

Аналітичне моделювання однієї задачі квазіреальної нескінченно малої деформації поверхні

Лілія Леонтіївна Безкоровайна

<http://orcid.org/0000-0002-8305-3129>

Юлія Степанівна Хомич

<http://orcid.org/0000-0002-3428-8001>

Об'єктом дослідження в даній роботі є квазіреальна нескінченно мала деформація довільної однозв'язної регулярної поверхні ненульової гаусової кривини за умови, що при цій деформації відхилення поверхні від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі.

Ключові слова Квазіреальна нескінченно мала деформація; варіація; відхилення; система рівнянь.

УДК 514.76/77

1 Вступ

У тривимірному евклідовому просторі E_3 розглянемо область G , що належить площині x^1, x^2 . Нехай S – деяка однозв'язна поверхня класу C^3 , що в околі довільної своєї точки допускає параметризацію

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2), \quad x^1, x^2 \in G,$$

де \bar{r} – радіус-вектор точки поверхні, до того ж $\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 \neq 0$, $\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i}$. Тут і надалі всі індекси набувають значень 1, 2.

В роботі будемо розглядати нескінченно малу деформацію першого порядку поверхні S з деформуючим полем $\bar{U}(x^1, x^2)$ в класі C^3 і параметром

деформації $t \rightarrow 0$

$$\bar{r}^*(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{U}(x^1, x^2). \quad (1)$$

Надалі геометричні об'єкти zdeформованої поверхні S^* , на відміну від відповідних об'єктів поверхні S , умовимося відмічати позначкою $*$, а варіації об'єктів поверхні S будемо позначати через δ .

Означення 1 Якщо при нескінченно малій деформації вигляду (1) елемент площі поверхні змінюється за заданим законом, то таку деформацію будемо називати квазіреальною нескінченно малою деформацією (к. н. м. д.) поверхні.

Частинні похідні вектора зміщення $\bar{U}(x^1, x^2)$ к. н. м. д. поверхні розкладемо за базисом $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n}$, де \bar{n} – орт нормалі поверхні S [2]

$$\bar{U}_i = \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu \delta_i^\beta \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \bar{n}, \quad (2)$$

де $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \in C^2$ – деяке поле симетричного двічі контраваріантного тензора, $T^\alpha \in C^2$ – поле контраваріантного вектора, c_{ij} – дискримінантний тензор поверхні S ($c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, g_{ij}$ – коефіцієнти першої основної квадратичної форми поверхні), δ_j^i – символи Кронекера, $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$ – деяка функція. В [2] доведено, що функція μ визначає закон змінювання елемента площі поверхні при її к. н. м. д. При $\mu = 0$ квазіреальна деформація поверхні зводиться до ареальної нескінченно малої деформації.

Основна система рівнянь квазіреальної нескінченно малої деформації поверхні має вигляд [2]

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $b_{\alpha\beta}$ – коефіцієнти другої квадратичної форми, а комою позначено символ коваріантної похідної на базі метричного тензора g_{ij} поверхні S . Система рівнянь (3) містить три диференціальних рівняння відносно 6 невідомих функцій: $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, T^\alpha, \mu$.

2 Обчислення варіації відхилення l поверхні від дотичної площини

Відомо, що відхилення l від дотичної площини при переміщенні на поверхні S з точки дотику в нескінченно близьку точку по деякій кривій (далі,

коротко, - відхилення від дотичної площини) або, іншими словами, "підйом дотичної площини" над поверхнею виражається половиною другої квадратичної форми,

$$l = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta.$$

Аналогічна формула має місце і для поверхні S^*

$$l^* = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}^*dx^\alpha dx^\beta. \quad (4)$$

Для обчислення варіації відхилення δl поверхні S від дотичної площини при її к. н. м. д. використаємо розклад коефіцієнтів другої квадратичної форми $b_{\alpha\beta}^*$ поверхні S^* по степенях t , здобутий в роботі [2]

$$b_{\alpha\beta}^* = b_{\alpha\beta} + t\beta_{\alpha\beta} + o(t^2), \quad (5)$$

де

$$\beta_{\alpha\beta} \equiv \delta b_{\alpha\beta} = c_{\alpha\gamma}T^{\gamma\nu}b_{\nu\beta} + c_{\alpha\gamma}T_{,\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta}\mu, \quad (6)$$

а через $o(t^2)$ позначено величину порядку 2 і вище відносно t , якою ми нехтуємо. Підставимо в (4) вираз для коефіцієнтів другої квадратичної форми $b_{\alpha\beta}^*$ з (5)

$$l^* = l + \frac{1}{2}t\beta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + o(t^2). \quad (7)$$

