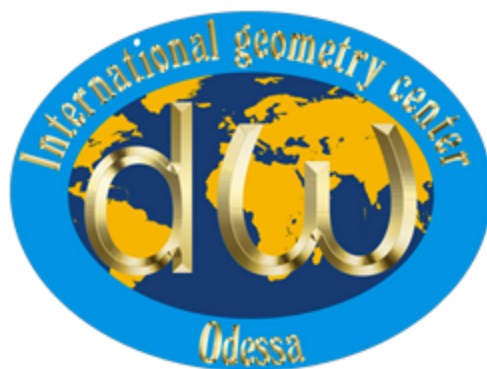

ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)
ISO 26324:2012

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 7, No. 3, 2014





ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)

Благодійний фонд наукових досліджень
"Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 7, No. 3, 2014

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 7, No. 3, 2014

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 7, No. 3, 2014

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2014

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"

Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою

Одеської національної академії харчових технологій

(№ 1 від 05.09.2014р)

Головний редактор: **Пришляк О.О.**

Заступники головного редактора: **Микитюк І.В., Мілка А.Д., Шелєхов О.М.**

Відповідальні редактори: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Відповідальні секретарі: **Мойсеєнок О.П., Федченко Ю.С.**

Редакційна колегія:

Балан В.

Банах Т.О.

Волков В.Е.

Глушков О.В.

Задорожний В.Г.

Зарічний М.М.

Кац І.С.

Кириченко В.Ф.

Кирилов В.Х.

Максименко С.І.

Машков О.А.

Мікеш Й.

Мормул П.

Рахула М.О.

Сабітов І.Х.

Савченко О.Г.

Сергеєва О.Є.

Федосов С.Н.

Фоменко А.Т.

Фоменко В.Т.

Хаддад М.

Швець В.Т.

Шуригін В.В.

Главный редактор: **Пришляк А.О.**

Заместители главного редактора: **Микитюк И.В., Милка А.Д., Шелехов А.М.**

Ответственные редакторы: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Ответственные секретари: **Мойсеенок А.П., Федченко Ю.С.**

Редакционная коллегия:

Балан В.	Кириллов В.Х.	Сергеева А.Е.
Банах Т.О.	Максименко С.И.	Федосов С.Н.
Волков В.Э.	Машков О.А.	Фоменко А.Т.
Глушков А.В.	Микеш Й.	Фоменко В.Т.
Задорожный В.Г.	Мормул П.	Хаддад М.
Заричный М.М.	Рахула М.О.	Швец В.Т.
Кац И.С.	Сабитов И.Х.	Шурыгин В.В.
Кириченко В.Ф.	Савченко А.Г.	

Editor-in-Chief: **Prishlyak A. O.**

Deputies Editor-in-Chief: **Mikityuk I. V., Milka A. D.
Shelekhov A. M.**

Managing Editors: **Konovenko N. G., Kuzakon V. M.**

Executive Secretary: **Moiseenok A. P., Fedchenko Ju. S.**

Editorial Board:

Balan V.	Kirillov V.Kh.	Sergeeva A.S.
Banah T.S.	Kirichenko V.F.	Shvets V.T.
Fedosov S.N.	Maksimenko S.I.	Shurygin V.V.
Fomenko A.T.	Mashkov O.A.	Sabitov I.Kh.
Fomenko V.T.	Mikes J.	Volkov V.E.
Glushkov A.V.	Mormul P.	Zadorozhnyi V.G.
Haddad M.	Rahula M.O.	Zarichnyi M.M.
Kats I.S.	Savchenko O.G.	

©Charity Fund for Scientific Research "Science", 2014

Зміст

В.Б. Егоров

Наукометрия как один из инструментов
Евроинтеграции Украины

7

V. Volkov

Geometrical shape of the detonation front and
instability of the detonation in a round tube

14

И.Ю. Власенко

Изобилие классов топологической сопряженности для
блуждающего множества внутренних отображений

21

О.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Молекули m -функцій степені 2 на поверхнях з краєм

27

Т.Ю. Подоусова, Н.В. Вашпанова

О продолжении A -деформаций поверхностей
положительной кривизны с краем

38

O. Lozinska, A. Savchenko, M. Zarichnyi

Hyperspaces and spaces of probability measures on \mathbb{R} -trees

48

I.A. Юрчук Про комбінаторний інваріант псевдогармонічних функцій, заданих на k -зв'язній замкненій області	58
A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, P.A. Zaichko Geometry of Chaos: Advanced approach to forecasting evolution of low-attractor chaotic systems	67
A.A. Svinarenko Quantum Geometry: Application of energy-amplitude approach to calculating parameters of multi-photon resonances for some complex atomic systems	73
V.B. Ternovsky Geometry of a chaos: dynamics of non-linear processes in relativistic backward-wave tubes chain. new data	79
A.V. Glushkov, O.Yu. Khetselius, S.V. Brusentseva, A.V. Duborez Modeling chaotic dynamics of complex systems with using chaos theory, geometric attractors, and quantum neural networks	87

Наукометрия как один из инструментов Евроинтеграции Украины

Виктор Богданович Егоров

Аннотация

Ввиду непрерывно увеличивающегося количества учёных и сфер их научных изысканий все более актуальной проблемой становится поиск средств сравнения «успешности» учёных между собой. Сам факт вхождения ученого в Английское Королевское научное общество, например, или получение престижной, всемирно известной Нобелевской премии или престижнейших Международных премий (Абелевская и Филдовская в математике или премия Тьюринга в информатике и Притцкеровская в архитектуре) объективно как меры успешности ученого стали малоэффективными из-за абсолютности и чрезвычайно малого количества тех, кто удостоен чести их получения. Для тех, кому до получения таких наград и премий еще далеко, а азарта «померяться силами» вместе с тем не меньше, существуют различные наукометрические показатели. Цель наукометрических исследований - дать объективную картину развития научного направления, оценить его актуальность, потенциальные возможности, законы формирования информационных потоков и распространения научных идей. Реализация этой цели включает в себя ряд конкретных задач, совокупное решение которых должно дать ответ на большинство поставленных вопросов. Серьезный вклад в создании методологии и инструментария наукометрии внес Ю. Гарфилд, который в 1955 году высказал идею об индексировании ссылок на представленные в пристрастной библиографии публикации. основополагающая идея наукометрических рейтингов основана на поверхностном взгляде на процесс получения научного результата. Все подобные показатели можно условно

разделить на 3 типа: основанные на количестве публикаций, основанные на количестве цитирований и комбинированные показатели (основаны на количестве цитирований и количестве публикаций одновременно).

Показатели, основанные на количестве публикаций в целом малоэффективны, прежде всего, из-за очевидной субъективности. Оценивая результативность учёных по таким показателям, молодые учёные будут всегда в заранее проигрышном положении по сравнению со своими старшими коллегами. С целью нивелирования возраста ученого предлагался и относительный показатель, рассчитываемый как отношение общего количества публикаций и научного стажа автора. По такому показателю абсолютным рекордсменом можно считать советского химика Стручкова Ю.Т., который за период с 1981 по 1990 гг. опубликовал 948 статей, т.е. в среднем 4 дня на статью. Известен также и американский профессор Э. Тополь, который в период с 1980 опубликовал 1702 статьи, т.е. в среднем 7 дней на статью. Во многом такому положению дел способствуют и «холодные» авторы, т.е. включенные в состав авторов за свой авторитет и косвенную причастность к научному коллективу. Так, известно более 80-ти случаев, когда одновременно соавторами статьи являлось более 3000 человек и одна статья Института физики высоких энергий из Протвино, авторами которой значится 3185 человек [1].

Показатели, основанные на количестве цитирований - индексы цитирования (как правило, отражают суммарное количество ссылок в научных публикациях на работы автора). Индекс цитирования в целом отражает реакцию научного сообщества на соответствующие публикации. В основе таких показателей лежит предположение, что плохие работы не цитируют, за исключением особых отношений между авторами. Цитируемость зависит не только от уровня научных результатов, но и от других факторов, например, своевременности. Длительное время очень низкой будет цитируемость публикаций с научными результатами, которые значительно опередили текущие потребности или возможности их использования [1].

Большинству индексов цитирования свойственны такие особенности:

a) игнорируют самоцитирование или цитирование соавторами, что существенно снижает рейтинг «ученого-затворника» публикации которого интересуют только его самого;

b) игнорируют повторные цитирования одной работы одним тем же учёным, что уменьшает влияние договорного цитирования;

c) учитывают личный вклад ученого, разделяя количество цитирований между соавторами;

d) учитывают репутацию цитирующего издания, взвешивая количество ссылок в журнале на его фактор авторитетности;

e) учитывают интенсивность цитирований в разных науках (в биологии в 8 раз выше, чем в математике [2]).

При этом, кроме прямых ссылок на конкретную статью в списке литературы также имеет место скрытое и неформальное цитирование – т.е. ссылка на конкретный труд непосредственно в тексте публикации, без ее дальнейшего упоминания в списке литературы. Приводятся наблюдения [3], согласно которым через 10-30 лет после публикаций статей-шедевров на них все чаще начинают ссылаться неформально.

Показатели, основанные на количестве публикаций и на количестве цитирований одновременно в основе цели своего создания содержат задачу выявления учёных, которые пишут много и качественно. Одним из таких показателей является индекс Хирша. Индекс Хирша – показатель, предложенный в 2005 году аргентино-американским физиком Хорхе Хиршем из Калифорнийского университета в Сан-Диего первоначально для оценки научной продуктивности физиков. Индекс Хирша является количественной характеристикой продуктивности учёного, группы учёных, научной организации или страны в целом, основанной на количестве публикаций и количестве цитирований этих публикаций. Индекс Хирша или h -индекс – это максимальное целое число h , указывающее, что автор опубликовал h статей, каждая из которых процитирована хотя бы h раз. Эти h статей составляют ядро Хирша или h -ядро. Чтобы попасть в ядро Хирша, статью должны процитировать хотя бы h раз. Чтобы получить высокий индекс Хирша, надо писать много, при этом, не дробя результаты по нескольким публикациям. Простота расчетов и нечувствительность к типовым приемам искусственного улучшения вышерассмотренных показателей мгновенно сделали индекс Хирша популярным наукометрическим индикатором.

Недостатки индекса Хирша связаны с тем, что в нем не учитываются:

- 1) насколько превышен порог цитирований в ядре Хирша;
- 2) длина «хвоста», т.е. количество публикаций, не вошедших в ядро и уровень их цитирования.

Для компенсации этих недостатков предложены более тридцати модификаций индекса Хирша. Далее приведены лишь некоторые из них:

- **Individual h-index (original)** – результат деления стандартного h -индекса на среднее число авторов в статьях, которые входят в Хирш-ядро публикаций. Этот показатель призван уменьшить влияние на h -индекс чис-

ла соавторов публикаций, которое, по статистике, существенно отличается в различных областях знаний;

- **Individual h-index (PoP variation)** – вычисление h -индекса когда вместо полного числа цитирований каждой статьи используется отношение числа цитирований к числу авторов публикации;

- **g-Index** – индекс, учитывающий статьи ученого с наибольшим цитированием, который определяется следующим образом:

Наибольшее целое число g публикаций, которые все вместе набрали g^2 и более цитирований. (Исправляет недостаток индекса Хирша, который можно сформулировать следующим образом: «если статья попадает в число наиболее цитируемых h статей, то цитирование этой конкретной статьи больше никак не учитывается»);

- **a-Index** – это просто среднее число ссылок на статьи, входящие в Хирш-ядро;

- **m-Index** – это медиана числа цитирований h статей, входящих в Хирш-ядро публикаций автора. Является некоторым вариантом a -индекса и попыткой учесть распределение числа цитирований статей, входящих в Хирш-ядро;

- **i-Index** – научная организация имеет индекс i , если не менее i учёных из этой организации имеют индекс Хирша не менее i (i -индекс = 20 означает, что не менее 20 учёных имеют индекс Хирша 20);

Однако всем рассмотренным индексам свойственны существенные недостатки [3]:

a) так как, наукометрические показатели легко вычислить, то велик риск их неадекватного использования в качестве единственного критерия оценки многогранной научно – исследовательской деятельности ученого;

b) использование наукометрических показателей в качестве критериев оценки научной деятельности провоцирует учёных к «накрутке» этих показателей различными способами.

Кроме того, следует также отметить и другой не менее важный недостаток. В основе своей все рассмотренные индексы цитирования базируются на предположении, что автор честно указывает других авторов, на положения которых ссылается в своем собственном научном труде, в противном случае он рискует быть обвинен в плагиате и согласно Закону об авторских и смежных правах быть притянутым к ответственности. Из выше приведенного вытекают как минимум две существенных проблемы:

а) Согласно упомянутому Закону крайне трудно притянуть кого-либо к реальной ответственности за плагиат. Специалисты отмечают, что, несмотря на значительное увеличение количества преступлений данной категории, эффективность борьбы с ними продолжает оставаться на невысоком уровне. Суды рассматривают лишь 2 процента от общего числа возбуждённых дел, а почти 98 процентов прекращается на стадии предварительного расследования [5]. Качество применения норм уголовного закона по делам о нарушении авторских и смежных прав продолжает оставаться весьма и весьма низким [6].

б) Второй важной проблемой остаётся сквозное цитирование. Чтобы проще описать суть проблемы – выше намеренно приведен пример, который без дополнительного акцентирования внимания так и остался бы незамеченным. Для того, чтобы описать проблему о низкой статистике реальной ответственности за плагиат, о которой шла речь в предыдущем пункте, была использована статья [7], авторами которой, в результате самостоятельно проведённой статистической работы, были представлены удобные цифры, которые и легли в свою очередь в описание пункта а) выше. Однако указанные там же источники информации [5] и [6] были источниками в работе [7], но сама работа [7] отмечена в списке не была (изначально). Таким образом, явной становится проблема, когда одним автором проводится глобальная объёмная аналитическая работа, приводятся свои источники литературы, однако, зачастую, в список литературы другими приводятся лишь источники этой работы, оставляя за полем зрения читателей автора первичного аналитического обобщающего труда, выдавая их при этом за результат собственного исследования. В работе [1] даже приводится занятный пример обнаружения таких фактов, когда в списках литературы от статьи к статье «кочует» одна и та же изначально допущенная опечатка, что напрямую свидетельствует о том, что авторы не читали оригинала и приводят работу уже как источник непосредственно своих изысканий, лишь потому, что та значилась источником в работе которая, по сути ворует.

Кроме ряда очевидных недостатков различных наукометрических показателей упоминаются также мнения, что погоня за оценкой цитируемости отечественных работ является лишь стимулом для того, чтобы все работы переводили на английский язык, для удобства зарубежных ученых и удобства различных спецслужб. Также присутствуют мнения, что вся погоня за наукометрическими показателями среди учёных Мира косвенными методами намеренно провоцируется представителями основных глобальных

систем Web of Science (WoS) компании Thomson Reuters (США) и Scopus компании Elsevier (Голландия) т.к. это в свою очередь стимулирует отечественные журналы вступать в эти системы, что конечно очень не просто для последних в виду высоких требований предъявляемых к журналам – претендентам, но и очень не дешево.

В виду рассмотренных недостатков наукометрических показателей авторы [4] предлагают отказаться от практики использования при оценке вклада ученого в науку различных искусственных показателей и даже предлагают ряд альтернативных мер:

1. Следует вновь разделить «перечень ВАК» на «докторский» (достаточно краткий, не более 10 процентов от текущего списка) и «кандидатский»;
2. Следует восстановить на новой основе использовавшееся в СССР ранжирование научных издательств на «центральные» и «региональные»;
3. При проведении научных конференций следует внедрить практику подведения итогов с выделением авторов нескольких лучших докладов;
4. Дополнить пару «Доктор наук» - «Кандидат наук» третьей составляющей «Заслуженный доктор наук»;
5. И др.

Однако очевидным в предложенных мерах является тот факт, что в процессе определения за автором права публикации в «центральном» научном издании или получения статуса лучшего доклада и прочих, также присутствует субъективный фактор личного мнения (личного отношения к автору) многоуважаемых членов организационного комитета конференции или редакционной коллегии журнала.

Выводы: Несмотря на рассмотренные недостатки различных наукометрических показателей и генерируемую спорность их необходимости, а также учитывая возможности «намеренного накручивания» этих показателей, очевидным является все же их необходимость как раз в первую очередь из-за их стремления к объективности. Если работа качественная, кто бы не был ее автор, а ее результаты представляют ценность для продвижения разработок других ученых, предполагая конечно честность последних, будут иметь место ссылки на указанную работу, а стало быть, увеличение цитируемости первоначального автора. Безусловно, рассмотренные недостатки наукометрических показателей существенны и максимум внимания должно быть уделено непосредственно нивелированию их как таковых. В конце концов, важным является не количество публикаций и даже не надуманная респектабельность изданий, в которых они публикуются, а то, что именно

заложено в публикации, и от того на сколько оно имеет ценность для развития науки, что и будет в свою очередь отражено в количестве ссылок и цитирований на труд. Не будем забывать, что когда в 1905 году Альберту Эйнштейну присвоили докторскую степень, его диссертация оказалась абсолютным рекордом краткости среди учёных всех времен, когда-либо защищавших диссертации: несколько страниц рукописного текста, в основном формулы, из которых важнейшая обессмертила его имя: "энергия равняется массе, помноженной на квадрат скорости света". Это фундамент новой науки.

