

Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств

Ирина Николаевна Курбатова, Ольга Тарасовна Сисюк

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений между римановыми пространствами с рекуррентно-параболической структурой.

Ключевые слова Риманово пространство, параболическая структура.

УДК 517.764

1 Введение.

1°. В 1968 году, исследуя проблему моделирования (в смысле поведения пробных частиц) физических полей, академик А.З. Петров пришел к задаче квази-геодезического отображения (КГО) римановых пространств V_4 сигнатуры Минковского [1]. При этом движение свободной частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением частицы в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы типа Лоренца, то есть геодезические линии пространства V_4 переходят в так называемые квази-геодезические линии другого пространства \bar{V}_4 , в результате чего, по выражению А.З. Петрова, «происходит перекачка энергии в силу». Им были получены и в некоторой мере исследованы основные уравнения КГО, которые в общей по отображению системе координат имеют вид:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_4 и V_4 с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование.

КГО представляют собой широкое обобщение понятия геодезических отображений [2], теория которых уже давно является классическим разделом современной дифференциальной геометрии, и имеют существенное пересечение с другими известными ее обобщениями, такими как НР-отображения почти комплексных многообразий [3], отображения аффинно-связных и римановых пространств с сохранением комплекса геодезических [4], почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств [2], F-планарные отображения пространств аффинной связности [5].

Изучению КГО при некоторых дополнительных условиях посвящены работы [6]-[8]. Причем там уже понятие КГО обобщается на случай римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности, а также из определенных геометрических соображений накладывается требование, чтобы КГО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ удовлетворяло условию взаимности, т.е. обратное отображение $f^{-1} : \bar{V}_n \rightarrow V_n$ также было квази-геодезическим, соответствующим тому же аффинору $F_i^h(x)$.

2°. Для сокращения выкладок условимся операцию свертывания с аффинором называть сопряжением по соответствующему индексу и обозначать следующим образом:

$$A_{\bar{i}\dots} = A_{\alpha\dots} F_i^\alpha, \quad A^{\bar{i}\dots} = A^{\alpha\dots} F_\alpha^i.$$

3°. Напомним, что X_n считается наделенным *e-структурой* [2], если в нем задана аффинорная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = e \delta_i^h,$$

где $e = -1, 1$ или 0 . При $e = 1$ ее называют структурой почти произведения (гиперболической); при $e = -1$ - почти комплексной (эллиптической); при $e = 0$ - почти касательной (параболической).

В теории почти комплексных многообразий (при $e = -1$) аффинорную структуру, определенную на римановом пространстве (V_n, g_{ij}) , называют почти эрмитовой [7], если она согласована с метрикой в виде

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}.$$

В зависимости от того, какие условия дифференциального характера накладываются на аффинор в римановом пространстве с e -структурой, выделяют следующие классы пространств [7]: келерово - при $F_{i,j}^h = 0$, где «,» - знак ковариантной производной по связности V_n ; К-пространство - при $F_{i,j}^h + F_{j,i}^h = 0$; Н-пространство - при $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0$, где $F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^\alpha$ и др.

Предметом нашего исследования будут КГО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ определенного типа в предположении, что F_i^h порождает на V_n и \bar{V}_n структуру, которую мы назвали рекуррентно-параболической.

2 Понятие рекуррентно-параболической структуры

1°. Назовем *рекуррентно-параболической* заданную на (псевдо)римановом пространстве V_n аффинорную структуру $F_i^h(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad (1)$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x) \quad (2)$$

где круглыми скобками обозначена операция симметрирования без множителя; «,» - знак ковариантной производной в пространстве V_n ; ρ_j - ковариантный вектор. Само V_n при этом также будем называть *рекуррентно-параболическим*.

