\overline{V}_n$, имеет вид:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{C_1 e^{-\overset{\circ}{\rho}}}{8} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j},$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$, $\overset{\circ}{\rho}$ - компоненты тензоров g_{ij}, F_{ij} и инварианта $\rho(x)$ в точке x_0, y^h - римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$, C_1 – некоторая константа.

Список литературы

1. Петров А.З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7–21.
2. Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
3. J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations // Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
4. В. М. Чернышенко. Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических // Сб. работ мех.-мат. кафедры Днепропетр., ун-та, вып.6. С.105-118.
5. Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов. Математика. №1, 1983 55–61.
6. И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.
7. И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств //Proc. Intern. Geom. Center. Vol.7, No.1, 2014. P.53-64.
8. И. Н. Курбатова. О закономерностях канонических квази-геодезических отображений параболически келеровых пространств //Proc. Intern. Geom. Center. Vol.7, No.2, 2014. P.26-35.

Ирина Николаевна Курбатова, Ольга Тарасовна Сисюк
ОНУ, Одесса, Украина
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com, olia-sisiuk@list.ru

Irina N. Kurbatova, Olga T. Sisyuk

Quasigeodesic mappings of recurrent-parabolic spaces

We investigate special type of mappings between Riemannian spaces with recurrent-parabolic structure.