Список литературы

1. С. Д. Штовба, Е. В. Штовба. Обзор наукометрических показателей для оценки публикационной деятельности ученого // Управление большими системами, Специальный выпуск 44: «Наукометрия и экспертиза в управлении наукой», 262 - 278 С.
2. I. Podlubny. Comparison of scientific impact expressed by the number of citations in different fields of science // Scientometrics. (2005), Vol. 64, №.1. – P. 95–99.
3. В. В. Писляков. Наука через призму статей // Публичные лекции «Полит.ру». (2011). – [Электронный ресурс] URL : [http : //polit.ru/article/2011/12/21/pislyakov2011/](http://polit.ru/article/2011/12/21/pislyakov2011/) (дата обращения 27.06.2013)
4. А. И. Орлов. Наукометрия и управление научной деятельностью. Управление большими системами // Специальный выпуск 44: «Наукометрия и экспертиза в управлении наукой», 538 - 568 С.
5. Р. Р. Мухина. Методика расследования преступлений, нарушающих авторские и смежные права на аудиовизуальные произведения // Автореф. дис. канд. юрид. наук. Томск, (2010). С. 1–2.
6. В. М. Алиев, А. В. Борисов. О наиболее распространенных ошибках, допускаемых при квалификации преступления, связанного с нарушением авторских и смежных прав // Рос. следователь. (2011). № 2. С. 19–22.
7. О. Г. Ершов, К. В. Карпов. Особенности квалификации преступления о нарушении авторских и смежных прав.// Журнал «Уголовный кодекс». (2014). №2.

Geometrical shape of the detonation front and instability of the detonation in a round tube

Viktor Volkov

Abstract Stability problem is solved analytically for the plane detonation wave propagating in a round tube. Geometrical shape (cell structure) of the detonation front, which is a result of instability development, is substantiated mathematically.

Keywords detonation, detonation front, instability of detonation, cell structure of detonation, spin detonation.

УДК 532.5 + 536.464

It's known from classical experiments that the detonation waves in explosive gases organize themselves in an unsteady spatial structure (Fig.1.) as a result of instability development. The most interesting regimes are the “spin” (Fig.2) and “gallop”, which are typical for detonations of some kinds of mixtures in cylindrical tubes. Those regimes arise probably in mixtures forming unsafe situations in industrial enterprises. Although the processes of the cell forming for the multifront detonations and near-critical regimes are investigated thoroughly in copious experiments and described in literature repeatedly, the full consistent theory for those phenomena is not built yet. The purpose of present work is to analyze mathematically critical regimes of gaseous detonation from the standpoint of the small perturbation theory.

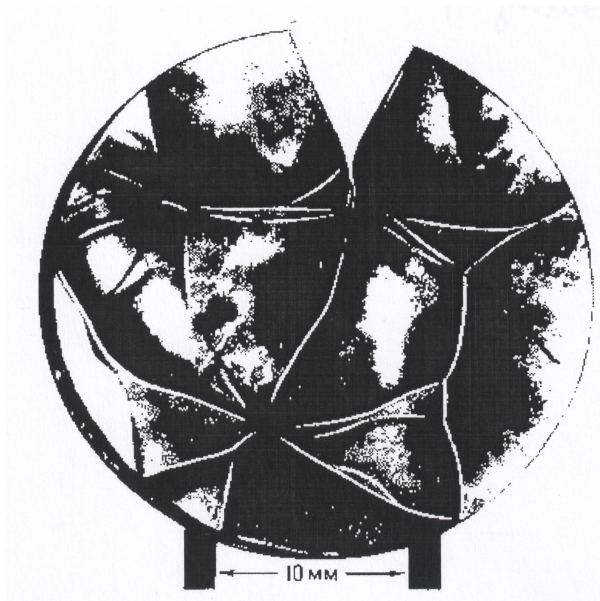


Fig. 1. A sample of the cellular detonation surface (photograph of the imprints on the sooty tube butt-end; detonation of mixture $2H_2 + O_2$ under initial pressure 300 mm H_g)



Fig. 2. Photograph of the single-head ("spin") detonation in gas mixture. Photographing was done through a slot, which was parallel to the tube axis

The reason for the appearance of the detonation front nonuniformities is the developing of instability of the one-dimensional complex "shock wave – chemical reaction zone", explored experimentally, analytically and numerically. As a result on the non-linear stage the detonation front surface is covered by cells of a characteristic size dependent on the initial pressure and chemical properties of the explosive gas mixture. The numerical and analytical estimates for the mean size of the detonation front nonuniformities were obtained by solving a stability problem of a double-front shock-detonation complex. Thus, distortion of the detonation front and the origin of fractures on it (triple point configurations) was attributed to the two-dimensional instability and the development of the fastest growing perturbations. The method of instability analysis as well as the analysis

of the detonation structure has allowed to take into account the continuous variation of physical and chemical parameters in the course of energy deposition behind a shock front. Moreover, this method has allowed to explain the possible stability of detonation in condensed explosives. However, this stability theory does not account the effect of confinement, whereas in reality the detonation processes occur only in confined volumes. The study of stability and structure of the self-sustaining detonation wave propagating in a cylindrical tube is done by us in [1]. The continuous variation of physical and chemical parameters in the reaction zone behind the shock front is taken into account and essential restrictions are not imposed either by the equation of chemical kinetics or by thermal equation of state both for detonating substance and for the detonation products.

The following mathematical model of a detonation is considered. Along a z -axis, at $z < 0$ the inviscid gas moves at a stationary supersonic velocity. Plane $z = 0$ corresponds to a shock wave. In the zone $0 \leq z \leq L$ chemical transformations occur while zone $z > L$ is occupied by the detonation products. Physical parameters of explosive mixture, gas in the chemical transformation zone and detonation products are related to each other by the conservation laws of mass, momentum, and energy. Chemical reaction is assumed to be governed by a single variable, unburnt mass fraction or progress variable, β . At the shock front, $\beta = 1$. At termination of chemical reaction, i.e., at $z = L$, $\beta = \beta_2$ ($0 \leq \beta_2 < 1$). At $\beta = \beta_2$ the flow velocity is equal to the local speed of sound (Chapman-Jouget condition).

At $z > 0$ the flow field is governed by a set of gasdynamic equations and equation of chemical kinetics:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \operatorname{grad} p = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(pE + \frac{\rho u^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left[\vec{u} \left(\rho E + p + \frac{\rho u^2}{2} \right) \right] = 0, \\ \frac{d\beta}{dt} = f(\beta, p, \rho), \end{cases} \quad (1)$$

where \vec{u} is the velocity vector, $u^2 = \vec{u}^2$, ρ is the density, p is the pressure, E is the specific internal energy, and

$$E = e + \beta Q, \quad (2)$$

Q is the chemical energy source per unit mass of gas and $e = e(p, \rho)$. For the thermally perfect gas:

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \text{const}, \quad (3)$$

where γ is the ratio of thermal specific heats.

Function f in the equation of chemical kinetics is assumed to be sufficiently smooth (as well as function $e(p, \rho)$, expressing the thermal equation of state). The explosive gas flows in a round cylindrical tube of radius r_0 , therefore Eqs. (1) should be formulated in a cylindrical frame of reference.

Let us investigate the stability of the basic solution of Eqs. (1) in relation to small perturbations u'_{jr} , $u'_{j\varphi}$, u'_{jz} , ρ'_j , p'_j , β'_j corresponding to radial, tangential and axial components of a velocity vector, pressure, density and progress variable, in the reaction zone ($j = 1$) or in the detonation products ($j = 2$), assuming that $\beta'_2 = 0$. As a result the following linearized equations can be obtained from Eqs. (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho u'_{jz} + u_j \rho'_j \right) + \frac{\rho_j}{r} \left[\frac{\partial (r u'_{jr})}{\partial r} + \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial \varphi} \right] = 0, \\ \frac{\partial u'_{jr}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{jr}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'_j}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial t} + u_j \frac{\partial u'_{j\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_j r} \frac{\partial p'_j}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial u'_{jz}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(u_j u'_{jz} \right) + \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p'_j}{\partial z} - \frac{1}{\rho_j^2} \frac{dp_j}{dz} \rho'_j = 0, \\ \rho_j \left(\frac{\partial \beta'_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \beta'_j}{\partial z} \right) + u_j \frac{d\beta}{dz} \rho'_j + \frac{\partial p'_j}{\partial t} + \frac{1}{Q(\gamma_j - 1)} \frac{\partial p'_j}{\partial t} + \frac{u_j}{Q(\gamma_j - 1)} \frac{\partial p'_j}{\partial z} + \\ + \frac{j_j}{Q(\gamma_j - 1)} \frac{du_j}{dz} p'_j - \frac{j_j p_j}{\rho Q(\gamma_j - 1)} \left(\frac{\partial \rho'_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho'_j}{\partial z} + \frac{du_j}{dz} \rho'_j \right) = 0, \\ \frac{\partial \beta'_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \beta'_j}{\partial z} + \frac{d\beta}{dz} u'_{jz} - u_j \frac{d\beta}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \beta'_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} p'_j + \frac{\partial f}{\partial \rho_j} \rho'_j \right) = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

where

$$\gamma_j = 1 + \left[\left(\frac{\partial e_j}{\partial p_j} \right)_{\rho_j} \rho_j \right]. \quad (5)$$

In the particular case of thermally perfect gas, γ_j is the ratio of specific heats. The solutions of Eqs. (4) should obey to the condition:

$$u'_{jr} |_{r=r_0} = 0, \quad (6)$$

and the condition of regularity at $r \rightarrow 0$. In view of it, the solution is taken in the form

$$\begin{array}{l} \frac{u'_{jz}}{u_2} = y_{1j}(z) F(r, \varphi, t); \\ \frac{u'_{jr}}{u_2} = y_{2j}(z) r_0 \xi_{nk}^{-1} \frac{d}{dr} \ln J_n(\xi_{nk} r r_0^{-1}) F(r, \varphi, t); \\ \frac{u'_{j\varphi}}{u_2} = y_{3j}(z) r r_0^{-1} \xi_{nk}^{-1} n F(r, \varphi, t); \\ \frac{p'_j}{p_2} = y_{4j}(z) F(r, \varphi, t); \\ \frac{\rho'_j}{\rho_2} = y_{5j}(z) F(r, \varphi, t); \\ \beta'_j = y_{6j}(z) F(r, \varphi, t), \end{array} \quad (7)$$

where

$$F(r, \varphi, t) = \exp\left(\omega r_0^{-1} u_2 t + i n \varphi\right) J_n\left(\xi_{nk} r r_0^{-1}\right), \quad (8)$$

and ω — a complex value (dimensionless eigenvalue), n is the azimuthal wave number ($n = 0, 1, 2, \dots$), $J_n(\xi)$ is the cylindrical functions of the 1-st kind of order n , ξ_{nk} is the k th root of the equation $dJ_n(\xi)/d\xi = 0$, y_{jk} ($k = 1, \dots, 5$) — dimensionless function of z .

For the Chapman-Jouget detonation ($u_2 = a_2$, i.e. $M_2 = 1$, where $M_2 = \frac{u_2}{a_2}$ is the Mach number, a_2 is the speed of sound in the detonation products) the functions y_{2k} ($k = 1, \dots, 4$) are determined to be the solutions of system of the linear homogeneous differential equations with constant coefficients and contain three uncertain constants A_{2l} ($l = 1, 2, 3$).

The equations of the perturbed shock front and the surface of chemical reaction termination are set as

$$z = \varepsilon_1(r, \varphi, t), \quad z = L + \varepsilon_2(r, \varphi, t), \quad (9)$$

where

$$\varepsilon_j = A_{0j} r_0 F(\varphi, t). \quad (10)$$

In the linear approximation, the laws of conservation of mass, momentum, energy and unburnt mass fraction at the shock front ($z = 0$) are given by

$$\begin{aligned} u_1 \rho_1' + \rho_1 u_{1z}' &= (\rho_1 - \rho_0) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t}, \\ u_{1r}' &= (u_0 - u_1) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r}, \\ u_{1\varphi}' &= \frac{1}{r} (u_0 - u_1) \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi}, \\ p_1' + u_1^2 \rho_1' + 2\rho_1 u_1 u_{1z}' &= 0, \\ [(\gamma_1 - 1)\rho_1 - (\gamma_0 + 1)\rho_0] p_1' + [(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_0 + 1)p_0] + \\ + [\rho_1' + 2(\gamma_1 - 1)Q_{\rho_1}^2 \beta'] &= 0, \\ \beta' + \varepsilon_1 \frac{d\beta}{dz} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

where index 0 denotes parameters of a unperturbed stream at $z < 0$.

As the perturbations behind shock front are continuous everywhere along the tube, the requirements of a continuity of all parameters at the perturbed surface of the chemical reaction termination should be used.

After simple transformations one arrives at the following boundary value problem:

$$\begin{aligned} \vec{R}(0) &= \vec{R}_0, \\ \vec{R}(1) &= \vec{R}_m, \\ \frac{d\vec{R}}{dz} &= G(\vec{z}) \vec{R}, \end{aligned} \quad (12)$$

with

$$\vec{R}(0) = A_{10} \left(\vec{R}_0^{(1)} + \omega \vec{R}_0^{(2)} \right), \quad (13)$$

$$\vec{R}(m) = \Sigma_{R=0}^3 A_{2l} \vec{R}_m^{(l)}, \quad (14)$$

$$G(\tilde{z}) = G^{(1)}(\tilde{z}) + \omega G^{(2)}(\tilde{z}), \quad (15)$$

$$\tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad (16)$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

where G is the 5×5 matrix.

It is rather difficult to find a precise solution of the system of ordinary linear homogeneous differential equations with variable coefficients. Therefore, the boundary value problem (13) is solved approximately [1] by the Euler method. As a result, one arrives at the equation for definition of eigenvalues

$$F(\omega) = 0, \quad (18)$$

where function $F(\omega)$ represents a polynomial of $m+5$ order, where m the number of intervals in Euler method. If this equation has a solution with a positive real part, it is evidence of the detonation wave instability. The eigenvalue ω is, in general, the complex function of parameter ξ_{nk} .

Calculating of the pulsation structure of detonation waves is based on the discrete spectrum of values ξ_{nk} satisfying a boundary condition (6), it is possible to choose the eigenvalues ω (ξ_{nk}), providing the fastest growth rate of perturbation amplitude, and therefore the maximal distortion of the front. ξ_{nl} value corresponds these eigenvalues almost always. Thus it is possible to calculate the mean size of nonuniformities (cells) in the detonation wave propagating in an explosive gas. Particular calculations were performed for mixtures $2H_2 + O_2 + 7Ar$ and $2H_2 + O_2 + 7$. He with the kinetics of [2] and are compared to results of experiments [3] - [5] and numerical analysis [2], [6]. The agreements between the present analysis and experimental data can be treated as satisfactory.

For the formation of the detonation structure, parameter

$$\delta = Lr_0^{-1}, \quad (19)$$

which shows the ratio of the reaction zone width to the tube radius is the most important one. Increase of the tube radius r_0 or decrease of the reaction zone

width L (that is possible, for example, when the explosive gas pressure p_0 increases or the inert additions) leads to decrease of δ .

For the thermally perfect gas with the model kinetics [2] if $\delta \geq 0.5$ the instability takes place only for $n = 0$. But in this case $\xi_{01} = 0$, and it contradicts (7), and the case, corresponding to $\xi_{02} = 3.83$ is realised. Absence of the dependance of perturbations from φ means, that gas produces radial acoustic oscillations. But under $n = 0$, $\xi_{01} = 0$ it is necessary to go over to another (one-dimensional) stability problem. This problem is solved by us before [1] and the instability of the gaseous detonations to the one-dimensional perturbations is proved. Developing of such instability may be accepted for theoretical explanation of the galloping detonation regime [5]. At the non-linear stage of developing one-dimensional (axial) and radial perturbations will interact. The result of such interaction is non-one-dimensional character of the detonation “gallop”, that is observed in experiments [5].

If $0.3 \leq \delta \leq 0.5$ instability develops under $n = 1$, $\xi_{11} = 1.84$, which corresponds to the single-head spinning detonation (Fig.2) [4], [5]. If $0.1 \leq \delta \leq 0.3$ instability develops under $n = 2$, $\xi_{21} = 3.05$, which corresponds to the double-head spinning detonation [4], [5]. And so on, as δ decreases, n increases, that means existence of the multi-head spin, i.e. cell structure of detonation (Fig.1).

References

1. S. K. Aslanov, V. E. Volkov. Instability and Structure of Detonation in a Model Combustor // Application of Detonation to Propulsion, Moscow, TORUS PRESS, (2004), P.17.
2. S. Taki, T. Fujiwara. Numerical Analysis of Two-dimensional Nonsteady Detonation // AIAA Journal, (1978), Vol. 16, №1, P. 73-77.
3. V. R. Wite. Turbulent Structure of Gaseous Detonation // Physics of Fluids, (1961), Vol.4, №4, P. 465-480.
4. R. A. Strelow, A. A. Adamczyk, R. J. Stiles. Transient Studies of Detonation Waves // Astronautica Acta, (1972), V.17, №10, P. 509.
5. A. A. Vasil'ev. Outstanding Problems in Gaseous Detonations // Application of Detonation to Propulsion. – Moscow: TORUS PRESS, (2004), P. 3-10.
6. A. A. Vasil'ev, Yu. A. Nikolaev. Closed theoretical model of detonation cell // Acta Astronautica, (1978), Vol.23, №5, P. 983-996.

Изобилие классов топологической сопряженности для блуждающего множества внутренних отображений

Игорь Юрьевич Власенко

Аннотация Для гомеоморфизмов поверхностей с точностью до топологического сопряжения существует только одна двусвязная неподвижная регулярная компонента блуждающего множества. Однако для необратимых внутренних отображений это не так. В работе построен пример бесконечной последовательности внутренних отображений сферы с инвариантной двусвязной регулярной компонентой, таких, что эти отображения в сужении на свою регулярную компоненту попарно топологически не сопряжены.

Ключевые слова внутренние отображения, классы топологической сопряженности, блуждающее множество

УДК 517.938.5

Пусть S^2 — двумерная сфера и $f : S^2 \rightarrow S^2$ — ее внутреннее отображение, т. е. непрерывный открытый (образ любого открытого множества открыт) конечнократный (у каждой точки число прообразов конечно) эпиморфизм. Подробнее о внутренних отображениях см. [7].