Ввиду (1) и (2) для тензора Римана V_n возникают дополнительные свойства. Действительно, применив тождество Риччи к аффинору $F_i^h(x)$, на основании (2) имеем:

$$\rho_{[j,k]} F_i^h = \bar{R}_{ijk}^h - R_{ijk}^h \quad (3)$$

Напомним [2], что одним из критериев интегрируемости e -структуры является обращение в 0 его тензора Нейенхейса:

$$N_{ij}^h = F_{i,j}^h - F_{j,i}^h + F_{i,\bar{j}}^h - F_{\bar{j},i}^h$$

Из (2) на основании (1) следует, что $F_{i,\bar{j}}^h = 0$, поэтому тензор Нейенхейса рекуррентно-параболической структуры представится в виде

$$N_{ij}^h = F_{i,\bar{j}}^h - F_{\bar{j},i}^h$$

или, с учетом (2),

$$N_{ij}^h = \rho_{\bar{j}} F_i^h - \rho_i F_{\bar{j}}^h.$$

Будем полагать, что аффинорная структура $F_i^h(x)$ интегрируема, тогда из последних соотношений следует:

$$\rho_{\bar{j}} F_i^h - \rho_{\bar{i}} F_j^h = 0.$$

Если здесь опустить индекс h в V_n , затем проциклировать по i, j, h и сравнить результат с исходными равенствами, то вследствие (1) получим $\rho_{\bar{i}} F_{jh} = 0$, то есть:

$$\rho_{\bar{i}} = 0. \tag{4}$$

2°. Так как наша параболическая структура F_i^h является интегрируемой, в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, (ее называют адаптированной к аффинору), в которой аффинор имеет следующий вид:

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть:

$$F_b^{a+m} = \delta_b^a, \quad F_{b+m}^{a+m} = F_b^a = F_{b+m}^a = 0$$

$$a, b = 1, 2, \dots, m = \frac{n}{2}.$$

Введем вспомогательный тензор B_i^h , такой что:

$$B_{\alpha}^h B_i^{\alpha} = 0, \quad F_{\alpha}^h B_i^{\alpha} + B_{\alpha}^h F_i^{\alpha} = \delta_i^h. \tag{5}$$

При этом, очевидно, по необходимости

$$F_{\alpha}^{\beta} B_{\beta}^{\alpha} = m.$$

Этот тензор определяется с большим произволом. В частности, в адаптированной к аффинору F_i^h системе координат он представляется в виде

$$(B_i^h) = \begin{pmatrix} P & E_m \\ -P^2 & -P \end{pmatrix},$$

где P —произвольная квадратная матрица порядка m .

3 КГО рекуррентно-параболических пространств

1°. Рассмотрим пару римановых пространств (V_n, g_{ij}) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, находящихся в КГО, соответствующем аффинору F_i^h , удовлетворяющем условию взаимности. В общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения КГО представляются в виде:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \tag{6}$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_n и V_n с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинол. Пусть V_n является рекуррентно-параболическим. Найдем связь между ковариантными производными F_i^h в пространствах \bar{V}_n и V_n , используя (6), (1) и (2):

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h + \psi_i \delta_j^h + \varphi_i F_j^h - \psi_i F_j^h \quad (7)$$

При свертывании с B_j^h по h, j с учетом (5) отсюда находим

$$\varphi_i = \psi_i$$

Тогда из (7) следует:

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h,$$

т.е. в римановом пространстве \bar{V}_n аффинол F_i^h также является рекуррентным, причем с тем же вектором рекуррентности ρ_j .

Нами доказана

Теорема 1 *Образ рекуррентно-параболического пространства при КГО по необходимости также параболически-рекуррентен.*

2°. Заметим, что при свертывании (6) по h, j с учетом $\varphi_i = \psi_i$ имеем

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\alpha + (n+2)\psi_i,$$

что говорит о градиентности вектора ψ_i .

4 КГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское \bar{V}_n .

1°. Рассмотрим КГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское \bar{V}_n . Для начала найдем зависимость между тензорами Римана пространств V_n и \bar{V}_n , находящихся в квази-геодезическом отображении. На основании уравнений (6), (1) и (2) получим:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + A_{\bar{i}j} \delta_k^h - A_{\bar{i}k} \delta_j^h + A_{ij} F_k^h - A_{ik} F_j^h + A_{[kj]} F_i^h$$

где мы обозначили $A_{ik} = \varphi_{i,k} + \varphi_i \rho_k - \varphi_k \varphi_i - \varphi_i \varphi_k$.