Звідси знаходимо варіацію відхилення δl поверхні від дотичної площини при її к. н. м. д.

$$\delta l = \frac{1}{2}\beta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (8)$$

Внесемо тепер в (8) замість величин $\beta_{\alpha\beta}$ їх відповідні подання через тензори деформації $T^{\alpha\beta}$, T^α та функцію μ з (6), тоді дістанемо вираз для шуканої варіації

$$\delta l = \frac{1}{2}(c_{\alpha\gamma}T^{\gamma\nu}b_{\nu\beta} + c_{\alpha\gamma}T_{,\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta}\mu)dx^\alpha dx^\beta, \quad (9)$$

а відхилення l^* поверхні S^* набуде вигляду

$$l^* = l + \frac{1}{2}t(c_{\alpha\gamma}T^{\gamma\nu}b_{\nu\beta} + c_{\alpha\gamma}T_{,\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta}\mu)dx^\alpha dx^\beta + o(t^2). \quad (10)$$

3 Постановка задачі та її аналітичне вираження

Поставимо задачу дослідити квазіреальну нескінченно малу деформацію поверхні S за умови, що її відхилення від дотичної площини при цій деформації зберігається у будь-якому напрямі.

Очевидно, відхилення поверхні l від дотичної площини стаціонарне або зберігається при нескінченно малій деформації першого порядку, якщо його приріст є величиною не менш ніж другого порядку відносно t (чим ми нехтуємо). І навпаки. Тому стаціонарність величини l характеризується тим, що її перша варіація тотожно дорівнює нулю. Інакше кажучи, для стаціонарності відхилення поверхні від дотичної площини при її к. н. м. деформації необхідно і достатньо, щоб диференціали dx^1, dx^2 задовольняли рівняння

$$\beta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (11)$$

Відхилення поверхні від дотичної площини при її к. н. м. д. залишається стаціонарним у будь-якому напрямі тоді і лише тоді, коли $\beta_{\alpha\beta} = 0$. З урахуванням виразів $\beta_{\alpha\beta}$ з (6) приходимо до теореми

Теорема 1 *Для того щоб при квазіреальній нескінченно малій деформації однозв'язна поверхня класу C^3 зберігала своє відхилення від дотичної площини у будь-якому напрямі, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*

$$c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha - b_{ij} \mu = 0. \quad (12)$$

Звідси випливає, що аналітичною моделлю поставленої на початку пункту задачі є така система рівнянь

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, \\ c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha - b_{ij} \mu = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Неважко переконатися, що друге рівняння (13₂) можна виключити з цієї системи, через те що воно є її наслідком. Для того, щоб у цьому переконатися, достатньо співвідношення (13₃) помножити на c^{ij} і згорнути його по індексах i та j .

Отже, поставлена задача остаточно зводиться до п'яти незалежних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} - T^{\alpha}b_{\alpha}^{\beta} + \mu_{\alpha}c^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha} - b_{ij}\mu = 0, \\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

відносно шести невідомих функцій: $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, T^{\alpha}, \mu$.

Має місце

Теорема 2 Для існування квазіреальної нескінченно малої деформації однозв'язної поверхні класу C^3 з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі, необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (14) мала ненульовий розв'язок $(T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}, \mu)$.

4 Дослідження системи рівнянь (14) та представлення її розв'язків для довільної поверхні

Теорема 3 Нехай довільна однозв'язна поверхня S класу C^3 ненульової гаусової кривини допускає квазіреальну нескінченно малу деформацію з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі, тоді на поверхні S існує симетричне тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$ і функція $\mu \in C^2$, які можна подати у вигляді

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(T_{,j}^{\alpha}d^{j\beta} + T_{,j}^{\beta}d^{j\alpha}), \quad (15)$$

$$\mu = \frac{1}{2}T_{,j}^{\alpha}d^{j\beta}c_{\beta\alpha}, \quad (16)$$

де d^{ij} – тензор, обернений до тензора b_{ij} , а тензор T^{α} є розв'язком системи рівнянь

$$T_{,\alpha i}^{\alpha} + T_{,j}^{\alpha}d_{,\alpha}^{j\beta}b_{\beta i} + T^{\beta}b_{\beta i}2H = 0, \quad (17)$$

H – середня кривина поверхні.

Доведення Припустимо, що регулярна поверхня S допускає к. н. м. д., при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі, тоді в силу теореми 2 система рівнянь (14) має ненульовий розв'язок $(T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}, \mu)$. Доведемо, що на поверхні S тензорне поле $T^{\alpha\beta}$ та функцію μ можна подати у вигляді (15) і (16) відповідно через тензор T^{α} , який є розв'язком системи рівнянь (17).

