DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.2/2015.51614
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(2) 71–77 $d\omega$

Геометрические величины на плоскости Лобачевского

Надежда Григорьевна Коновенко
http://orcid.org/0000-0002-8631-0688

Аннотация В этой работе описываются локальные структуры геометрических величин на плоскости Лобачевского. Это описание содержит как линейные, например тензоры, так и нелинейные геометрические величины и существенным образом используется при нахождении базисных дифференциальных инвариантов ([1]).

Ключевые слова плоскость Лобачевского, геометрические величины, дифференциальные инварианты, изометрии.

УДК 514.132

1 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действие на плоскости Лобачевского

В стандартной модели геометрия Лобачевского реализуется на верхней полуплоскости $\mathbf{L}^2$ с метрикой

$$\Theta = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Группа движений плоскости Лобачевского изоморфна группе Ли $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$, а ее алгебра Ли порождена векторными полями

$$\begin{aligned} A &= \partial_x, \\ B &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ H &= 2x\partial_x + 2y\partial_y, \end{aligned} \tag{1}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.2/2015.51614

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Под однородным расслоением над плоскостью Лобачевского мы понимаем такое расслоение

$$\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}^2,$$

где $\pi : (u, x, y) \mapsto (x, y)$, в которое поднято $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действие.
Иначе говоря, в тотальном пространстве расслоения π, указаны векторные поля $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

$$[\overline{H}, \overline{A}] = -2\overline{A}, \quad [\overline{H}, \overline{B}] = 2\overline{B}, \quad [\overline{A}, \overline{B}] = \overline{H},$$

и такие что

$$\pi_*(\overline{A}) = A, \quad \pi_*(\overline{B}) = B, \quad \pi_*(\overline{H}) = H.$$

Геометрической величиной на плоскости Лобачевского называется гладкое сечение однородного $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-расслоения. Размерность геометрической величины называется размерность соответствующего однородного расслоения.

2 Локальная классификация геометрических величин

Предположим, что векторные поля в рассматриваемой области порождают гладкое распределение $\mathfrak{P}$ размерности r.

В данном случае векторные поля A и B линейно независимы, поэтому векторные поля $\overline{A}$, $\overline{B}$ - также линейно независимы.

Следовательно $r = \dim \mathfrak{P}$ может принимать только два значения $r = 2$ или $r = 3$. В любом из этих случаев, мы можем выбрать координаты $(u, w^2, \ldots, w^m, x, y)$ в расслоении π так, чтобы $w^2, \ldots, w^m$ - были первыми интегралами для векторных полей $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$, а функция u дополнительно являлась первым интегралом векторных полей $\overline{A}$ и $\overline{H}$. Действительно, это очевидно в случае, когда $r = 2$, поскольку тогда u может быть выбрана как первый интеграл векторных полей $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$.

Если же $r = 3$, то на 3-х мерных многообразиях $w^2 = \ldots = w^m = const$ векторные поля $\overline{A}$ и $\overline{H}$ определяют 2-мерное распределение, которое вполне интегрируемо, в силу коммутационного соотношения $[\overline{H}, \overline{A}] = -2\overline{A}$. Функция u может быть выбрана как первый интеграл этого распределения. При таком выборе координат представление примет вид:

$$\begin{aligned}
&\overline{A} = \partial_x,\\
&\overline{B} = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + yb(x,y,u,w)\partial_u,\\
&\overline{H} = 2x\partial_x + 2y\partial_y.
\end{aligned} \tag{2}$$

Из коммутационных соотношений следует, что функция b имеет следующий вид:

$$b(x,y,u,w) = y\widetilde{b}(u,w).$$

Отметим также, что если $r = 2$, или, иначе говоря, если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 2, то $\widetilde{b}(u,w) \equiv 0$. Если же размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 3, то $\widetilde{b}(u,w) \neq 0$ и заменой переменных вида:

$$(u,w) \mapsto (U(u), W(u,w))$$

векторное поле $\widetilde{b}\partial_u$ может быть выпрямлено.

Суммируя сказанное приходим к следующему результату.

Теорема 1 *Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского в однородном $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-расслоении локально эквивалентно одному из следующих:*

1)

$$\begin{aligned}
&\overline{A} = \partial_x,\\
&\overline{B} = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y,\\
&\overline{H} = 2x\partial_x + 2y\partial_y,
\end{aligned} \tag{3}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 2, или

2)

$$\begin{aligned}
&\overline{A} = \partial_x,\\
&\overline{B} = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + y\partial_u,\\
&\overline{H} = 2x\partial_x + 2y\partial_y,
\end{aligned} \tag{4}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 3.