В работах [1], [2] Биркгофом и Смитом было показано, что для гомеоморфизмов поверхностей любая периодическая регулярная компонента S блуждающего множества имеет топологический тип либо односвязной либо двусвязной области в \mathbb{R}^2 , причем в случае двусвязной области обе компоненты связности границы S лежат во множестве неблуждающих точек. Для каждого из этих типов компонент в сужении на траекторию такой компо-

ненты гомеоморфизмы топологически сопряжены¹: это закрывает вопрос о классификации регулярных компонент гомеоморфизмов. В [3] эти исследования были продолжены на случай больших размерностей.

Таким образом, в случае гомеоморфизмов динамика на множестве блуждающих точек устроена относительно просто. Например, для гомеоморфизмов сферы, у которых неблуждающее множество состоит из двух точек — стока и источника, ограничения этих гомеоморфизмов на блуждающее множество принадлежат одному классу топологической сопряженности.

Однако, как здесь показано, для необратимых внутренних отображений ситуация существенно отличается. Уже в случае разветвленного накрывающего внутреннего отображения сферы, у которого неблуждающее множество состоит из двух точек — стока и источника, на блуждающем множестве существует бесконечное множество классов топологической сопряженности.

Для доказательства этого утверждения в работе построен пример счетного семейства попарно топологически различных внутренних отображений двумерной сферы S^2 указанного выше типа.

Отдельную благодарность хочу выразить рецензенту статьи за выявленные ошибки в первом варианте примера.

Предварительные сведения.

Обозначим через $O_f^+(x)$ положительную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n < 0\}$. Широкой траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.

Так как f — конечнократный эпиморфизм, то естественно эти траектории воспринимать как наборы из отдельных точек.

В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое не нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Определение 1 *Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим ее через $O_f^\perp(x)$.*

Как легко видеть из определения, если среди образов x нет периодической точки, а f имеет в точках орбиты больше одного прообраза, то широкая

¹ f и g топологически сопряжены, если \exists гомеоморфизм $h: fh = hg$. Подробнее см. [5].

траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, при чем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 2 Точка x называется блуждающей точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих даны в [4]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 3 Точка x называется нейтрально блуждающей точкой f , если найдется такая ее связная окрестность U , что $\forall n \geq 0$ открытое множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности такие, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одну точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$.

Определение 4 Точка x называется суперблуждающей точкой f , если она блуждающая и нейтрально блуждающая.

Обозначим через Ω множество неблуждающих (не являющихся блуждающими) точек.

Определение 5 Блуждающая точка x называется регулярной, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x) - \delta$ -окрестность точки x , и $\exists N > 0$ такое, что $\forall k > N$ и $\forall k < -N$ $f^k(\delta(x)) \subset \epsilon(\Omega)$, где $\epsilon(\Omega) - \epsilon$ -окрестность множества Ω , $f^k(\delta(x)) -$ образ $\delta(x)$ при отображении f^k .

Множество регулярных точек открыто. Максимальные связные компоненты этого множества называются регулярными компонентами.

Построение искомой последовательности.

Введем на сфере без двух точек координаты бесконечного цилиндра (r, ϕ) , $r \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 1)$. Две оставшиеся точки сферы обозначим соответственно через $+\infty$ и $-\infty$.

Рассмотрим в этих координатах простое отображение сферы

$$\Phi_0: (r, \phi) \mapsto (r + 1, 2\phi \bmod 1).$$

Легко видеть, что это внутреннее отображение степени 2 с точками ветвления $+\infty$ и $-\infty$. Неблуждающее множество этого отображения тоже состоит

из точек $+\infty$ и $-\infty$, при чем $+\infty$ является стоком, а $-\infty$ – источником. Остальные точки являются блуждающими, при чем блуждающее множество обладает двумя инвариантными слоениями на координатные линии $\{r = \text{const}\}$ и $\{\phi = \text{const}\}$.

Следующее семейство отображений будет построено с помощью возмущений Φ_0 , которые мы будем подбирать так, чтобы у возмущенного отображения неблуждающее множество продолжало бы состоять из точек ветвления $+\infty$ и $-\infty$, и сохранялись инвариантные слоения $\{r = \text{const}\}$ и $\{\phi = \text{const}\}$.

Для этого в отображении Φ_0 будем менять во второй (угловой) координате отображение $\Psi_0 = 2\phi \bmod 1$ на отображения $\Psi_i(\phi)$, где каждое $\Psi_i: S^1 \rightarrow S^1$ – некоторое возмущение отображения $2\phi \bmod 1$, также являющееся двулистным накрытием окружности $\mathbb{R} \bmod 1$, которое будет задано далее. Тогда искомое семейство отображений $(\Phi_i), i \geq 1$ будет иметь вид $\Phi_i: (r, \phi) \mapsto (r + 1, \Psi_i(\phi))$. Легко видеть, что для отображений такого вида слоения $\{r = \text{const}\}$ и $\{\phi = \text{const}\}$ являются инвариантными.

Осталось задать отображения $(\Psi_i), i \geq 1$. Заметим, что у отображения $\Psi_0 = 2\phi \bmod 1$ множество периодических точек бесконечно и их максимальный период не ограничен. Выберем какую-нибудь бесконечную последовательность (ε_0^n) периодических точек отображения $2\phi \bmod 1$ такую, что период этих точек $p(n)$ строго возрастает. К примеру, положим $\varepsilon_0^1 = \frac{1}{2}$ (период 1, $O_{\Psi_0}^+(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\}$), $\varepsilon_0^2 = \frac{1}{3}$ (период 2, $O_{\Psi_0}^+(\frac{1}{3}) = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$), $\varepsilon_0^3 = \frac{1}{7}$ (период 3, $O_{\Psi_0}^+(\frac{1}{7}) = \{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$), $\varepsilon_0^4 = \frac{1}{5}$ (период 4, $O_{\Psi_0}^+(\frac{1}{5}) = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\}$), ...

Обозначим точки из $O_{\Psi_0}^+(\varepsilon_0^n)$ через $\varepsilon_0^n, \dots, \varepsilon_{p(n)-1}^n$, $\Psi_0(\varepsilon_i^n) = \varepsilon_{i+1}^n$. Пусть $d_n = \min_{i,j} |\varepsilon_i^n - \varepsilon_j^n \bmod 1|$ – минимальное расстояние между точками из $O^+(\varepsilon_0^n)$. Обозначим через I_j^i отрезок $[\varepsilon_j^i - \frac{d_i}{4}, \varepsilon_j^i + \frac{d_i}{4}]$.

Зададим $\Psi_i(\phi)$ на отрезках I_j^i как $\Psi_i(\phi) = \varepsilon_j^i + \phi, \phi \in I_j^i$, а вне отрезков I_j^i гладко продолжим $\Psi_i(\phi)$ любой подходящей функцией так, чтобы отображение $\Psi_i(\phi)$ было монотонно по ϕ и вне отрезков I_j^i производная от $\Psi_i(\phi)$ была бы строго больше 1. Заметим, что по построению $\Psi_i(I_j^i) = I_{j+1}^i$, $j < p(n) - 1$, $\Psi_i(I_{p(n)-1}^i) = I_0^i$, $I_{p(n)}^i = I_0^i$. К примеру, в качестве Ψ_i можно взять функции из рис. 1. Динамика $\Psi_i(\phi)$ выглядит следующим образом: по построению, отрезки I_j^i состоят из периодических точек с периодом 2^i . Оставшиеся точки принадлежат либо открытому множеству точек, которые отображаются на внутренность отрезков I_j^i , либо входят в оставшееся Канторово множество растягивающих точек, состоящее из счетного множества

нестрого растягивающих точек, входящих в границы прообразов отрезков, и континуума строго растягивающих точек.

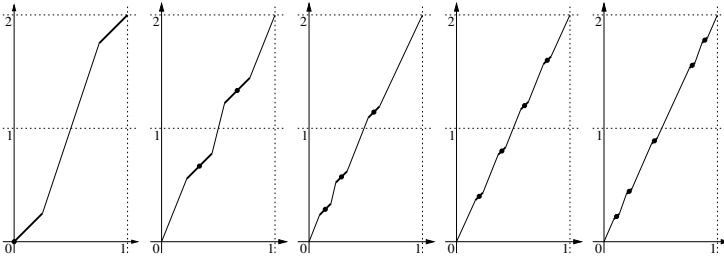


Рис. 1 $\Psi_1(\phi), \Psi_2(\phi), \Psi_3(\phi), \Psi_4(\phi), \Psi_5(\phi)$.

Рассмотрим у полученного внутреннего отображения Φ_i произвольную блуждающую точку (r_0, ϕ_0) . Представим широкую траекторию точки (r_0, ϕ_0) в виде объединения нейтральных сечений:

$$O_{\Phi_i}((r_0, \phi_0)) = \cup_{s=-\infty}^{+\infty} (\Phi_i)^s (O_{\Phi_i}^\perp(r_0, \phi_0)).$$

По построению, ее широкая траектория вложена в набор окружностей

$$\{\{r_0 + n = const\}, n \in \mathbb{Z}\},$$

а каждое нейтральное сечение $(\Phi_i)^s (O_{\Phi_i}^\perp(r_0, \phi_0))$ широкой траектории лежит в своей отдельной окружности $\{r_0 + s = const\}$, и, как следствие, разные нейтральные сечения отделены друг от друга. Отсюда следует, что является ли точка (r_0, ϕ_0) просто блуждающей или же суперблуждающей, зависит только от ее динамики по угловой координате ϕ , заданной отображением $\Psi_i(\phi)$.

Легко видеть, что точки, для которых их угловая координата со временем отображается с помощью $\Psi_i(\phi)$ на внутренность одного из отрезков I_j^i , являются суперблуждающими. В качестве разделяющей окрестности из определения там можно взять внутренность прямоугольника $I_j^i \times (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$. Оставшиеся точки не являются суперблуждающими, так как по построению они являются точками накопления своего нейтрального сечения.

Таким образом, для отображения Φ_i отрезки I_j^i однозначно определяют вперед инвариантные компоненты множества суперблуждающих точек.

В полученном семействе отображений $(\Phi_i), i \geq 1$ вперед инвариантные периодические компоненты множества суперблуждающих точек отображения Φ_i по построению представляют собой внутренности множеств

$I_j^i \times (-\infty, +\infty)$ и имеют период $p(i)$. Поскольку период $p(i)$ растёт строго монотонно, для разных i отображения Φ_i не могут быть топологически сопряжены между собой, а их множества суперблуждающих точек топологически различны.

Список литературы

1. Birkhoff, G., Smith, P.: Structure analysis of surface transformations. *J. Math.* **7**, 357-369 (1928).
2. Smith, P.: The Regular Components of Surface Transformations. *Amer. Jour. of math.*, Baltimore. **52**, No. 2, 357-369 (1930).
3. Арансон, С. Х., Медведев, В. С.: Регулярные компоненты гомеоморфизмов n -мерной сферы. *Мат. Сборник.* **85(127)**, №1(5), 3-17 (1971).
4. Власенко И. Ю.: Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 101. Інститут математики НАН України. Київ, 2014, 225 стр.
5. Кузаконь, В. М., Кириченко, В. Ф., Пришляк, О. О.: Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 97, Інститут математики НАН України, Київ, 2013, 500 стр.
6. Стоилов, С.: О топологических принципах теории аналитических функций. М., Мир. 1964, 228 стр.
7. Трохимчук, Ю. Ю.: Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Інститут математики НАН України. Київ, 2008, 538 стр.

Игорь Юрьевич Власенко

Институт математики НАНУ, Киев, Украина

E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Igor Yu. Vlasenko

Abundance of topological conjugacy classes for wandering sets of inner mappings

For a homeomorphism there is only one cylindric regular invariant component of wandering set up to the topological conjugacy. But it is different for inner mappings. This paper shows an example of infinite sequence of inner mappings such that each of them has a cylindric regular invariant component of wandering set but for any pair of inner mappings their components are not topologically conjugate.

Молекули m -функцій степені 2 на поверхнях з краєм

О.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Анотація Ми розглядаємо молекули з атомів степені 2 на поверхнях з краєм. Всі можливі молекули, які можна отримати склеюванням атомів складності 2 m -функцій на поверхнях з краєм, обчислюються трьома способами:

1) Склеювання тих двох атомів між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома.

2) Склеювання трьох атомів між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома, і водночас в другому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з третього атома.

3) Склеювання двох атомів складності 2, але беруться не всі критичні точки.

Ключові слова атом m -функції · топологічна класифікація · молекула

УДК 517.91

Вступ

Нехай M – замкнений орієнтований двовимірний многовид (поверхня), f – гладка функція на M . Розглянемо гамільтонову динамічну систему, яка

задається рівнянням $\frac{dx}{dt} = \text{sgrad} f(x)$, $x \in M$. Тоді її траєкторії будуть лежати на компонентах ліній рівня функції f . Ці компоненти назвемо шарами. Гомеоморфізм поверхні, що відображає шари на шари, називається пошаровою еквівалентністю. Отже, пошарова класифікація функцій задає топологічну класифікацію гамільтонових динамічних систем. В роботі О.Болсінова та А.Фоменка [1] було запропоновано розшарований окіл критичного рівня називати атомом, а граф Ріба, у якого вершинам відповідають атоми, а ребрам компоненти краю атомів, називати молекулою. Це дало змогу побудувати пошарову та топологічну класифікацію довільних функцій Морса.

Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m -функції. В роботі [2] отримана класифікація простих (складності 1) m -функцій на орієнтованих поверхнях. В роботі [3] було розглянуто всі можливі атоми складності 2 m -функцій на поверхнях з краєм.

Метою роботи є отримання топологічна класифікація m -функції складності 2 на орієнтованих поверхнях за допомогою молекул, складених з атомів складності 2.

1 Атоми m -функцій.

Нехай M – гладкий многовид розмірності n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція, x_1, \dots, x_n – гладкі регулярні координати в околі точки x .

Нагадаємо, що внутрішня точка $x \in M$ називається *критичною* для функції f , якщо диференціал $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ обертається в нуль в точці x . При цьому $f(x)$ називається *критичним значенням* функції f . Критична точка називається *невиродженою*, якщо другий диференціал $d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ не вироджений в цій точці. Гладка функція на замкненому многовиді називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки не вироджені. Гладка функція на многовиді з краєм називається m -функцією, якщо всі її критичні точки є не виродженими і не лежать на краю, ш така, що обмеження функції на край є функцією Морса.

m -функції f і g на поверхнях M^2 і N^2 будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм $\lambda : M^2 \rightarrow N^2$, який переводить зв'язні компоненти ліній рівня функції f в зв'язні компоненти ліній рівня функції g . Будемо казати, що пара (N^2, f) пошарово еквівалентна парі (N^2, g) .

Для дослідження пошарової еквівалентності m -функцій в околі їх критичних значень зручно використовувати поняття атому за Фоменком.

Означення. Атомом називається окіл критичного шару $P^2 = \{x : -\varepsilon \leq f(x) - c \leq \varepsilon\}$ для достатньо малого ε , розширений на лінії рівня функції f і який розглядається з точністю до пошарової еквівалентності. f -атомом називається атом, для якого фіксовано напрямок зростання функції.

Зауваження. Кожному атому відповідає 2 f -атоми. Вони отримуються один з одного заміною знака функції на атомі. Іноді ці 2 f -атоми можуть бути співпадаючими, еквівалентними.

Нагадаємо, що граф Ріба можна отримати з поверхні, ототожнюючи точки, що лежать на одній компоненті рівня. Напрямок зростання функції задає орієнтацію ребер графа Ріба. Для регулярного значення m -функції відповідна лінія рівня складається з кіл, що не перетинаються, та замкнених відрізків. Критичні точки позначимо через c , регулярні точки – через a . Ребра на графі Ріба, що відповідають колам, будемо позначати чорними стрілками, а ті, що відповідають відрізкам – білими. Всі можливі графи атомів з однією критичною точкою зображені на рис. 1.

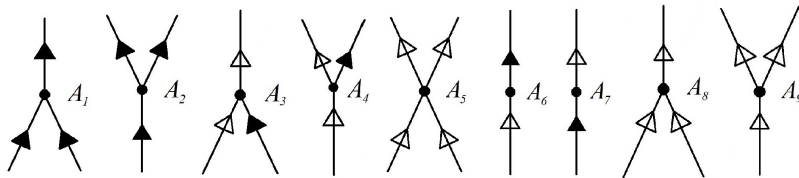


Рис. 1.

Всі можливі атоми складності 2 m -функцій на поверхнях з краєм розглянуто в роботі [3] (рис.2-5).

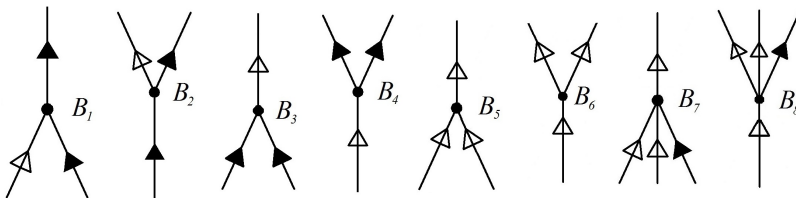


Рис. 2.

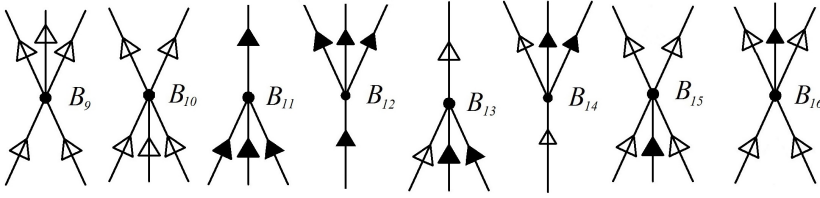


Рис. 3.