Надалі обмежимося розглядом поверхонь ненульової гаусової кривини K і, наслідуючи І. Н. Векуа [1], введемо до розгляду тензор $d^{\alpha\beta}$, обернений до тензора $b_{\alpha\beta}$, за формулою

$$d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}, \quad d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta_j^i.$$

Якщо домножимо другу рівність системи (14) на $c^{i\gamma} d^{j\nu}$, то одержимо вираз для тензора $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta} = -(T_{,j}^{\alpha} d^{j\beta} + c^{\alpha\beta} \mu). \quad (18)$$

Тепер (18) помножимо на $c_{\alpha\beta}$ та згорнемо по індексах α, β . В силу $c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$, дістанемо вираз (16) для функції μ . Далі підставимо μ з (16) у (18), внаслідок чого надамо тензору $T^{\alpha\beta}$ симетричної форми (15). Отже, нам вдалося у явному вигляді виразити три компоненти тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ та функцію μ через дві компоненти T^1, T^2 контраваріантного вектора T^α .

Підставимо в перше співвідношення системи рівнянь (14) вирази для тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ і функції μ з (15) та (16), у підсумку отримаємо систему двох диференціальних рівнянь відносно двох компонент тензора T^α

$$T_{,j\alpha}^{\alpha} d^{j\beta} + T_{,j}^{\alpha} d_{,\alpha}^{j\beta} + T^{\alpha} b_{\alpha}^{\beta} = 0. \quad (19)$$

Здійснимо перетворення системи рівнянь (19). Для цього застосуємо тождність Річчі до тензора T^α

$$T_{,jk}^{\alpha} - T_{,kj}^{\alpha} = -T^i R_{ijk}^{\alpha},$$

де R_{ijk}^{α} – тензор Рімана. Згорнемо останню рівність по індексах α і k , тоді дістанемо

$$T_{,j\alpha}^{\alpha} - T_{,\alpha j}^{\alpha} = -T^i R_{ij\alpha}^{\alpha}, \quad (20)$$

де $R_{ij\alpha}^{\alpha} = R_{ij}$ – тензор Річчі. Крім того, приймаємо до уваги наступні тождності [3]

$$R_{ij} = -K g_{ij}; \quad d_i^{\beta} = \frac{1}{K} c_{i\alpha} c^{\beta\gamma} b_{\gamma}^{\alpha}; \quad c_{i\alpha} c^{\beta\gamma} = \delta_i^{\beta} \delta_{\alpha}^{\gamma} - \delta_i^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (21)$$

З урахуванням (21) рівнянням (19) можна надати вигляду

$$T_{,\alpha j}^{\alpha} d^{j\beta} + T_{,j}^{\alpha} d_{,\alpha}^{j\beta} + T^{\beta} 2H = 0, \quad (22)$$

Помножимо (22) на $b_{\beta i}$ і згорнемо по індексу β , внаслідок чого нарешті отримаємо систему рівнянь (17). Таким чином, ми довели, що при к. н. м. д. з зазначеним обмеженням на поверхні S по необхідності існує тензорне поле $T^{\alpha\beta}$ та функція μ , які виражаються через тензор T^α у вигляді (15) і (16) відповідно, а T^α в свою чергу є розв'язком системи рівнянь (17). Теорема доведена.

Має місце і обернена

Теорема 4 Нехай на довільній поверхні $S(K \neq 0)$ класу C^3 існує тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$ та функція $\mu \in C^2$, які можна виразити у вигляді (15), (16) відповідно через тензорне поле $T^\alpha \in C^2$, яке є розв'язком системи рівнянь (17). Така поверхня допускає квазіреальну нескінченно малу деформацію з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі. При цьому поле зміщення \bar{U} має представлення

$$\bar{U}(M) = \int_{M_0M} \left(\left(-\frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^\alpha d^{j\beta} - \frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^\beta d^{j\alpha} - \frac{1}{2}c_{k\alpha}T_{,j}^\alpha d^{jk}\delta_i^\beta \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \bar{n} \right) dx^i + \bar{U}_0, \quad (23)$$

де \bar{U}_0 – сталий вектор, а криволінійний інтеграл береться по довільній спрямній лінії, що належить поверхні та з'єднує фіксовану точку M_0 зі змінною точкою M .

Доведення Припустимо, що на поверхні $S(K \neq 0)$ існує тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$ та функція $\mu \in C^2$, які можна подати формулами (15), (16) відповідно через тензорне поле $T^\alpha \in C^2$, яке є розв'язком системи рівнянь (17). Покажемо, що за таких умов поверхня допускає к. н. м. д. зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі. Для цього спочатку перевіримо, що за даного подання тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ та функції μ формулами (15), (16) система рівнянь (14) задовольняється.