Пусть риманово пространство \bar{V}_n - плоское, то есть $\bar{R}_{ijk}^h = 0$, тогда

$$R_{ijk}^h + A_{\bar{i}j} \delta_k^h - A_{\bar{i}k} \delta_j^h + A_{ij} F_k^h - A_{ik} F_j^h + A_{[kj]} F_i^h = 0 \quad (8)$$

Отсюда после свертывания по индексам h, k найдем:

$$R_{ij} + nA_{\bar{i}j} - A_{i\bar{j}} - A_{j\bar{i}} = 0, \quad (9)$$

где R_{ij} - тензор Риччи пространства V_n . Альтернируя это выражение по индексам i, j , имеем:

$$A_{\bar{i}j} = A_{j\bar{i}} \quad (10)$$

и, следовательно,

$$A_{\bar{i}\bar{j}} = 0.$$

В связи с этим (9) дают нам $R_{\bar{i}j} = 0$.

Опустим в соотношениях (8) индекс h в V_n :

$$R_{hijk} + A_{\bar{i}j}g_{hk} - A_{\bar{i}k}g_{hj} + A_{ij}F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{[kj]}F_{hi} = 0$$

Произведем здесь сопряжение с аффинором поочередно по индексам k и j и сложим полученные равенства. В результате видим, что

$$(A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}})F_{hk} - (A_{\bar{i}k} + A_{i\bar{k}})F_{hj} + (A_{\bar{k}j} + A_{k\bar{j}})F_{hi} = 0$$

Поднимем здесь индекс h в пространстве V_n , а затем свернем полученное соотношение с B_h^k по индексам h, k с учетом (5):

$$m(A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}}) - (A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}}) + (A_{i\bar{j}} - A_{j\bar{i}}) = 0$$

Альтернируя данные равенства по индексам i, j , и принимая во внимание (10), обнаруживаем, что:

$$A_{i\bar{j}} = A_{j\bar{i}} \quad (11)$$

Следовательно, предыдущие равенства приводят нас при $n \neq 2$ к

$$A_{\bar{i}j} = -A_{j\bar{i}}. \quad (12)$$

Тогда из (9) следует

$$R_{ij} = -(n+1)A_{\bar{i}j}. \quad (13)$$

Вернемся к выражениям (8) и свернем их с тензором g^{ij} :

$$R_{hk} + g_{hk}A_{\bar{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} + F_{hk}A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2A_{\bar{h}k} = 0$$

Производя здесь сопряжение по индексу h , получим

$$A_{\bar{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} = 0,$$

а альтернируя по индексам h, k , соответственно,

$$A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0.$$

В результате последние равенства принимают вид:

$$R_{hk} + 2A_{\bar{h}k} = 0$$

Вычитая из этого выражение равенство (13), обнаруживаем, что:

$$A_{\bar{h}k} = 0,$$

и, значит, $R_{hk} = 0$, то есть наше пространство по необходимости – Риччи-плоское.

С учетом вышесказанного из (8) следует:

$$R_{ijk}^h + A_{ij}F_k^h - A_{ik}F_j^h + A_{[kj]}F_i^h = 0,$$

или, что то же,

$$R_{hijk} + A_{ij}F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{[kj]}F_{hi} = 0$$

Заменим здесь индексы h на k , i на j , а результат вычтем из исходных равенств:

$$(A_{ji} + A_{ij})F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{jh}F_{ki} + A_{[kj]}F_{hi} - A_{[hi]}F_{kj} = 0 \quad (14)$$

Поднимая здесь индекс h в V_n и свертывая результат с B_h^k по индексам h, k , ввиду (5) находим:

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

Вследствие этого (14) принимают вид:

$$A_{jh}F_{ki} - A_{ik}F_{hj} + 2A_{kj}F_{hi} - 2A_{hi}F_{kj} = 0$$

Если здесь просимметризовать по h, i , затем поменять индексы h, j местами и результат сложить с исходным равенством, получим

$$A_{kj}F_{hi} - A_{hi}F_{kj} = 0$$

Свертывание полученных соотношений с $g^{k\alpha}B_\alpha^j$ по индексам j, k дает нам:

$$A_{hi} = \frac{1}{m}F_{hi}A_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}B_\gamma^\beta$$

В результате (8) запишутся в виде:

$$R_{hijk} = C(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \quad (15)$$

где $C = -\frac{1}{m} A_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} B_{\gamma}^{\beta}$ - инвариант, вообще говоря, не являющийся константой.