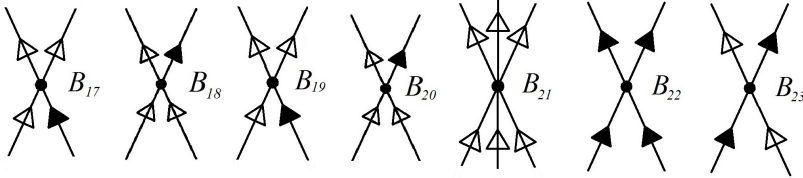


Рис. 4.

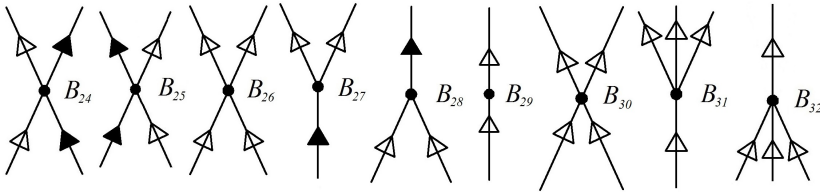


Рис. 5.

2 Молекули.

Нехай на поверхні X^2 задана функція Морса f . Її лінії рівня розшаровують поверхню, тобто виникає розшарування з особливостями. Розглянемо всі критичні значення c_i функції f і відповідні їм критичні рівні $f^{-1}(c_i)$. Кожному такому рівню відповідає деякий атом. При цьому граничні околи атомів з'єднані циліндрами, які є однопараметричними сім'ями неособливих зв'язних ліній рівня. Зобразимо розшарування у вигляді графа, за вершини якого візьмемо атоми. Це означає, що кожній вершині графа поставлений у відповідність деякий атом, причому вказано взаємно-однозначну відповідність між граничними околами атомів і ребрами графа, які дотикаються до даної вершини-атома. Кінці атомів з'єднані ребрами, які відповідають однопараметричним сім'ям регулярних околів (рис.6).

Означення. Описаний граф назвемо f -молекулою W , яка відповідає парі (X^2, f) .

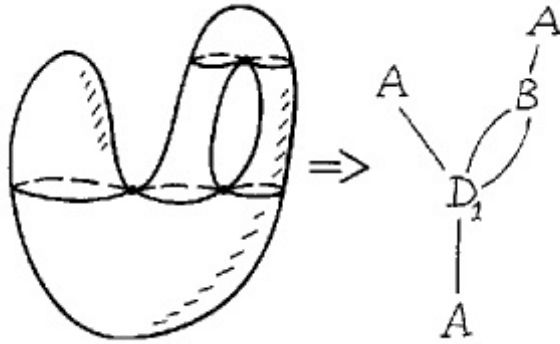


Рис. 6.

Означення. Дві молекули W і W' будемо вважати f -однаковими, якщо існує гомеоморфізм одного графа на інший, який переводить ребра в ребра, атоми в атоми, причому цей гомеоморфізм продовжується на самі атоми. Це означає, що гомеоморфізму ребер відповідає гомеоморфізм відповідних їм граничних околів атомів і цей гомеоморфізм повинен продовжуватися з межі атома всередину, тобто на весь атом.

Теорема. Нехай (X^2, f) і (X'^2, f') – дві орієнтовані поверхні з функціями Морса, і W, W' – відповідні їм молекули. Тоді пари (X^2, f) і (X'^2, f') пошарово еквівалентні із збереженням орієнтації тоді і тільки тоді, коли молекули W і W' однакові.

Розглянемо молекули функцій, які містять чотири і п'ять критичних точок.

Теорема. Всі молекули з чотирма і п'ятьма критичними точками можна отримати:

- 1) склеївши 2 атоми складності 2;
- 2) склеївши 3 атоми складності 2;
- 3) склеївши між собою не всі критичні точки атомів складності 2.

Отримані молекули ізоморфні одній з молекул у таблиці:

<p>1) склеюємо 2 атоми</p>	$B_1 \rightarrow B_2, B_1 \rightarrow B_{18}, B_1 \rightarrow B_{20}, B_1 \rightarrow B_{23}, B_1 \rightarrow B_{24}$ $B_3 \rightarrow B_4, B_3 \rightarrow B_{22}$ $B_4 \rightarrow B_{29}$ $B_5 \rightarrow B_6, B_5 \rightarrow B_{17}, B_5 \rightarrow B_{19}, B_5 \rightarrow B_{26},$ $B_5 \rightarrow B_{27}, B_5 \rightarrow B_{30}$ $B_6 \rightarrow B_{29}$ $B_7 \rightarrow B_8, B_7 \rightarrow B_{16}$ $B_{10} \rightarrow B_{31}$ $B_{11} \rightarrow B_{12}$ $B_{13} \rightarrow B_{14}$ $B_{15} \rightarrow B_8$ $B_{17} \rightarrow B_2$ $B_{18} \rightarrow B_6, B_{18} \rightarrow B_{27}$ $B_{19} \rightarrow B_2$ $B_{20} \rightarrow B_6, B_{20} \rightarrow B_{27}$ $B_{22} \rightarrow B_4$ $B_{23} \rightarrow B_2$ $B_{24} \rightarrow B_2$ $B_{25} \rightarrow B_2$ $B_{26} \rightarrow B_6, B_{26} \rightarrow B_{27}$ $B_{28} \rightarrow B_6, B_{28} \rightarrow B_{17}, B_{28} \rightarrow B_{19}, B_{28} \rightarrow B_{27},$ $B_{28} \rightarrow B_{26}, B_{28} \rightarrow B_{30}$ $B_{29} \rightarrow B_3, B_{29} \rightarrow B_5$ $B_{30} \rightarrow B_6, B_{30} \rightarrow B_{27}$ $B_{32} \rightarrow B_9, B_{32} \rightarrow B_{31}$
<p>2) склеюємо 3 атоми</p>	$B_1 \rightarrow B_{18} \rightarrow B_6, B_1 \rightarrow B_{20} \rightarrow B_6,$ $B_1 \rightarrow B_{18} \rightarrow B_{27}, B_1 \rightarrow B_{20} \rightarrow B_{27},$ $B_1 \rightarrow B_{23} \rightarrow B_2, B_1 \rightarrow B_{24} \rightarrow B_2$ $B_3 \rightarrow B_4 \rightarrow B_{29}, B_3 \rightarrow B_{22} \rightarrow B_4$ $B_5 \rightarrow B_6 \rightarrow B_{29},$ $B_5 \rightarrow B_{17} \rightarrow B_2, B_5 \rightarrow B_{19} \rightarrow B_2,$ $B_5 \rightarrow B_{26} \rightarrow B_6, B_5 \rightarrow B_{26} \rightarrow B_{27},$ $B_5 \rightarrow B_{30} \rightarrow B_6, B_5 \rightarrow B_{30} \rightarrow B_{27}$ $B_7 \rightarrow B_8 \rightarrow B_{29}, B_7 \rightarrow B_{16} \rightarrow B_6$ $B_{13} \rightarrow B_{14} \rightarrow B_{29}$ $B_{28} \rightarrow B_{17} \rightarrow B_2, B_{28} \rightarrow B_{19} \rightarrow B_2,$ $B_{28} \rightarrow B_{26} \rightarrow B_6, B_{28} \rightarrow B_{30} \rightarrow B_6$ $B_{29} \rightarrow B_3 \rightarrow B_4, B_{29} \rightarrow B_5 \rightarrow B_6$ $B_{32} \rightarrow B_9 \rightarrow B_6, B_{32} \rightarrow B_{31} \rightarrow B_{29}$
<p>3) не всі точки</p>	$B_1 \rightarrow B_8, B_1 \rightarrow B_{14}, B_1 \rightarrow B_{16}, B_1 \rightarrow B_{29}$

Доведення

1) Склеюємо ті 2 атоми між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома.

Спочатку до атома B_1 приклеюємо B_2 . Отримаємо молекулу, яка має 4 критичні точки (рис.7).

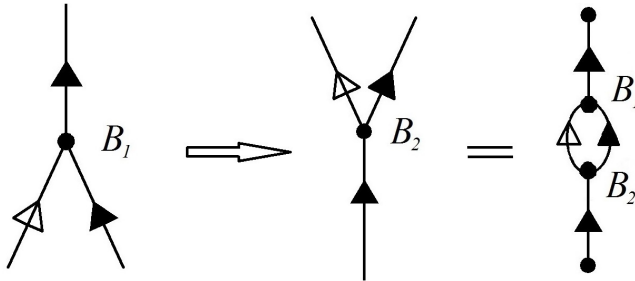


Рис. 7.

Потім приклеюємо B_{18} , B_{20} , B_{23} , B_{24} . Так як B_{18} і B_{20} ізоморфні ([3]), то й отримані молекули з п'ятьма критичними точками, що утворені з цих атомів, будуть ізоморфними. У B_{23} і B_{24} виходить один відрізок і одне коло, так само як і входить коло і відрізок в B_1 . Отримаємо молекули з п'ятьма критичними точками.

До B_2 , в якому входить одне коло, можемо приклеїти B_1 , B_{11} і B_{28} , тому що у них виходить одне коло. Але ми отримаємо молекули, в яких шість і сім критичних рівнів (рис.8).

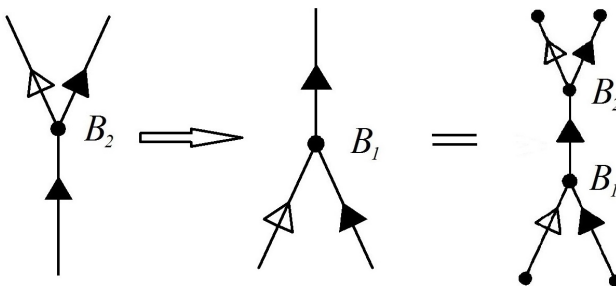


Рис. 8.

Тому надалі ми не будемо рахувати ті молекули, в яких більше п'яти критичних точок.

До B_3 приклеюємо B_4 і B_{22} . Отримуємо молекули з чотирма і п'ятьма критичними рівнями відповідно.

B_4 склеюємо з B_{29} . В перший атом входить один відрізок, а в другому атомі виходить один відрізок.

Аналогічно склеюємо B_5 з $B_6, B_{17}, B_{19}, B_{26}, B_{27}, B_{30}$. Молекули, отримані приклеюванням атомів B_{17} і B_{19} , будуть ізоморфними, так як самі атоми ізоморфні між собою.

До атома B_7 можна приклеїти атом B_8 двома способами: спочатку склеюємо два відрізки і коло, а потім перекручуємо два відрізки в одному з атомів і приклеюємо до них інші два відрізки. Ми отримуємо дві різні молекули з чотирма критичними точками, так як не існує гомеоморфізму, який би переводив ребра в ребра, атоми в атоми.

Для склеювання атомів B_{10} і B_{31} існує шість способів. Ми фіксуємо перші відрізки в кожному з них, а наступні два спочатку склеюємо, а потім перекручуємо. Так само фіксуємо другий відрізок і третій. Ми отримуємо шість молекул з п'ятьма критичними точками, які будуть різними, бо не існує гомеоморфізму, який би переводив ребра в ребра, а атоми в атоми.

Склеїти атоми B_{32} і B_9 також можна шістьма способами. Зафіксуємо перші відрізки в кожному з них, а наступні два спочатку приклеїмо, а потім перекрутимо. Так само зафіксуємо другий відрізок і третій. Отримуємо шість молекул з п'ятьма критичними точками, які не будуть однаковими, бо не існує відповідного гомеоморфізму.

Для склейки B_{32} і B_{31} існує три способи. Ще три інші склейки дадуть нам молекули, які будуть ізоморфними з першими трьома.

Таким самим чином робиться склейка всіх інших атомів складності 2.

2) Склеюємо 3 атоми між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома, і водночас в другому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з третього атома.

Розглядаємо атом B_1 . Оскільки в нього входить один відрізок і одне коло, то до нього можна приклеїти B_{18} і B_{20} , в яких виходить так само один відрізок і одне коло. А тоді можна приклеїти ще й атом B_6 і B_{27} , в яких виходить два відрізка. Отримуємо молекулу, яка має п'ять критичних точок (рис.9).

До атома B_1 можна ще приклеїти B_{23} , а до них ще й B_2 , а також B_{24} з B_2 .

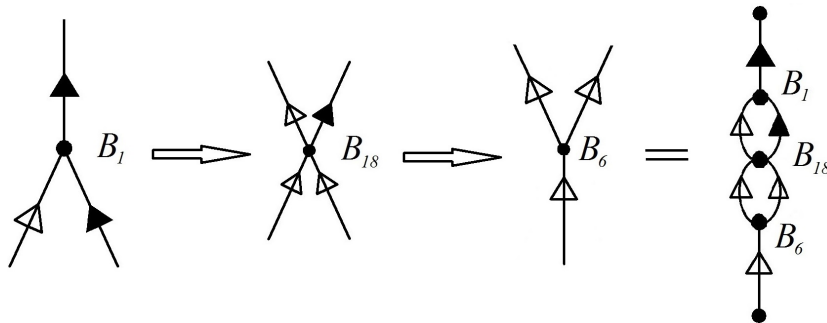


Рис. 9.

До B_3 можна приклеїти B_4 , так як в перший заходить два кола, а в другому виходить так само два кола. А до них ще й B_{29} , тому що з нього виходить один відрізок, а в B_4 входить один відрізок. Аналогічно до $B_3 - B_{22}$ з B_4 .

Враховуючи описані способи в попередньому пункті, для склеювання атомів B_7 з B_8 і з B_{29} , B_{32} з B_9 і з B_6 , B_{32} з B_{31} і з B_{29} існує відповідно два, шість і три способи, а отже буде по дві, шість і три молекули.

Такі ж склейки робимо і з іншими атомами складності 2. Але вибираємо тільки ті три атоми, які після склеювання утворюють молекулу, що містить не більше п'яти критичних точок.

3) Беремо два атоми складності 2, але будемо склеювати не всі критичні точки.

Спочатку до B_1 будемо приклеювати B_8 . Так як з другого атома виходить два відрізки, а в перший заходить один відрізок, то ми приклеїмо між собою тільки один раз відрізки і кола (рис.10).

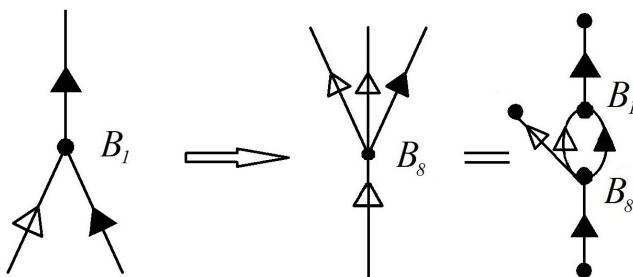


Рис. 10.

Таку ж саму склейку робимо B_1 з B_{14} , B_{16} і B_{29} .

B_3 будемо склеювати з B_{12} . Так як з другого атома виходить три кола, а в перший заходить два кола, то ми склеюємо між собою тільки два кола. Аналогічно B_3 з B_{14} .

До B_5 будемо приклеювати B_8 . Так як з другого атома виходить два відрізки і коло, а в перший заходить два відрізки, то ми приклеїмо між собою два відрізки. Аналогічно робиться склейка B_5 з B_{29} і B_{31} .

Роблячи вищеописані дії, ми склеюємо наступні атоми таким самим способом: до B_7 приклеюємо B_6 , B_{27} , до $B_{13} - B_2$, B_4 , до $B_{28} - B_{29}$, B_{31} .

Таким способом склеювання ми отримали молекули з п'ятьма критичними точками.

Зауваження. Остання теорема задає всі можливі m -функції на орієнтованій поверхні з краєм, у яких не більше 5 критичних точок (функції або її обмеження на край) складності не більше 2.

Висновки

У статті узагальнено результати О.В.Болсінова і А.Т.Фоменко, О.О.Пришляка і В.В.Шарка.

В роботі розглянуто всі можливі молекули з чотирма і п'ятьма критичними точками, які можна отримати склеюванням атомів складності 2.

Отримані результати можуть бути використані для глобальної класифікації m -функцій складності 2. Оскільки такі функції виникають в однопараметричних сім'ях m -функцій, то результати даної роботи можна застосувати до вивчення таких сімей.

Автори також мають надію, що результати дданої роботи будуть сприяти вивченню m -функцій більшої складності.

Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновыы системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет". – Т.1, Т.2. – 1999. – с.66-99.
2. Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова Н.В. Класифікація простих m -функцій на орієнтованих поверхнях: Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – №1 (104). – с.1-12.
3. Іванюк О.М., Пришляк О.О. Атоми степені 2 на поверхнях з краєм: Proc. Intern. Geom. Center. – 2013. – Vol.6, №3. – с.40–53.
4. Кронрод А.С. О функциях двух переменных /А.С.Кронрод// Успехи мат.наук. – 1950. – вып.5(35), с.24-134.
5. Кулинич Е.В. О графах как критических уровнях функции на поверхности /Е.В.Кулинич, А.О.Пришляк// Некоторые вопросы совр.мат. Т.25.К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – с.102-108.
6. Максименко С.И. Классификация m -функций на поверхностях /С.И.Максименко// Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №8. – с. 1129-1135.

7. Міщенко К.І. Класифікація m -функцій загального положення на некомпактних поверхнях скінченного типу /К.І.Міщенко// Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка (Серія: фізико-математичні науки). – 2006. – Вип.3. – с.36-42.
8. Пришляк А.О. О некритическом продолжении функции, заданной на границе трехмерной области /А.О.Пришляк, Е.А.Пришляк, Е.Н.Вятчанинова// Геометрія та топологія функцій на многовидах: зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2010. – Т.7 – с.144-157.
9. Prishlyak A.O. Morse functions with finite number of singularities on a plane. Methods of func. and topology. – 2002. – Vol.8, №1. – p.75-78.
10. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de pfaff completement integrable ou de une fonction numerique /G.Reeb// Comptes Rendus Hebdomadaires des Seaces de Academie des Sciences. – 1954/ – Vol.222. – p.847-849.