Дійсно, внесемо вирази для $T^{\alpha\beta}$ та μ з (15), (16) в перше співвідношення системи (14), внаслідок чого одержимо

$$T_{,j\alpha}^\alpha d^{j\beta} + T_{,j}^\alpha d^{j\beta}_{,\alpha} + T^\alpha b_\alpha^\beta = 0. \quad (24)$$

Якщо тепер врахувати тотожність Річчі (20) та формули (21), то системі рівнянь (24) зможемо надати вигляду (22). Помножимо (22) на $b_{\beta i}$ і згорнемо по індексу β , в результаті чого переконаємося, що співвідношення (14₁) врешті рещт зведеться до системи рівнянь (17). Оскільки за умовою теореми тензорне поле T^α є розв'язком системи рівнянь (17), то звідси випливає, що перше співвідношення системи рівнянь (14) тотожно виконується.

Переконаємося, що друге співвідношення системи рівнянь (14) за умови теореми також тотожно виконується. З цієї метою спершу покажемо, що з формул (15), (16) випливає співвідношення (18). Справді, помножимо (16) на $c^{\alpha\beta}$. У відповідності з тотожністю (21₃) дістанемо

$$c^{\alpha\beta} \mu = \frac{1}{2} \left(T_{,k}^\beta d^{k\alpha} - T_{,k}^\alpha d^{k\beta} \right). \quad (25)$$

Внесемо тепер в (15) замість доданку $\frac{1}{2}T_{,k}^{\beta}d^{k\alpha}$ його вираз з (25), а саме

$$\frac{1}{2}T_{,k}^{\beta}d^{k\alpha} = \frac{1}{2}T_{,k}^{\alpha}d^{k\beta} + c^{\alpha\beta}\mu.$$

Тоді рівностям (15) можна надати вигляду (18). Підставимо нарешті вираз для $T^{\alpha\beta}$ з (18) в друге співвідношення системи рівнянь (14), внаслідок чого одержимо тотожність

$$c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha} - b_{ij}\mu = -c_{i\alpha}T_{,k}^{\alpha}d^{k\beta}b_{\beta j} - c_{i\alpha}c^{\alpha\beta}\mu b_{\beta j} + c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha} - b_{ij}\mu \equiv 0.$$

Оскільки третє співвідношення системи рівнянь (14) є умовою симетричності тензора $T^{\alpha\beta}$, а сам цей тензор $T^{\alpha\beta}$ за умовою теореми подано в симетричному вигляді (15), то це співвідношення, очевидно, теж виконується.

Підставимо вирази для тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ та функції μ з (15), (16) та вираз для T^{α} з (17) в систему двох диференціальних рівнянь (2)

$$\bar{U}_i = \left(-\frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha}d^{j\beta} - \frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^{\beta}d^{j\alpha} - \frac{1}{2}c_{k\alpha}T_{,j}^{\alpha}d^{jk}\delta_i^{\beta} \right) \bar{r}_{\beta} + c_{i\alpha}T^{\alpha}\bar{n}. \quad (26)$$

З попереднього випливає, що умови інтегрованості (14) системи рівнянь (26) тотожно виконуються.

Отже, для довільної однозв'язної поверхні S класу C^3 ненульової гаусової кривини існує поле вектора зміщення \bar{U} у вигляді (23). Для будь-якого контраваріантного вектора T^{α} з (17) це деформує поле однозначно (з точністю до сталого вектора \bar{U}_0) визначає квазіреальну нескінченно малу деформацію, при якій зберігається відхилення від дотичної площини цієї поверхні у будь-якому напрямі. Теорема доведена.

Література

1. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции*, М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2-е изд., 512 с. (1988).
2. Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. *Квазіреальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3* // Proc. Intern. Geom. Center, №7(2), С. 6-19, (2014).
3. Безкоровайна Л. Л. *Ареальні нескінченно малі деформації і ерівноважені стани пружної оболонки*, Одеса: Астропринт, 168 с. (1999).

Лілія Леонтіївна Безкоровайна

<http://orcid.org/0000-0002-8305-3129>

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

E-mail: liliyabez@gmail.com

Юлія Степанівна Хомич

<http://orcid.org/0000-0002-3428-8001>

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Liliia L. Bezkorovaina, Yuliia S. Khomych

Analytical modeling of one problem of the quasiareal infinitesimal deformation of the surface

In this paper the object of the study is the quasiareal infinitesimal deformation of the unrestricted simply connected regular surface of non-zero Gauss curvature, provided that under this deformation the deviation of the surface from the tangent plane is preserved in any direction.