2°. Покажем, что пространство, в котором выполняются (15), является симметрическим. Для этого найдем ковариантную производную тензора Римана в пространстве V_n , учитывая (2):

$$R_{hijk,l} = K_l(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \quad (16)$$

где

$$K_l = C_{,l} + 2C\rho_l.$$

Проциклируем полученные соотношения по индексам j, k, l , а затем поднимем в них индекс h в пространстве V_n :

$$K_l(F_k^h F_{ij} - F_j^h F_{ik} + 2F_i^h F_{kj}) + K_j(F_l^h F_{ik} - F_k^h F_{il} + 2F_i^h F_{lk}) + \\ + K_k(F_j^h F_{il} - F_l^h F_{ij} + 2F_i^h F_{jl}) = 0.$$

Свернем это равенство с B_h^k по индексам h и k :

$$mK_l F_{ij} - mK_j F_{ik} + 2K_i F_{kj} = 0.$$

В результате циклирования по индексам i, j, l отсюда получаем:

$$(2m + 2)(K_l F_{ij} + K_i F_{jl} + K_j F_{li}) = 0,$$

что вместе с предыдущим равенством дает нам $K_i F_{jl} = 0$ и, следовательно,

$$K_i = C_{,i} + 2C\rho_i = 0.$$

Тогда из (16) следует

$$R_{hijk,l} = 0$$

и, значит, риманово пространство V_n , допускающее нетривиальное КГО на плоское пространство \bar{V}_n , является симметрическим.

3°. Заметим, что ввиду (15) из (3) вытекает градиентность вектора ρ_i , то есть

$$\rho_i = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^i}.$$

Поэтому из

$$K_i = C_{,i} + 2C\rho_i = 0$$

для инварианта C в (15) имеет место представление

$$C = C_1 e^{-\rho(x)},$$

где C_1 - некоторая константа. В результате (15) принимают вид

$$R_{hijk} = C_1 e^{-\rho(x)} (F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \quad (17)$$

Нами доказана

Теорема 2 Если параболически-рекуррентное пространство V_n при $n \neq 2$ допускает нетривиальное КГО на плоское $\bar{V}_n = \bar{E}_n$, то оно по необходимости является Риччи-плоским, а его тензор Римана имеет структуру (17) при некоторой константе C_1 .

5 Метрики рекуррентно-параболических пространств, допускающих нетривиальное КГО на плоское пространство

Вспользуемся формулой А.П.Широкова для симметрических римановых пространств, позволяющей восстановить метрический тензор в окрестности некоторой точки $M(x_0)$ в V_n :

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!} \overset{s}{m}_{ij}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \overset{1}{m}_{ij} &= m_{ij}, \\ \overset{k+1}{m}_{ij} &= \overset{k}{m}_{\alpha i} \overset{\circ}{m}_{\beta j} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} \\ m_{ij} &= \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta, \end{aligned}$$

$\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$ - значения компонент метрического и обратного ему тензоров в точке $M(x_0)$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta}$ - значение компонент тензора Римана в $M(x_0)$, (y^h) - римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$.

Из (15) с учетом (1) легко видеть, что

$$\overset{k}{m}_{ij} = 0$$

при $k > 1$.

Таким образом, выражение для метрического тензора параболически-рекуррентного пространства V_n , допускающего нетривиальное КГО на плоское пространство \bar{V}_n , имеет вид:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{C_1 e^{-\overset{\circ}{\rho}}}{8} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j},$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$, $\overset{\circ}{\rho}$ - компоненты тензоров g_{ij} , F_{ij} и инварианта $\rho(x)$ в точке x_0 , y^h - римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$, C_1 - некоторая константа.

Список литературы

1. Петров А.З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7-21.
2. Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
3. J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations // Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
4. В. М. Чернышенко. Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических // Сб. работ мех.-мат. кафедры Днепропетр., ун-та, вып.6. С.105-118.
5. Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов. Математика. №1, 1983 55-61.
6. И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.
7. И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств //Proc. Intern. Geom. Center. Vol.7, No.1, 2014. P.53-64.
8. И. Н. Курбатова. О закономерностях канонических квази-геодезических отображений параболически келеровых пространств //Proc. Intern. Geom. Center. Vol.7, No.2, 2014. P.26-35.

Ирина Николаевна Курбатова, Ольга Тарасовна Сисюк

ОНУ, Одесса, Украина

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com, olia-sisiuk@list.ru

Irina N. Kurbatova, Olga T. Sisyuk

Quasigeodesic mappings of recurrent-parabolic spaces

We investigate special type of mappings between Riemannian spaces with recurrent-parabolic structure.