О.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: oxana801@yandex.ua, prishlyak@yahoo.com

Oksana M. Ivanyuk, Alexandr O.Prishlyak

Molecules of m -function of degree 2 on the surfaces with boundary

We introduce molecules for m -function of degree 2 on the surfaces with boundary. All possible molecules are received by gluing of atoms of complexity 2 of m -functions on surfaces with boundary are given by three ways: 1) We glue two atoms together in the first of which the number of edges, that is, the same as the number of edges emanating from the second atom. 2) We glue three atoms together, the first of which is the number of edges, that is, the same as the number of edges emanating from the second atom, while the second of which is the number of edges, that is, the same as the number of edges emanating from the third atom. 3) We glue two atoms of complexity 2 but do not take all critical points.

О продолжении A -деформаций поверхностей положительной кривизны с краем

Татьяна Юрьевна Подоусова, Нина Владимировна Вашпанова

Аннотация Бесконечно малые (б.м.) ареальные деформации (A -деформации) высших порядков поверхностей включают в себя как частный случай A -деформации первого порядка и б.м. изгибания высших порядков. Исследование их является важным этапом в изучении непрерывных ареальных деформаций. Поэтому целесообразно рассмотреть задачу о возможности продолжения заданных б.м. ареальных деформаций первого порядка поверхностей в A -деформации конечного порядка.

Следует отметить, что эта задача для б.м. изгибаний рассматривалась в работах [1]-[3].

Ключевые слова A -деформации поверхностей, полное геодезическое кручение

УДК 514.76

§1. Об основных уравнениях A -деформаций высших порядков поверхностей

Пусть S - регулярная поверхность класса C^3 в E_3 -пространстве, гомеоморфная области G плоскости (или всей плоскости), задана векторно-параметрическим уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2),$$

где x^1, x^2 - криволинейные координаты текущей точки S .

Б.м. деформация n -ого порядка поверхности S с регулярными полями смещения $\bar{y}^k(x^1, x^2) \in C^3$ вида:

$$\bar{r}^*(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + \sum_{k=1}^n t^k \bar{y}^k(x^1, x^2), \quad (1)$$

при которой приращение элемента площади поверхности есть величина не менее чем $(n + 1)$ -го порядка относительно малого параметра t (чем мы будем пренебрегать), называется б.м. *ареальной деформацией*, или, кратко, *А-деформацией конечного порядка n* .

Частные производные векторов смещения разложим по линейно независимым векторам $\bar{r}_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$, ($i = 1, 2$) и \bar{n} (единичный вектор нормали S) в виде:

$$\bar{y}_i^k = c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $c_{i\alpha}$ - дискриминантный тензор S ($c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$,

$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, g_{\alpha\beta}$ -метрический тензор S), $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$ - некоторые тензорные поля на S .

В случае А-деформаций n -ого порядка они являются решением следующей системы уравнений [4]:

$$T_{,\alpha}^{\alpha i} - b_{\alpha}^i T^\alpha = 0, \quad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, \quad c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -L. \quad (3)$$

Запятой здесь обозначено ковариантное дифференцирование на базе $g_{ij}, b^{i\alpha} = g^{i\beta} b_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ - коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S , а функции L имеют следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} + \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2} (c_{i\gamma} c_{j\sigma} - g_{i\sigma} g_{j\gamma}) T^{\gamma\sigma} T^{ij} + \frac{1}{2} (c_{i\gamma} g_{j\sigma} + g_{i\sigma} c_{j\gamma}) T^{\gamma\sigma} A^{ij} + \frac{1}{4} c_{i\gamma} c_{j\sigma} A^{\gamma\sigma} A^{ij} \right), \quad (4)$$

где

$$A^{ij} = \sum_{m=1}^{k-1} \left(T^{is} T^{jt} g_{st} + T^i T^j \right). \quad (5)$$

Система уравнений (3) называется основной системой уравнений А-деформаций конечного порядка n . Она записана относительно произвольно выбранной на S координатной системы и содержит $4n$ уравнений относительно $6n$ неизвестных функций $T^{\alpha\beta}, T^\alpha, (k = \overline{1, n}, \alpha, \beta = 1, 2)$.

Функции F^k и D^{ij} соответственно имеют вид:

$$F^k = \frac{g_{22} + \imath g_{12}}{2\sqrt{g}} \left(\left(\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} \right)_1 + b_{11} T^1 \right) - \frac{g_{12} + \imath g_{11}}{2\sqrt{g}} \left(\left(\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} \right)_2 + b_{11} T^2 \right) + \frac{\sqrt{g}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} L \right) + D^{\alpha 1}_{,\alpha} - \imath D^{\alpha 2}_{,\alpha} \right) + \frac{1}{2} (2\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} - \imath \Gamma^2_{12}) L, \quad (11)$$

$$D^{ij} = \frac{1}{4H} \left(K d^{i\gamma} c^{j\lambda} g_{\alpha\gamma} g_{l\beta} B^{\alpha\beta} - c^{\alpha j} b_{\alpha\beta} B^{i\beta} \right) - \frac{1}{8H^2} c^{ij} \sum_{m=1}^{k-1} T^{\rho}_{,\rho} T^{\xi}_{,\xi}. \quad (12)$$

Здесь

$$B^{\alpha\beta} = \sum_{m=1}^{k-1} \left(T^{\alpha m} T^{\beta} + D^{\alpha s} D^{\beta t} g_{st} + \frac{1}{2} T^{\sigma}_{,\sigma} \left(D^{\alpha\beta} + D^{\beta\alpha} \right) \right), \quad (13)$$

Γ^k_{ij} -символы Хриstoffеля второго рода, d^{ij} -элементы матрицы, обратной для матрицы $\|b_{ij}\|$:

$$d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}.$$

Следует отметить, что функции A и B , которые входят в каждое уравнение системы (7) такие же, как и в уравнении, полученном Векуа И.Н. при исследовании б.м. изгибаний первого порядка поверхности положительной кривизны [5].

Система уравнений (7) является нелинейной неоднородной относительно функций $\overset{1}{W}, \overset{2}{W}, \dots, \overset{n}{W}$. Однако, при $k = 1$ первое уравнение системы будет линейным относительно функции $\overset{1}{W}$ (см., например, [7]), при $k = 2$ второе уравнение будет линейным относительно $\overset{2}{W}$, но не является линейным относительно $\overset{1}{W}$ ([8]) и т.д. При $k = n$ n -ое уравнение системы (7) не является линейным относительно $\overset{1}{W}, \overset{2}{W}, \dots, \overset{n-1}{W}$.

Кроме известных функций точки S и искомым комплексных функций $\overset{1}{W}, \overset{2}{W}, \dots, \overset{n}{W}$ в правые части $\overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \dots, \overset{n}{F}$ уравнений (7) входят и функции $\overset{1}{T}^{\alpha}, \dots, \overset{n}{T}^{\alpha}$. Для обеспечения определенности системы уравнений (7) тензорные поля $\overset{1}{T}^{\alpha}, \dots, \overset{n}{T}^{\alpha}$ считаем заданными в \bar{G} . Эти функции можна задать значениями вариаций единичной нормали [6]. В частности, доказано, что каждая А-тривиальная деформация n -ого порядка поверхности положительной гауссовой кривизны содержится в нулевом решении системы уравнений (7) при $\overset{k}{F} = 0$. Верно и обратное. Нулевым решением $\overset{k}{W} = 0$ системы уравнений

(7) при $F \stackrel{k}{=} 0$ определяются только А-тривиальные деформации конечного порядка n .

Б.м. ареальная деформация n -ого порядка называется *А-тривиальной* деформацией, если векторы смещения $\bar{y} \stackrel{k}{=} (x^1, x^2)$ из (2) окажутся векторами смещения для б.м. изгибания n -ого порядка.

Отсюда вытекает, что каждое решение системы уравнений (7), полученное при $F \stackrel{k}{\neq} 0$, ($k = \overline{1, n}$) а также любое ненулевое решение (7) при $F \stackrel{k}{=} 0$ определяют б.м. ареальную деформацию n -ого порядка поверхности положительной гауссовой кривизны, которая не является А-тривиальной.

§3. Вариации полного геодезического кручения при А-деформациях высших порядков поверхностей

Для произвольной регулярной поверхности полное геодезическое кручение определяется следующим образом [9]:

$$\tilde{K} = \frac{\rho}{g},$$

где $\rho = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2$, $\rho_{\alpha\beta}$ - элементы четвертой квадратичной формы S :

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (c_{\alpha i} b_{\beta}^i + c_{\beta i} b_{\alpha}^i).$$

В работе [10] доказано, что $\tilde{K} = -E$. Здесь $E = H^2 - K$ - эйлера разность. Используя ранее найденные k -тые вариации коэффициентов первой и второй квадратичных форм соответственно [6]:

$$2 \stackrel{k}{\varepsilon}_{ij} = \delta^k g_{ij} = T^{\alpha\beta} (c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta}) + c_{i\alpha} c_{j\beta} A^{\alpha\beta}, \quad (14)$$

$$\stackrel{k}{\beta}_{ij} = \delta^k b_{ij} = c_{i\alpha} b_{\beta j} T^{\alpha\beta} + c_{i\alpha} T_{,j}^{\alpha} - b_{ij} \stackrel{k}{L} + B^{ij}, \quad (15)$$

а также соотношение

$$Kd^{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta} = 2Hg^{\alpha\beta}$$

после некоторых преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \delta^k \tilde{K} = & Hc_{i\alpha} b_{\beta}^i T^{\alpha\beta} - (Hg_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) c^{j\beta} T_{,j}^{\alpha} + 3(2H^2 - K) \stackrel{k}{L} - \\ & - Hb_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + (Kd^{ij} - Hg^{ij}) B^{ij} + c^{i\alpha} c^{j\beta} \sum_{m=1}^{k-1} \beta^{ij} \left(\beta_{\alpha\beta}^{k-m} - 2H \varepsilon_{\alpha\beta}^{k-m} \right). \quad (16) \end{aligned}$$

Следует отметить, что при $k = 1$ из (16) получим вариацию $\delta \tilde{K}$, найденную при А-деформациях первого порядка [10].

§4. О продолжении А-деформаций первого порядка поверхностей

Б.м. ареальная деформация первого порядка поверхности S называется *продолжаемой* в А-деформации n -ого порядка, если вектор смещения $\frac{1}{y}(x^1, x^2)$ А-деформации первого порядка таков, что в случае б.м. ареальных деформаций конечного порядка n он также является вектором смещения.

Имеет место

Теорема 1.[11] *Односвязная поверхность S класса $C_\lambda^{\ell+4}$, ($0 < \lambda < 1, \ell \geq 0$) положительной гауссовой кривизны и без точек округления с границей $\partial S \in C_\lambda^{\ell+4}$ допускает нетривиальную А-деформацию первого порядка в классе $C_\lambda^{\ell+3}(\bar{G})$ поверхностей, при которой сохраняется полное геодезическое кручение вдоль края ∂S . Компоненты вектора смещения при этом зависят от двух наперед заданных функций класса $C_\lambda^{\ell+3}(\bar{G})$ и от одной произвольной постоянной.*

Под сохраняемостью полного геодезического кручения поверхности S при б.м. ареальной деформации n -ого порядка мы понимаем (как это и принято в теории б.м. деформаций) то, что все k -тые вариации полного геодезического кручения $\delta^k \tilde{K}$ до n -ого порядка включительно равны нулю.

Рассмотрим следующую задачу: допускают ли А-деформации первого порядка поверхности положительной гауссовой кривизны при условии, что полное геодезическое кручение сохраняется вдоль края ∂S , продолжение в А-деформации n -ого порядка.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Каждая б.м. ареальная деформация первого порядка поверхности S класса $C_\lambda^{\ell+4}$, ($0 < \lambda < 1, \ell \geq 0$) положительной гауссовой кривизны и без точек округления с краем $\partial S \in C_\lambda^{\ell+4}$, при которой сохраняется полное геодезическое кручение вдоль ∂S допускает продолжение в А-деформации n -ого порядка также сохраняющие полное геодезическое кручение вдоль края ∂S . Тензоры деформации при этом зависят от $2n$ наперед заданных функций класса $C_\lambda^{\ell+4}$ и от n произвольных (существенных) постоянных.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно построить функции $\bar{r}^*(x^1, x^2, t) \in C_\lambda^{\ell+4}(\bar{G})$ и удовлетворяющие следующим условиям:

а) $\bar{r}^*(x^1, x^2, 0) = \bar{r}(x^1, x^2);$

б) $\bar{r}_t^*(x^1, x^2, 0) = \frac{1}{y}(x^1, x^2);$

в) элемент площади S сохраняется до n -ого порядка включительно всюду в \bar{G} ;

г) вдоль края ∂S сохраняется полное геодезическое кручение, т.е $\delta^k \tilde{K} = 0, k = \overline{1, n}$.

Для этого в свою очередь достаточно построить последовательность функций $\overset{k}{\rho}(x^1, x^2)$, принадлежащих классу $C^{\ell+3}(\overline{G})$ и подчиненных следующим условиям:

- 1) $\overset{0}{\rho}(x^1, x^2) = \bar{\rho}(x^1, x^2)$;
- 2) $\overset{1}{\rho}(x^1, x^2) = \bar{y}(x^1, x^2)$;
- 3) при любом $k, 2 \leq k \leq n$ выполнена краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overset{k}{W}}{\partial \bar{z}} - A \overset{k}{W} - \bar{B} \overset{k}{\bar{W}} = F \left(\overset{1}{W}, \overset{2}{W}, \dots, \overset{k-1}{W}, \overset{1}{T^\alpha}, \overset{2}{T^\alpha}, \dots, \overset{n}{T^\alpha} \right), (G) \\ \delta^k \tilde{K} = 0, (\partial G) \end{cases} \quad (17)$$

Функции $\overset{k}{T^\alpha}$ считаем заданными в \overline{G} так, что

$$\overset{k}{T^\alpha} \in C^{\ell+4}(\overline{G}), (0 < \lambda < 1, \ell \geq 0), \quad (18)$$

$$\overset{k}{T^\alpha} = 0, \quad (\partial G), k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

На основании выражения k -той вариации полного геодезического кручения (16), равенства (19), краевое условие (17)₂ приобретает вид:

$$c_{i\alpha} b_\beta^i \overset{k}{T^{\alpha\beta}} = M, \quad (\partial G), \quad (20)$$

где функции M представлены в рекуррентной форме и зависят от известных и заданных функций поверхности S :

$$\begin{aligned} M = & b_{\alpha\beta} \overset{k}{A^{\alpha\beta}} - \frac{3(2H^2 - K)}{H} \overset{k}{L} - \frac{K d^{ij} - H g^{ij}}{H} \overset{k}{B^{ij}} - \\ & - \frac{1}{H} c^{i\alpha} c^{j\beta} \sum_{m=1}^{k-1} \overset{k}{\beta^{ij}} \left(\overset{k-m}{\beta_{\alpha\beta}} - 2H \overset{k-m}{\varepsilon_{\alpha\beta}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая равенства (9), (10), краевое условие (20) можно представить в следующем виде:

$$\alpha \overset{k}{u} + \beta \overset{k}{v} = \gamma, \quad (\partial G). \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha = & -2g^{12}, \quad \beta = g^{22} - g^{11}, \quad (\partial G) \\ \overset{k}{u} = & \sqrt{g} \overset{k}{T^{11}}, \quad \overset{k}{v} = -\sqrt{g} \overset{k}{T^{12}}, \quad \overset{k}{\gamma} = \frac{1}{b_{11}} \left(\overset{k}{M} - \frac{g^{11}}{\sqrt{g}} \overset{k}{L} \right). \end{aligned} \quad (\partial G) \quad (23)$$

Воспользовавшись равенствами (8), соотношения (22) запишем в комплексной форме:

$$\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \overset{k}{W}) = \gamma, \quad (\partial G) \quad (24)$$

где

$$\lambda = -2g^{12} + \iota(g^{22} - g^{11}), \quad (\partial G) \quad (25)$$

Тогда краевая задача (17) приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overset{k}{W}}{\partial \bar{z}} - A \overset{k}{W} - \bar{B} \overset{k}{W} = \overset{k}{F} \left(\overset{1}{W}, \dots, \overset{k-1}{W}, \overset{1}{T^\alpha}, \dots, \overset{n}{T^\alpha} \right), (G) \\ \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \overset{k}{W}) = \gamma, \quad (\partial G), \end{cases} \quad (26)$$

Докажем теперь существование последовательности функций $\frac{k}{\bar{\rho}}(x^1, x^2)$, принадлежащих классу $C^{\ell+3}(\bar{G})$ и удовлетворяющих условиям 1), 2), 3).

Положим $\frac{0}{\bar{\rho}}(x^1, x^2) = \bar{r}(x^1, x^2)$. Этим будет обеспечено выполнение свойства 1. Так как имеет место теорема 1, то вектор смещений $\frac{1}{\bar{y}}(x^1, x^2)$ А-деформации первого порядка поверхности S положительной гауссовой кривизны, удовлетворяющий краевой задаче (26) при $k = 1$ существует и принадлежит классу $C^{\ell+3}(\bar{G})$, а функция $\overset{1}{W} \in C^{\ell+2}(\bar{G})$ [11].

Полагая $\frac{1}{\bar{\rho}}(x^1, x^2) = \frac{1}{\bar{y}}(x^1, x^2)$, обеспечим выполнение свойства 2).