3 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действия на геометрических величинах

Рассмотрим векторное поле $\nabla = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ на плоскости Лобачевского и пусть

$$\overline{\nabla} = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y + \sum_{i=1}^{m} A_i(x,y,u)\partial_{u^i}$$

его поднятие в расслоение геометрических величин. Обозначим через φ_t однопараметрическую группу сдвигов вдоль векторного поля ∇, а через $\overline{\varphi}_t$ группу сдвигов вдоль $\overline{\nabla}$. Тогда каждая геометрическая величина

$$s : \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$$

определяет путь s_t в пространстве геометрических величин

$$s_t = \overline{\varphi}_{-t} \circ s \circ \varphi_t.$$

Скорость изменения

$$\nabla(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dot{s}(0)$$

мы называем действием ∇ на геометрическую величину s. Несложно проверить ([3]), что

$$\nabla(s) = as_x + bs_y - A(x, y, s).$$

Используя предыдущую теорему и эту формулу мы получаем следующие нормальные формы $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действий на геометрических величинах.

Теорема 2 *Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского на геометрических величинах локально эквивалентно следующему:*

1)

$$\begin{aligned} &A(s) = s_x, \\ &B(s) = (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y, \\ &H(s) = 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{5}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$*-орбит в расслоении* π *равны* 2.

2)

$$\begin{aligned} &A(s) = s_x, \\ &B(s) = (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y - y, \\ &H(s) = 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{6}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$*-орбит в расслоении* π *равны* 3.

4 Примеры

В качестве примеров геометрических величин мы рассмотрим тензоры на плоскости Лобачевского с $\mathfrak{sl}_2$-действием, определяемым производной Ли.

4.1 Функции

Пусть $s = s(x, y)$ является гладкой функцией на плоскости Лобачевского, и

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) = as_x + bs_y.$$

В этом случае поднятие $\overline{\nabla}$ имеет вид:

$$\overline{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y,$$

где $A = 0$.
Это действие совпадает с (5).

4.2 Векторные поля

Пусть $s = s_1\partial_x + s_2\partial_y$ является векторным полем на плоскости Лобачевского, и

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) = (as_{1,x} - s_1 a_x + bs_{1,y} - a_y s_2)\partial_x +$$

$$+(as_{2,x} - s_1 b_x + bs_{2,y} - b_y s_2)\partial_y.$$

Если записывать векторное поле s в виде столбца

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

то указанное действие примет следующий вид:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Соответственно поднятие векторного поля $\overline{\nabla}$ имеет вид:

$$\overline{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y + (a_x u_1 + a_y u_2)\partial_{u_1} + (b_x u_1 + b_y u_2)\partial_{u_2}.$$

Очевидно, что длина вектора $|s|^2 = y^{-2}(s_1^2 + s_2^2)$ является инвариантом $\mathfrak{sl}_2$-действий, а поэтому размерность $\mathfrak{sl}_2$-орбит в касательном расслоении равна 3.

Таким образом, $\mathfrak{sl}_2$-действие, задаваемое производной Ли (8) локально эквивалентно (6).

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.2/2015.51614

4.3 Дифференциальные 1-формы

Пусть теперь $s = s_1 dx + s_2 dy$ является дифференциальной 1-формой на плоскости Лобачевского, а действие, как и выше, дается производной Ли ([2]):

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_\nabla(s) = (as_{1,x} + bs_{1,y} + a_x s_1 +$$

$$+ b_x s_2)dx + (as_{2,x} + bs_{2,y} + a_y s_1 + b_y s_2)dy.$$

Записав дифференциальную 1-форму s в виде столбца (7) мы получаем следующую форму действия:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, поднятие векторного поля $\overline{\nabla}$ имеет вид:

$$\overline{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y - (a_x u_1 + b_x u_2)\partial_{u_1} - (a_y u_1 + b_y u_2)\partial_{u_2}.$$

Соответствующее $\mathfrak{sl}_2$-действие также сохраняет длину дифференциальной формы $|s|^2 = y^2(s_1^2 + s_2^2)$. Поэтому размерность $\mathfrak{sl}_2$-орбит в кокасательном расслоении равна 3, а фундаментальное $\mathfrak{sl}_2$-действие локально эквивалентно (6).

Список литературы

1. Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова Думка"НАН України, (2013), 192 с.
2. B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf
3. Коновенко Н.Г., Лычагин В.В. Алгебры дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера. // Доклады академии наук Украины. – 2010. – №1. – С. 13–16.

Надежда Григорьевна Коновенко
http://orcid.org/0000-0002-8631-0688
ОНАПТ, Одесса, Украина
E-mail: konovenko@ukr.net

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.2/2015.51614

Nadiia G. Konovenko

The geometrical sizes on Lobachevski plane

In this paper we investigate a local structure of geometrical quantities on the Lobachevski plane. This structure is used to describe metric differential invariants on the Lobachevski plane ([1]).