Предположим далее, что найдены все функции $\overset{k}{W}$ класса $C^{\ell+2}(\bar{G})$ для всех k от 1 до $n - 1$, где $n \geq 2$, удовлетворяющие краевой задаче (26):

$$\overset{k}{W} \in C^{\ell+2}(\bar{G}), k = \overline{1, n-1}. \quad (27)$$

Для нахождения функции $\overset{n}{W}$ достаточно решить краевую задачу (26) при $k = n$. Для этого нужно сначала вычислить индекс функции λ относительно границы ∂G области G . Функцию λ можно представить в виде:

$$\lambda = \frac{2g\sqrt{gE}}{\sqrt{K}} i \exp^{i\psi}, \quad (28)$$

где функция ψ связана с углом между координатными линиями определенной зависимостью ([5], стр.123). Отсюда следует, что

$$\operatorname{ind} \lambda = 0. \quad (29)$$

Учитывая дифференциальные свойства известных функций S , находим:

$$A, B, \overset{n}{F} \in C^{\ell+1}(\bar{G}), \quad (30)$$

$$\overset{n}{\mu}, \lambda \in C^{\ell+2}(\bar{G}). \quad (31)$$

В силу (29) заключаем, что однородная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{z}} - A \bar{W} - \bar{B} \bar{W} = 0, (G) \\ \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \bar{W}) = 0, \quad (\partial G), \end{cases}$$

имеет ровно одно линейно независимое решение ([5], т: 4.11, с.257), а неоднородная задача (26) при $k = n$ всегда разрешима ([5], т: 4.12, с.257).

В силу теоремы 4.16 ([5], с.312), (30),(31) заключаем, что $\bar{W} \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\bar{G})$, т.е. все функции

$$\bar{W} \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\bar{G}), k = \overline{1, n}. \quad (32)$$

Учитывая равенства (8),(9), (10), дифференциальные свойства известных и заданных функций поверхности S , а также (32), из соотношений (2) получим, что $\bar{y}_i \in C_{\lambda}^{\ell+2}(\bar{G})$.

Отсюда следует, что

$$\bar{y}_{i=\rho} \in C_{\lambda}^{\ell+3}(\bar{G}), k = \overline{1, n}$$

Таким образом, поверхности, задаваемые вектор-функцией вида (1) принадлежат классу $C_{\lambda}^{\ell+3}(\bar{G})$. Теорема доказана.

Следствие. При б.м. ареальной деформации n -ого порядка поверхности $S \in C_{\lambda}^{\ell+4}$ положительной гауссовой кривизны без точек округления со стационарным полным геодезическим кручением на ∂S главные направления геодезического кручения вдоль границы ∂S поверхности сохраняются.

Доказательство. Полное и среднее геодезические кручения соответственно можно представить в следующем виде [10]:

$$\tilde{K} = \tau_1 \cdot \tau_2, \quad 2\tilde{H} = \tau_1 + \tau_2,$$

где τ_1 и τ_2 - главные направления геодезического кручения.

Так как $\tilde{H} = 0$, то $\tau_1 = -\tau_2$. Это значит, что $\delta^k \tau_1 = -\delta^k \tau_2 = p$. Тогда

$$\delta^k \tilde{K} = -2\tau_1 p,$$

$$\tilde{E} = \tilde{H}^2 - \tilde{K} = -\tilde{K} = \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{4} \right)^2 = \frac{(2\tau_1)^2}{4} = \tau_1^2 \geq 0.$$

Отсюда

$$p = \frac{\delta^k \tilde{K}}{2\sqrt{\tilde{E}}}.$$

При $\delta^k \tilde{K} = 0$ получим, что главные направления геодезического кручения сохраняются. Следствие доказано.

Список литературы

1. *Исанов Т.Г.*, О продолжении бесконечно малых изгибаний //ДАН СССР, 1977, т.234, №6, с.1257-1260.
2. *Белоусова В.П., Караев В.* К вопросу о продолжении бесконечно малых изгибаний в аналитические //Известия АН Туркменской ССР, 1970, №6, с. 13-20.
3. *Климентов С.Б.* О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны //Матем. заметки, 1984, том 36, выпуск 3, 393–403.
4. *Дерманец Н.В.* Об основных уравнениях А-деформаций n -ого порядка поверхностей //Тезисы докладов научно-практич. конференции молодых ученых.-Одесса, 1983, ч.2, с.4-6.
5. *Векуа И.И.*, Обобщенные аналитические функции, Москва, Физматгиз, 1988, с.509.
6. *Дерманец Н.В.* Определение А-деформаций высших порядков овалоида по заданным значениям вариаций нормали //Деп.в УкрНИИНТИ № 56 Ук-84, Деп.от 13.01.84, 40 с.
7. *Безкоровайная Л.Л.* О бесконечно малых ареальных деформациях овальных поверхностей //Известия Вузов, математика, 1983, №5, с.69-71.
8. *Безкоровайная Л.Л., Солозина Л.И.* Приведение одной геометрической задачи к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений в комплексной форме //В сб. "Второй республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям Тезисы докладов, Одесса, 1978, с.36-38
9. *Вашпанова Т.Ю., Безкоровайна Л.Л.* LGT-сітка поверхні та її властивості //Вісник Київського національного університету імені Т.Шевченка, серія фізико-математичні науки, вип.№2, 2010. - с.7-11
10. *Подуосова Т.Ю., Безкоровайна Л.Л.* Повний геодезичний скрут та деформації мінімальної поверхні //Збірник праць міжнародного геометричного центру. - 2013. - Т.3, №.3. - с.15-22.
11. *Подуосова Т.Ю., Безкоровайна Л.Л., Вашпанова Н.В.* Про існування А-деформацій першого порядку поверхонь додатньої гаусової кривини з краєм //Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2014".-Одеса(2014)-с.7-8.

Татьяна Юрьевна Подуосова,

ОГАСА, Одесса, Украина

E-mail: tatyana_top@mail.ru

Нина Владимировна Вашпанова

ОНАПТ, Одесса, Украина

Tatyana Podousova

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine.

Nina Vashpanova

Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine.

A continuation A-deformations of surfaces of positive curvature with boundary

In the given work probed the problem of the possibility of continuation the given A-deformations of first order of surfaces with positive curvature in A-deformations of finite order.

Hyperspaces and spaces of probability measures on \mathbb{R} -trees

Olha Lozinska, Aleksandr Savchenko, Mykhailo Zarichnyi

Abstract We prove that the “sliced” hyperspaces and spaces of probability measures of the rooted \mathbb{R} -trees are also rooted \mathbb{R} -trees.

Keywords \mathbb{R} -tree, hyperspace, probability measure

Mathematics Subject Classification (2010) 37E25, 54B20, 60B05

1 Introduction

The real trees (\mathbb{R} -trees) were introduced by Tits [12]. Since then, they found numerous applications in different parts of mathematics. In particular, Kirk [9] established connections between \mathbb{R} -trees and the hyperconvex metric spaces introduced by Aronszajn and Panitchpakdi [1].

Some applications of \mathbb{R} -trees are also described in [2]. In particular, it is mentioned that \mathbb{R} -trees arise also in the coarse setting of word-hyperbolic groups.

Outside of mathematics, \mathbb{R} -trees are used in biology, medicine and computer science. In particular, applications in biology and medicine are related to the notion of phylogenetic tree [11].

In the paper [7], connections between geodesically complete rooted \mathbb{R} -trees and ultrametric spaces are established. The results of [7] are formulated in terms of categorical equivalence. This makes reasonable studying functorial constructions in appropriate categories of \mathbb{R} -trees. In the present note, we consider the hyperspaces and the spaces of probability measures of rooted \mathbb{R} -trees that are also rooted \mathbb{R} -trees.

A geodesic segment with endpoint $x, y \in X$ is the image of an isometric embedding $\alpha: [0, d(x, y)] \rightarrow X$. By $[x, y]$ we denote a geodesic segment with endpoints x and y .

Definition 1 We say that a metric space (X, d) is a geodesic space if for every $x, y \in X$ there exists a geodesic joining x and y .

Definition 2 A metric space (X, d) is called an \mathbb{R} -tree if

1. (X, d) is a geodesic space;
2. if $[x, y] \cap [x, z] = \{x\}$, then $[y, z] = [x, y] \cup [x, z]$;
3. for every $x, y, z \in X$ there exists $w \in X$ such that $[x, y] \cap [x, z] = [x, w]$.

It is known that a geodesic metric space X is an \mathbb{R} -tree if and only if X is 0-hyperbolic. It is also known that a geodesic space is an \mathbb{R} -tree if and only if for every two distinct points x, y of this space there exists a unique arc with endpoints x, y .

Definition 3 A rooted \mathbb{R} -tree consists of an \mathbb{R} -tree (X, d) and a point $x_0 \in X$ called the root.

Definition 4 A rooted \mathbb{R} -tree (X, d, x_0) is geodesically complete if every isometric embedding $f: [0, t] \rightarrow X$, where $t > 0$, with $f(0) = x_0$, extends to an isometric embedding $\bar{f}: [0, \infty) \rightarrow X$.

In this case the map \bar{f} is said to be a geodesic ray.

Given a rooted \mathbb{R} -tree (X, d, x_0) , we let $|x| = d(x, x_0)$, for every $x \in X$. For every $t > 0$, let $X_t = \{y \in X \mid |y| = t\}$ and $X_{\leq t} = \cup\{X_s \mid s \leq t\}$. If $0 \leq s \leq t$, we define a map $\pi_{ts}: X_t \rightarrow X_s$ by the condition $\pi_{ts}(x) = y$ if $\{y\} = [x, x_0] \cap X_s$. Remark that π_{ts} is uniquely determined.

Also, we define a retraction $\pi_t: X \rightarrow X_{\leq t}$ by the condition $\pi_t(x) = \pi_{st}(x)$, for every $x \in X_s$, where $s \geq t$.

Recall that a metric ϱ on a set Z is said to be an ultrametric if it satisfies the following *strong triangle inequality*:

$$\varrho(x, y) \leq \max\{\varrho(x, z), \varrho(z, y)\}, \quad x, y, z \in Z.$$

Lemma 1 *The restriction of the metric d onto X_t is an ultrametric.*

Proof Let $x, y, z \in X_t$. There exist $a, b \in X$ such that $[x, x_0] \cap [y, x_0] = [a, x_0]$, $[y, x_0] \cap [z, x_0] = [b, x_0]$. Without loss of generality, one may suppose that $[b, x_0] \subset [a, x_0]$. Then $[x, a] \cup [a, b] \cup [b, z]$ is a geodesic segment containing x and z .

Since $d(x, y) = 2d(x, a)$, $d(y, z) = 2d(y, b)$, and

$$d(x, z) = d(x, a) + d(a, b) + d(b, z) = d(x, b) + d(b, z),$$

we conclude that $d(x, z) \leq d(y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Denote by $\mathbb{R}\text{-TREE}$ the category whose objects are rooted \mathbb{R} -trees and whose morphisms are $|\cdot|$ -preserving continuous maps.

2 Hyperspaces

Given a metric space (X, d) , by $\exp X$ we denote the hyperspace of X , i.e. the set of all nonempty compact subsets of X . We endow $\exp X$ with the Hausdorff metric d_H ,

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset O_r(B), B \subset O_r(A)\},$$

where $O_r(C)$ denotes the r -neighborhood of $C \in \exp X$. For every $n \in \mathbb{N}$, denote by $\exp_n X$ the subspace

$$\{A \in \exp X \mid \text{the cardinality of } A \text{ is at most } n\}$$

of $\exp X$.

In the sequel, we suppose that (X, d, x_0) is a rooted \mathbb{R} -tree. Let

$$\text{e}\tilde{\text{xp}}X = \{A \in \exp X \mid A \subset X_t \text{ for some } t > 0\}.$$

Given $A \in \text{e}\tilde{\text{xp}}X$, we write $|A| = t$ whenever $A \subset X_t$. By \tilde{d}_H we denote the restriction of the Hausdorff metric onto the subspace $\text{e}\tilde{\text{xp}}X$.

Let us consider the function $\tilde{d}: \text{e}\tilde{\text{xp}}X \times \text{e}\tilde{\text{xp}}X \rightarrow \mathbb{R}$ defined as follows:

$$\tilde{d}(A, B) = \inf\{|A| + |B| - 2u \mid \pi_{|A|u}(A) = \pi_{|B|u}(B)\}.$$

Lemma 1 *The metric $\text{e}\tilde{\text{xp}}X$ on $\text{e}\tilde{\text{xp}}X$ coincides with the function \tilde{d} .*

Proof Let $A, B \in \text{e}\tilde{\text{xp}}X$, $|A| = t$, $|B| = s$. Suppose that $\tilde{d}(A, B) = r$, then there exists a unique $u \in \mathbb{R}_+$ such that $(t - u) + (s - u) = r$ $C - \pi_{tu}(A) = \pi_{su}(B)$.

Let $a \in A$, then there exists $b \in B$ such that $\pi_{tu}(a) = \pi_{su}(b)$. We conclude that $d(a, b) = t + s - 2u = r$.

Similarly, for every $b \in B$ there exists $a \in A$ such that $d(a, b) = r$.

Summing up, $\tilde{d}_H(A, B) \leq r$.

Conversely, if $\tilde{d}_H(A, B) \leq r$, then for every $a \in A$ there exists $b \in B$ such that $d(a, b) \leq r$. Let $[a, b]$ be a geodesic segment connecting a and b . Let c be a point of this segment with the minimal norm. Then $t - |c| + s - |c| \leq r$ and therefore $|c| \geq u = \frac{1}{2}(t + s - r)$.

It is easy to see that then $\pi_{tu}(A) = \pi_{su}(B)$, and therefore $\tilde{d}(A, B) \leq r$.

Corollary 1 *The space $\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X_t$ is zero-dimensional for every $t > 0$.*

Proposition 1 *The map $|\cdot|: \text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X \rightarrow \mathbb{R}_+$ is nonexpanding.*

Proof Let $A, B \in \text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$, $|A| = t$, $|B| = s$. Then there exists $r \leq \min\{t, s\}$ such that

$$\tilde{d}_H(A, B) = |t - r| + |s - r| = |t - r| + |r - s| \geq |t - r + r - s| = |t - s|$$

and we are done.

Proposition 2 *For every \mathbb{R} -tree X the space $\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$ is geodesic.*

Proof Let $A, B \in \text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$, $|A| = t$, $|B| = s$, and $\tilde{d}_H(A, B) = c$. Then there exists $r \leq \min\{t, s\}$ such that $\pi_{tr}(A) = \pi_{sr}(B)$ and $|t - r| + |s - r| = c$.

Consider a map $\gamma: [0, c] \rightarrow \text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$ defined by the formula:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \pi_{t, t-x}(A), & \text{if } x \in [0, t - r], \\ \pi_{s, s-c+x}(B), & \text{if } x \in [t - r, c]. \end{cases}$$

Then $\gamma(0) = \pi_{t,t}(A) = A$, $\gamma(c) = \pi_{s,s}(B) = B$.

It is easy to see that γ is a geodesic segment that connects A and B .

Proposition 3 *Let $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$ be an embedding. Then the function $t \mapsto |\gamma(t)|$ satisfies one of the three conditions:*

1. *it is increasing;*
2. *it is decreasing;*
3. *it is decreasing on $[0, t_0]$ and is increasing on $[t_0, 1]$, for some $t_0 \in [0, 1]$.*

Proof If none of the condition holds, then there exist $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 < t_2$, for which $|\gamma(t_1)| = |\gamma(t_2)|$ and $|\gamma(t)| \geq |\gamma(t_1)|$, for all $t \in [t_1, t_2]$.

Let $|\gamma(t_1)| = c$. Then the map $t \mapsto \pi_c \gamma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, is a map into a zero-dimensional space, and therefore is a constant map. Thus, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. This contradicts to the fact that γ is an embedding.

Proposition 4 *The space $\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$ does not contain an embedded S^1 .*

Proof Otherwise, there exist $A, B \in \text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$ and a geodesic $\gamma: [0, d_H(A, B)]$ such that $|\gamma(t)| \geq |A| = |B|$, for every $t \in [0, d_H(A, B)]$. However, this contradicts to Proposition 3.

Corollary 2 *The space $\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}X$ is an \mathbb{R} -tree.*

Proof This follows from the known characterization of \mathbb{R} -trees; see, e.g., [10].

Proposition 5 *The set $\text{exp}X$ is a closed subset in the hyperspace $\text{exp}X$.*

Proof Since the map $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, is continuous, so is the map $\text{exp}f: \text{exp}X \rightarrow \text{exp}\mathbb{R}_+$. Then

$$\text{exp}X = (\text{exp}f)^{-1}(\{\{t\} \mid t \in \mathbb{R}_+\}) = (\text{exp}f)^{-1} \text{exp}_1(\mathbb{R}_+)$$

and therefore is closed.

Corollary 3 *For every complete rooted \mathbb{R} -tree X , the \mathbb{R} -tree $\text{exp}X$ is complete.*

The following example demonstrates that the \mathbb{R} -tree $\text{exp}X$ is not geodesically complete even for a geodesically complete \mathbb{R} -tree X . Let $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{1\} \cup \{(n-1)/n \mid n \in \mathbb{N}\}, y \in \mathbb{R}_+\}$, we endow X with the geodesic metric inherited from \mathbb{R}^2 .

We suppose that $(0, 0)$ is the root. Then X_1 is homeomorphic to a convergent sequence. It is easy to see that, for every $r > 0$, the space X_{1+r} is a countable discrete space.

Define $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{exp}X$ by the formula $\gamma(t) = X_t$. Then this geodesic segment cannot be extended onto the set \mathbb{R}_+ .

The hyperspace construction determines an endofunctor in the category $\mathbb{R}\text{-TREE}$.

3 Probability measures on \mathbb{R} -trees

Let $P(X)$ denote the set of probability measures of compact support on a space X . It is known that the construction of probability measures of compact support determines a functor on the category of Tychonov spaces and continuous maps [3]. If (X, d) is a metric space, then the set $P(X)$ can be endowed with the Kantorovich metric [8]; if d is an ultrametric, then the set $P(X)$ can be endowed with an ultrametric d_{HV} ,

$$d_{HV}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \mid \mu(B_r(x)) = \nu(B_r(x)), \text{ for every } x \in X\}$$

(see [5, 13]; here $B_r(x)$ denotes the r -ball centered at x). Some categorical properties of this metric were investigated in [6].

If X is a rooted \mathbb{R} -tree, we let

$$\tilde{P}(X) = \{\mu \in P(X) \mid \text{supp}(\mu) \in \text{exp}X\}.$$

Given $\mu \in \tilde{P}(X)$, let $|\mu| = |\text{supp}(\mu)|$.

We endow $\tilde{P}(X)$ with a metric \hat{d} :

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \inf\{|\mu| + |\nu| - 2s \mid s \in [0, \min\{|\mu|, |\nu|\}]\}, \quad P(\pi_s)(\mu) = P(\pi_s)(\nu).$$

Note first that the function \hat{d} is well-defined. Indeed, $P(\pi_0)(\mu) = P(\pi_0)(\nu) = \delta_{x_0}$, for every $\mu, \nu \in \tilde{P}(X)$.

If $\hat{d}(\mu, \nu) = 0$, then there exists a sequence (s_i) in \mathbb{R}_+ such that $|\mu| + |\nu| - 2s_i \rightarrow 0$ and $s_i \leq \min\{|\mu|, |\nu|\}$. This implies, in particular, that $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = |\mu| = |\nu|$.

Since the sequence of maps (π_{s_i}) uniformly converges to $\pi_{|\mu|}$, we obtain

$$\begin{aligned} \mu &= P(\pi_{|\mu|})(\mu) = P(\lim_{i \rightarrow \infty} \pi_{s_i})(\mu) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(\pi_{s_i})(\mu) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} P(\pi_{s_i})(\nu) = P(\lim_{i \rightarrow \infty} \pi_{s_i})(\nu) = \nu. \end{aligned}$$

Symmetry of the function \hat{d} is obvious.

We are going to verify the triangle inequality. Let $\mu, \nu, \tau \in \tilde{P}(X)$, then there exist sequences

$$s_i \in [0, \min\{|\mu|, |\nu|\}], \quad t_i \in [0, \min\{|\nu|, |\tau|\}]$$

such that

$$P(\pi_{s_i})(\mu) = P(\pi_{s_i})(\nu), \quad P(\pi_{t_i})(\nu) = P(\pi_{t_i})(\tau)$$

and

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \lim_{i \rightarrow \infty} (|\mu| + |\nu| - 2s_i), \quad \hat{d}(\nu, \tau) = \lim_{i \rightarrow \infty} (|\nu| + |\tau| - 2t_i).$$

Without loss of generality, one may assume that $s_i \leq t_i$, for all $i \in \mathbb{N}$. Then $P(\pi_{s_i})(\mu) = P(\pi_{s_i})(\nu) = P(\pi_{s_i})(\tau)$ and we obtain

$$\hat{d}(\mu, \tau) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (|\mu| + |\tau| - 2s_i) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (|\mu| + |\nu| - 2s_i + |\nu| + |\tau| - 2t_i)$$

(since $2|\nu| - 2t_i \geq 0$)

$$\leq \hat{d}(\mu, \nu) + \hat{d}(\nu, \tau).$$

Proposition 1 *The restriction of the metric \hat{d} on the set $\tilde{P}(X)_t$ is an ultrametric for every $t \in \mathbb{R}_+$.*

Proof If $\mu, \nu, \tau \in \tilde{P}(X)_t$, then there exist $s_i, t_i \in \mathbb{R}_+$ such that

$$P(\pi_{s_i})(\mu) = P(\pi_{s_i})(\nu), \quad P(\pi_{t_i})(\nu) = P(\pi_{t_i})(\tau)$$

and

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \lim_{i \rightarrow \infty} (|\mu| + |\nu| - 2s_i), \quad \hat{d}(\nu, \tau) = \lim_{i \rightarrow \infty} (|\nu| + |\tau| - 2t_i).$$

Without loss of generality, one may assume that $s_i \leq t_i$, for all $i \in \mathbb{N}$. Then $P(\pi_{s_i})(\mu) = P(\pi_{s_i})(\nu) = P(\pi_{s_i})(\tau)$ and we obtain

$$\hat{d}(\mu, \tau) \leq \max\{\hat{d}(\mu, \nu), \hat{d}(\nu, \tau)\}.$$

We can prove even more, namely

Proposition 2 *The restriction of the metric \hat{d} on the set $\tilde{P}(X)_t$ coincides with the metric d_{HV} , for every $t \in \mathbb{R}_+$.*

Proof Suppose that $d_{HV}(\mu, \nu) < r$. Then, for every $x \in X$, $\mu(B_r(x)) = \nu(B_r(x))$. We are going to show that $P(\pi_{t,t-(r/2)})(\mu) = P(\pi_{t,t-(r/2)})(\nu)$.

Indeed,

$$P(\pi_{t,t-(r/2)})(\mu) = \sum_{i=1}^k \mu(B_r(x_i)) \delta_{\pi_{t,t-(r/2)}(x_i)}, \quad (1)$$

where $x_1, \dots, x_k \in \text{supp}(\mu)$ are such that $\{B_r(x_i) \mid i = 1, \dots, k\}$ is a disjoint cover of $\text{supp}(\mu)$. It is easy to see that the right-hand side is well-defined, i.e. does not depend on the choice of x_1, \dots, x_k . Applying the same arguments to the measure ν one easily concludes that the right-hand side of (1) is equal to $P(\pi_{t,t-(r/2)})(\nu)$.

On the other hand, suppose that $\hat{d}(\mu, \nu) < r$. Then $P(\pi_{t,t-(r/2)})(\mu) = P(\pi_{t,t-(r/2)})(\nu)$ and therefore, for every $x \in X_{t-(r/2)}$ and every $\varepsilon > 0$, we have

$$P(\pi_{t,t-(r/2)})(\mu)(B_\varepsilon(x)) = P(\pi_{t,t-(r/2)})(\nu)(B_\varepsilon(x)).$$

Then $\mu(B_{r+\varepsilon}(x)) = \nu(B_{r+\varepsilon}(x))$, for every $x \in X$ and therefore $d_{HV}(\mu, \nu) \leq r + \varepsilon$, for every $\varepsilon > 0$. Thus, $d_{HV}(\mu, \nu) \leq r$.

Denote by \tilde{d} the restriction of the metric \hat{d} onto $\tilde{P}(X)$.

Theorem 1 *The metric space $(\tilde{P}(X), \tilde{d})$ is an \mathbb{R} -tree.*

Proof The proof of this fact can be performed analogously to that of Corollary 3. We use the fact that the metric d_{HV} is an ultrametric.

Proposition 3 *The map $\text{supp}: \tilde{P}(X) \rightarrow \text{ex}X$ is nonexpanding.*

Proof Suppose that $\hat{d}(\mu, \nu) < r$, for some $r > 0$. Then there exists $c \in [0, \min\{|\mu|, |\nu|\}]$ such that $P(\pi_c)(\mu) = P(\pi_c)(\nu)$ and $|\mu| + |\nu| - 2c < r$.

Then $|\text{supp}(\mu)| = |\mu|$, $|\text{supp}(\nu)| = |\nu|$ and $\pi_c(\text{supp}(\mu)) = \pi_c(\text{supp}(\nu))$, whence

$$\tilde{d}_H(\text{supp}(\mu), \text{supp}(\nu)) \leq |\text{supp}(\mu)| + |\text{supp}(\nu)| < r.$$

Theorem 2 *Let X be a complete \mathbb{R} -tree. Then $\tilde{P}(X)$ is also a complete \mathbb{R} -tree.*

Proof Let (μ_i) be a Cauchy sequence in $\tilde{P}(X)$. Since, by Corollary 3, the space $\tilde{\text{exp}}X$ is complete and the map supp is nonexpanding, the Cauchy sequence $(\text{supp}(\mu_i))$ is convergent.

We follow the idea of the proof of [5, Theorem 3.5]. Define $\mu \in P(X)$ as follows. Let $x \in A$ and $r > 0$. We put $\mu(B_r(x)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(B_r(x))$.

Since (μ_i) is a Cauchy sequence, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $\mu_m(B_r(x)) = \mu_n(B_r(x))$, for every $m, n > n_0$. This means that the sequence $\mu_i(B_r(x))$ is eventually constant and, therefore, is convergent. Clearly, the function μ , which is defined on the balls, uniquely extends to a probability measure; we keep the notation μ for the latter.

By the definition, $\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i$.

Similarly as above one can demonstrate that the \mathbb{R} -tree $\tilde{P}(X)$ is not necessarily geodesically complete even if so is X . Actually, the example at the end of the previous section works.

The construction of space of probability measures determines an endofunctor in the category $\mathbb{R}\text{-TREE}$. The class of maps supp comprises a natural transformation from $\tilde{\text{exp}}$ to \tilde{P} .

4 Open problems

In [7], the category of geodesically complete, rooted \mathbb{R} -trees and equivalence classes of isometries at infinity is introduced. This leads to the following question.

Question 1 Are there counterparts of the hyperspace functor and the probability measure functor in the mentioned category?

The notion of ultrametric has its counterpart in the theory of fuzzy metric spaces (see [4]). A continuous operation $(a, b) \mapsto a * b: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is called a t-norm, if $*$ is associative, commutative, monotonic and 1 is its neutral element.

A function $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is said to be a fuzzy metric on a set X , if it satisfies the following conditions: (i) $M(x, y, t) > 0$; (ii) $M(x, y, t) = 1$ if and only if $x = y$; (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$; (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$; (v) the function $M(x, y, -): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is continuous.

The triple $(X, M, *)$ is called a fuzzy metric space ([3, 4]). If condition (iv) in the definition of a fuzzy metric $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is replaced with the stronger condition (iv') $M(x, y, t) * M(y, z, t) \leq M(x, z, t)$, then this function is called a fuzzy ultrametric.

A metric space (X, d) is an \mathbb{R} -tree if and only if it is complete, path-connected, and satisfies the so-called four point condition, that is,

$$d(x_1, x_2) + d(x_3, x_4) \leq \max\{d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4), d(x_1, x_4) + d(x_2, x_3)\}$$

for all $x_1, \dots, x_4 \in X$.

This leads to the following question.

Question 2 Is there a fuzzy counterpart of the four point condition? of the notion of \mathbb{R} -tree?

References

1. N. Aronszajn and P. Panitchpakdi, Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, *Pacific J. Math.* 6 (1956), 405–439.
2. M. Bestvina, \mathbb{R} -trees in topology, geometry, and group theory, *Handbook of geometric topology*, Amsterdam: North-Holland, 2002, pp. 55–91,
3. A. Ch. Chigogidze, On extension of normal functors, *Vestn. MGU. Ser. Matem.-Mekh.* 1984. no 6. P. 23–26.
4. A. George, P. Veeramani, On some result in fuzzy metric space, *Fuzzy Sets and System*, 64 (1994), 395–399.
5. J. I. den Hartog and E. P. de Vink, Building metric structures with the Meas functor, *Duke Math. J.* 34 (1967), 255–271; errata 813–814.
6. O.B. Hubal, M.M. Zarichnyi, Probability measure monad on the category of ultrametric spaces. *Appl. Gen. Topol.* 9(2008), No. 2, 229–237.
7. B. Hughes. Trees and ultrametric spaces: a categorical equivalence. *Adv. Math.* 189 (2004) no 1, 265–282.
8. L. V. Kantorovich, On the translocation of masses, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, V. 37(1942), Nos. 7-8, 227–229.
9. W. A. Kirk, Hyperconvexity of \mathbb{R} -trees, *Fund. Math.* 156 (1)(1998), 67–72.
10. A. Martini, Introduction to \mathbb{R} -trees, Preprint, 2009 (<http://www.math.uni-bielefeld.de/~mfluch/docs/r-trees.pdf>)
11. C. Semple and M. Steel, *Phylogenetics*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 24, 2003.
12. J. Tits, A Theorem of Lie-Kolchin for trees, in: *Contributions to Algebra: a Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin*, Academic Press, New York, 1977, 377–388.
13. E. P. de Vink and J. J. M. M. Rutten, Bisimulation for probabilistic transition systems: a coalgebraic approach, *Theoretical Computer Science* 221, no. 1/2 (1999), 271–293.

Olha Lozinska,

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

E-mail: olja.lviv133@gmail.com

Aleksandr Savchenko,

Kherson State Agrarian University, 23 Rozy Liuksemburg Str., 73006 Kherson, Ukraine

E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Mykhailo Zarichnyi

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Про комбінаторний інваріант псевдогармонічних функцій, заданих на k -зв'язній замкненій області

І.А. Юрчук

Анотація Нехай $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – псевдогармонічна функція, яка задана на k -зв'язній орієнтованій замкненій області $D \subset \mathbb{C}$, обмеженій жордановими кривими $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, $0 \leq k < \infty$. Нагадаємо, що даний клас функцій співпадає із класом неперервних функцій, що мають скінченне число сідлових критичних точок у внутрішності області та скінченне число локальних екстремумів на межі. У роботі [4], авторами повністю досліджено випадок $k = 0$, а саме, побудовано топологічний інваріант даного класу функцій, доведено його основні властивості, критерій їх топологічної еквівалентності та критерій реалізації спеціального класу графів як інваріанту функцій. В даній статті побудовано комбінаторний інваріант $\mathfrak{G}(f)$ функції f у випадку k -зв'язної замкненої області, який складається із графів Кронрода-Ріба звуження функції f на межу області D та зв'язних компонент тих ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції, які містять критичні або межові критичні точки. Згідно побудови, $\mathfrak{G}(f)$ є змішаним псевдографом (графом із кратними ребрами та петлями) зі строгим частковим порядком на вершинах, що індукується значеннями функції f . У графа $\mathfrak{G}(f)$ є два типи циклів: C -цикл (простий цикл, кожна пара суміжних вершин якого є порівняною) та L -цикл (простий цикл, кожна пара суміжних вершин якого є непорівняною). Автором доведено теорему про структуру інваріанту, а також той факт, що кількість C -циклів у комбінаторному інваріанті дорівнює кількості межових кривих, які обмежують дану k -зв'язну орієнтовану замкнену область.

Ключові слова псевдогармонічна функція, комбінаторний інваріант, k -зв'язна область

УДК 515.173.2

1 Вступ

Псевдогармонічні функції займають важливе місце серед функцій, що описують природні процеси. Наприклад, потенціал сил тяжіння в області, яка не містить мас, що притягуються; потенціал швидкостей безвихрового руху рідини; температура тіла за умов стабілізації розподілу тепла та ін.

У 40-60-х роках минулого століття з'явилась серія робіт, присвячених вивченню властивостей псевдогармонічних функцій на площині, авторами яких були М.Морс [2], Дж.Дженкінс [3] та В.Каплан [1]. Зокрема, було доведено рівність, що пов'язує числа критичних точок у внутрішності області з числом локальних екстремумів на межі, а також доведено теореми про локальне представлення околів критичних, межових критичних точок та локальних екстремумів на межі та інші результати.

У монографії [4] доведено критерій топологічної еквівалентності даного класу функцій на диску в термінах комбінаторних інваріантів, що побудовані за функціями і містять повну інформацію про їх поведінку, та критерії реалізації графа як інваріанта.

В даній роботі розглядаються псевдогармонічні функції, що задані на k -зв'язній орієнтованій замкненій області D , $D \subset \mathbb{C}$. Кожній функції з розглядуваного класу ставиться у відповідність комбінаторний інваріант – змішаний псевдограф зі строгим частковим порядком на вершинах. Автором доведено ряд теорем, що описують структуру даного інваріанту.

Автор висловлює подяку старшому науковому співробітнику відділу топології Інституту математики НАНУ Полуляху Євгену за корисні обговорення та цікавість до даної тематики.

2 Попередні відомості

Позначимо через D , $D \subset \mathbb{C}$ k -зв'язну орієнтовану замкнену область, яка обмежена жордановими кривими $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, $0 \leq k < \infty$. Припустимо, що γ_i , $i = \overline{1, k}$, лежать в середині γ_0 .

Нехай $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка псевдогармонічна функція. Нагадаємо основні означення, що пов'язані з даним класом функцій [2, 3, 4, 5].

Функція $f(x, y)$ гармонічна в точці (x_0, y_0) , якщо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Функція $f(z)$ псевдогармонічна в точці $z_0 = (x_0, y_0)$, якщо існує окіл $U(z_0)$ та гомеоморфізм φ околу $U(z_0)$ в себе такий, що $\varphi(z_0) = z_0$ та $f(\varphi(z))$, $z = (x, y)$, – гармонічна. Функція f псевдогармонічна в області, якщо вона псевдогармонічна в кожній її точці. Точка $z_0 \in D$ є *регулярною* точкою f , якщо існує відкритий її окіл $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \rightarrow D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = \operatorname{Re} z + f(z_0)$ для всіх $z \in U$. Точка $z_0 \in \partial D$ є *регулярною межовою* точкою f , якщо існує її окіл U в D та гомеоморфізм $h : U \rightarrow D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z_0) = 0$, $h(U \cap f^{-1}(f(z_0))) = \{0\} \times [0, 1)$, $h(U \cap \partial D^2) = (-1, 1) \times \{0\}$ і функція $f \circ h^{-1}$ є строго монотонна на інтервалі $(-1, 1) \times \{0\}$. Якщо точка $z_0 \in D$ не є регулярною точкою f , то вона називається *критичною*. За означенням всі критичні точки f є сідловими, тобто для кожної з них існує окіл $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \rightarrow D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = \operatorname{Re} z^n + f(z_0)$ для всіх $z \in U$. Число n назвемо кратністю сідлової точки z_0 . Точки межі ∂D , що не є ні межовими регулярними, ні ізольованими точками їх ліній рівня називаються *критичними межовими* точками.

Число $c \in$ критичним значенням f , якщо $f^{-1}(c)$ містить принаймні одну критичну точку. Число $c \in$ регулярним значенням f , якщо $f^{-1}(c)$ не містить критичних точок і гомеоморфне незв'язному об'єднанню інтервалів, які перетинаються з межею ∂D лише в своїх кінцях. Число $c \in$ *напіврегулярним* значенням f , якщо воно не є ні регулярним, ні критичним. Лінії рівня напіврегулярного значення містять лише межові критичні точки та локальні екстремуми $f|_{\partial D}$.

Нагадаємо [6], що *простим шляхом* із вершини u в вершину v називають послідовність ребер $e_1 = \{u, u_1\}$, $e_2 = \{u_1, u_2\}$, ..., $e_r = \{u_r, v\}$, що не містить повторювальних. *Простий цикл* – простий шлях, початкова та кінцева вершини якого співпадають. Вершини графу називаються *суміжними*, якщо вони є кінцями одного і того ж ребра (дуги).

Через $V(G)$ будемо позначати множину вершин графа G , а через $E(G)$ – множину його ребер (дуг).

Псевдографом G називається пара $(V(G), E(G))$, де $V(G)$ – непорожня множина, а $E(G)$ – сім'я неупорядкованих пар не обов'язково різних вершин.

3 Побудова інваріанта псевдогармонічної функції

Нехай c_1, c_2, \dots, c_n – критичні значення f , а a_1, a_2, \dots, a_m – напіврегулярні. Позначимо через $K(c_j)$ множину зв'язних компонент ліній рівня $f^{-1}(c_j)$, що містять критичні точки, а $L(a_s)$ – множина тих зв'язних компонент ліній рівня $f^{-1}(a_s)$, що містять межові критичні точки, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, m}$.

Схема побудови інваріанту:

1. Побудуємо граф $G(f) = \bigcup_i \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}) \bigcup_j K(c_j) \bigcup_s L(a_s)$, де $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$ – граф Кронрода-Ріба функції $f|_{\gamma_i}$.
2. У графі $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_0})$ замінимо ребра на орієнтовані дуги за наступним правилом. Нехай точкам $x, y, z \in \gamma_0$ відповідають елементи v_1, v_2, v_3 множини $V(\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_0}))$. Позначимо через $e_1 = (v_1, v_2)$ та $e_2 = (v_2, v_3)$ орієнтовані дуги, кінцями яких є вершини v_i , $i = \overline{1, 3}$. Дуги e_1 та e_2 належать множині $E(\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_0}))$ тоді і лише тоді, коли точка x слідує за y , а y слідує за точкою z на кривій γ_0 вздовж заданої орієнтації.
3. Введемо частковий порядок на множині $V(G(f))$ використовуючи функцію f . Скажемо, що $v_1 > v_2$, де $v_1, v_2 \in G(f)$, тоді і лише тоді, коли $f(x) > f(y)$, де v_1 (v_2) – вершина, що відповідає точці x (y), $x \in D$ ($y \in D$).

Позначимо через $\mathfrak{G}(f)$ комбінаторний інваріант псевдогармонічної функції f , який побудований за описаною вище схемою.

4 Структура інваріанта $\mathfrak{G}(f)$ як графа

Означення 1 C -циклом (L -циклом) інваріанту $\mathfrak{G}(f)$ називається простий цикл у якому довільна пара суміжних вершин v_i та v_{i+1} є порівняльною (непорівняльною).

Теорема 1 Якщо $\mathfrak{G}(f)$ – комбінаторний інваріант деякої псевдогармонічної функції $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка задана на k -зв'язній замкненій області D , то довільна компонента зв'язності Σ_j множини $\mathfrak{G}(f) \setminus (\bigcup_{i=0}^k \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}))$ є псевдографом, кожна пара вершин якого є непорівняною.

Доведення Нехай Σ_j – деяка зв'язна компонента множини $\mathfrak{G}(f) \setminus (\bigcup_{i=0}^k \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}))$. Покажемо, що Σ_j – псевдограф. Для цього достатньо показати, що існують випадки, коли у Σ_j є петлі та кратні ребра.

Припустимо, що $V(\Sigma_j) = \{v\}$ – одноелементна множина вершин компоненти. За побудовою інваріанту, існує точка z така, що $z \in D$ та $f(z) = c$, де c – або критичне або напіврегулярне значення функції f . Покладемо $\Theta = f^{-1}(c) \cup D$ і $\Theta \ni z$. Зауважимо, що Θ – компакт. Розглянемо наступні випадки:

Випадок 1: $z \in \partial D$. Тоді, z є або регулярною, або критичною межевою точкою. Зауважимо, що z не може бути локальним екстремумом. Оскільки, в її околі значення функції f у довільних точках, що відмінні від z , або більші, або менші ніж c , то $E(\Sigma_j) = \emptyset$.

Випадок регулярної точки також виключаємо, оскільки згідно її означення, існує окіл $U(z)$ в D і гомеоморфізм $h : U(z) \rightarrow D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z) = 0$ і $h(U \cap f^{-1}(c)) = \{0\} \times [0, 1)$. З іншого боку, $f(h^{-1}([0, 1))) = c$ і $h^{-1}([0, 1)) \subseteq \Theta$. Оскільки, Θ – компакт, то існує точка $z' \in D$. Згідно побудови інваріанту $\mathfrak{G}(f)$, існує вершина $v' \in V(\Sigma_j)$, $v \neq v'$, яка відповідає точці z . Отримали суперечність з припущенням.

Якщо ж z є критичною межевою точкою, то існує окіл $U(z)$ в D і гомеоморфізм $h : U(z) \rightarrow D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z) = 0$, $h(\dot{U}(z) \cap f^{-1}(c)) = \bigcup_{l=1}^m \dot{I}_l$, де $\dot{I}_l = (0; 1)$, $\dot{U}(z) = U(z) \setminus \{z\}$. Далі, для кожного l знайдемо точку $z'_l \neq z$ таку, що $z'_l \in \overline{\partial U(z) \cap h^{-1}(0; 1)}$. Кожна з точок $z'_l \in \text{Int} D$ і є регулярною точкою функції f (в протилежному випадку, ми отримуємо суперечність з тим фактом, що $V(\Sigma_j) = \{v\}$). Використовуючи означення регулярної точки, для кожної точки z'_l можна побудувати скінченну послідовність точок $\{\tilde{z}_i^l\}_{i=1}^{s_i}$ таку, що $f(\tilde{z}_i^l) = c$ при $l = \overline{1, m}$, $i = 1, s_l$. Якщо m – непарне число, то із компактності Θ слідує, що завжди знайдеться номер l_i такий, що $\tilde{z}_{s_{l_i}}^l = z' \neq z$, де $z' \in D$. А це суперечить припущенню про одноелементність множини $V(\Sigma_j)$, оскільки за побудовою інваріанту точці z' буде відповідати деяка вершина v' . Отже, m – парне число. Тому, для кожного індексу l точки знайдуться точки $\tilde{z}_{s_l}^l = z$. А це означає, що існує R ($R = \frac{m}{2}$) число петель $u_r(t)$ таких, що $u_r(0) = u_r(1) = z$ і $f(u_r(t)) = c$ при $t \in [0; 1]$, $r = \overline{1, R}$. Відмітимо також, що кожному r відповідає дві послідовності $\{t_i^r\}_{i=1}^{s_i}$ та $\{t_j^r\}_{j=1}^{s_j}$, де $l_i, l_j \in \{1, m\}$, значень параметра $t \in (0; 1)$ таких, що $u_r(t_j^r) = \tilde{z}_i^{l_j}$ і $u_r(t_i^r) = \tilde{z}_i^{l_i}$, де $r = \overline{1, R}$. Розглянемо компоненти множини $D \setminus u_r(t)$ та позначимо їх через D_1 та D_2 . Оскільки $f|_{D_1}$ та $f|_{D_2}$ є псевдогармонічними і такими, що $f|_{u_r(t)=\partial D_1} = f|_{u_r(t)=\partial D_2} = c$, то як в $\text{Ind} D_1$, так і в $\text{Ind} D_2$ існують межові криві $\gamma_i \in \partial D$. Згідно побудови інваріанта $\mathfrak{G}(f)$, кожній петлі $u_r(t)$, $r = \overline{1, R}$, відповідає ребро $e_r = \{v, v\} \in E(\Sigma_j)$.

Випадок 2: $z \in \text{Ind}D$. Тоді, z є критичною точкою. Із означення критичної точки та використовуючи міркування, що аналогічні до випадку межевої критичної точки, впливає, існує n , $n > 1$, петель $u_r(t)$ таких, що $u_r(0) = u_r(1) = z$ і $f(u_r(t)) = c$ при $t \in [0; 1]$. А це означає, що в Σ_j ребра $e_r = \{v, v\} \in E(\Sigma_j)$ є петлями, де $r = \overline{1, n}$

Наступний крок доведення: припустимо, що $V(\Sigma_j) = \{v_1, v_2\}$. За побудовою інваріанту, існують точки z_1 і z_2 такі, що $z_1, z_2 \in D$ та $f(z_1) = f(z_2) = c$, де c – або критичне або напіврегулярне значення функції f . Позначимо через Θ ту зв'язну компоненту лінії рівня $f^{-1}(c)$, що містить дані точки. Розглянемо випадки:

Випадок 1: $z_1 \in \partial D$. Тоді, по аналогії з таким же випадком для припущення про одноелементну множину вершин, точка z_1 не є локальним екстремумом. Нехай z є регулярною. Тоді, із її означення та компактності Θ випливає, що існує точка $z' = z_2 \in \partial D$, яка є також регулярною (випадок критичної межевої точки виключаємо, оскільки отримаємо суперечність з припущенням про двоелементність множини $V(\Sigma_j)$). Отже, Θ – містить лише регулярні точки, що суперечить побудові $\mathfrak{G}(f)$. Отже, z_1 є критичною межевою точкою. По аналогії з таким же випадком для попереднього припущення, побудуємо n послідовностей точок $\{\tilde{z}_j^i\}$, де $i = \overline{1, n}$ і для кожного такого індексу i існує значення s_i таке, що $j = 1, s_i$, таку, що $f(\tilde{z}_j^i) = c$. Тоді, можливо два випадки: або $\tilde{z}_{s_i}^i = z_1$, або $\tilde{z}_{s_i}^i = z_2$. У першому випадку, отримаємо скінченне число петель $u_r(t)$ таких, що $u_r(0) = u_r(1) = z_1$, $f(u_r(t)) = c$, де $t \in [0; 1]$, а в другому, скінченне число шляхів $u'_r(t)$ таких, що $u'_r(0) = z_1$, $u'_r(1) = z_2$, $f(u'_r(t)) = c$, де $t \in [0; 1]$. Припустимо, що існує два шляхи $u'_{r_1}(t)$ та $u'_{r_2}(t)$ такі, що сполучають точки z_1 та z_2 . Розглянемо компоненти множини $\overline{D \setminus (u'_{r_1}(t) \cup u'_{r_2}(t))}$ та позначимо їх через D_1 та D_2 . Оскільки $f|_{D_1}$ та $f|_{D_2}$ є псевдогармонічними і такими, що $f|_{u'_{r_1}(t) \cup u'_{r_2}(t) = \partial D_1} = f|_{u'_{r_1}(t) \cup u'_{r_2}(t) = \partial D_2} = c$, то як у $\text{Ind}D_1$, так і у $\text{Ind}D_2$ існують межеві криві $\gamma_i \in \partial D$, а згідно побудови інваріанта $\mathfrak{G}(f)$ існує існує два ребра $e_1 = \{v_1, v_2\}$ та $e_2 = \{v_1, v_2\}$, які належать множині $E(\Sigma_j)$ і є кратними ребрами.

Випадок 2: $z_1 \in \text{Ind}D$. Тоді, z_1 є критичною точкою. По аналогії з критичною межевою точкою випадку 1, використовуючи означення критичної точки, можна показати, що існують як петлі в z_1 , так і шляхи, що сполучають z_1 та z_2 .

Доведемо, що довільна пара вершин множини $V(\Sigma_j)$ є непорівняльною. Нехай v' та v'' – деякі вершини Σ_j . Оскільки Σ_j – зв'язний псевдограф,

то існує принаймні один шлях з ребер $e_1 = \{v' = v_0, v_1\}$, $e_2 = \{v_1, v_2\}$, ..., $e_n = \{v_{n-1}, v_n = v''\}$, що сполучає v' та v'' . Згідно побудови інваріанта $\mathfrak{G}(f)$, кожному з ребер e_i , $i = \overline{0, n}$, відповідає шлях $u_i(t)$ такий, що $u_i(0) = z_i$, $u_i(1) = z_{i+1}$ і $f(u_i(t)) = c$ при $t \in [0; 1]$, де точки $z_i \in D$ відповідають вершинам $v_i \in V(\Sigma_j)$. Звідки випливає, що $v' = v_1 = \dots = v_{n-1} = v''$. Отже, v' та v'' є непорівняльні.

Наслідок 1 $\mathfrak{G}(f)$ – змішаний псевдограф зі строгим частковим порядком на вершинах.

Наслідок 2 Якщо в Σ_j існує або петля або кратні ребра, то в $\mathfrak{G}(f)$ існує L -цикл.

Теорема 2 Нехай $\mathfrak{G}(f)$ – інваріант деякої псевдогармонічної функції f , заданої на k -зв'язній замкненій області D . Тоді, кількість його C -циклів рівна числу $k + 1$.

Доведення Нехай γ_i – жорданові криві, що обмежують D так, що γ_i , $i = \overline{1, k}$, лежать всередині γ_0 . Зрозуміло, що $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$, $i = \overline{0, k} \in C$ -циклом. Позначимо через Γ' підграф інваріанту $\mathfrak{G}(f)$, отриманий додаванням до $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$, $i = \overline{0, k}$, вершин, які відповідають точкам, що одночасно належать як множинам $K(c_j)$ та $L(a_s)$, де c_j – критичні, а a_s – напіврегулярні значення f , так і γ_0 . Покажемо, що $\Gamma' - C$ -цикл.

Нехай v' та v'' довільна пара суміжних вершини в Γ' . Дані вершини відповідають точкам z' та z'' , де $z', z'' \in \partial D$. Причому, точці z' відповідає вершина v' , а точці $z'' - v''$. Припустимо, що $v' = v''$. Це означає, що $f|_{\gamma_i}(v') = f|_{\gamma_i}(v'')$. Оскільки $f|_{\gamma_i}$ задовольняє умовам теореми Ролля, то існує локальний екстремум z , $z \in (z'; z'') \subset \gamma_i$. Оскільки $\Gamma' \supset \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$, то існує вершина \tilde{v} , що відповідає точці z , та ребра (\tilde{v}, v') і (v'', \tilde{v}) , які відповідають $f|_{[z'; z]}$ та $f|_{[z; z'']}$. А це суперечить тому, що вершини v' та v'' суміжні.

Якщо припустити, що кількість C -циклів більша $k + 1$, то існує C -цикл, прообрази всіх вершин (точок області D) якого лежать у $\text{Int}D$. Згідно побудови інваріанту, такі вершини є непорівняльні, що суперечить визначенню C -циклу.

5 Висновки

В даній роботі побудовано комбінаторний інваріант $\mathfrak{G}(f)$ деякої псевдогармонічної функції f , що задана на k -зв'язній орієнтованій замкненій області

D , який є змішаним псевдографом зі строгим частковим порядком на вершинах, і має певні структурні особливості, що індукуються властивостями псевдогармонічної функції. Зокрема, доведено, що кожна із зв'язних компонент множини $\mathfrak{G}(f) \setminus (\bigcup_{i=0}^k \Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i}))$, де $\Gamma_{K-R}(f|_{\gamma_i})$ – граф Кронрода-Ріба функції $f|_{\gamma_i}$, є псевдографом, кожна пара вершин якого є непорівняною.

Література

1. W. Kaplan, Topology of level curves of harmonic functions // Transactions of Amer.Math.Society., **63** (1948), 514-522.
2. M. Morse, The topology of pseudo-harmonic functions// Duke Math.J., **13** (1946), 21-42.
3. M. Morse, J. Jenkins, The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces //Fund.Math., **39** (1952), 269-287.
4. E. Polulyakh, I. Yurchuk, On the pseudo-harmonic functions defined on a disk. Pracy Inst.Math.Ukr., Volume 80. - Kyiv: Inst.Math.Ukr., 2009. - 151 pp.
5. М. Морс, Топологические методы теории функций комплексного переменного/ под ред. Маркушевич А.И. - М, 1951.
6. Ф. Харари, Теория графов. - М.:Наука, 1973.

І.А. Юрчук

Національний авіаційний університет, Київ, Україна.

E-mail: iyurch@ukr.net

Iryna Iurchuk

On combinatorial invariant of pseudo-harmonic functions defined on k -connected closed domain

Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a pseudo-harmonic function defined on k -connected oriented closed domain $D \subset \mathbb{C}$ whose boundary consists of closed Jordan curves $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, $0 \leq k < \infty$. We remind that this class of functions coincides with continuous functions which have finitely many number of critical points at interior and on boundary of domain.

In [4] authors researched a case of $k = 0$: for such functions a topological invariant is constructed, its main properties, the criterion of their topological equivalence and conditions of realization of some type of graphs as given invariant are proved.

In this paper, for case $k > 0$ the combinatorial invariant $\mathfrak{G}(f)$ of pseudo-harmonic function f is constructed that consists of the Reeb graphs of restriction of f on boundary of D and connected components such critical and semiregular levels which contain critical and boundary critical points. According to a

construction of $\mathfrak{G}(f)$, it's a mixed pseudograph (graph with multiple edges and loops) with strict partial order on vertices which induced by values of f . There are two types of cycles in $\mathfrak{G}(f)$. In particular, C -cycle (a simple cycle whose any pair of adjacent vertices are comparable) and L -cycle (a simple cycle whose any pair of adjacent vertices are noncomparable). Theorem of an invariant structure and a fact that a quantity of C -cycles of combinatorial invariant is same as a number of boundary curves of k -connected closed oriented domain are proved.

Keywords. Pseudo-harmonic function, combinatorial invariant, k -connected domain

Geometry of Chaos: Advanced approach to forecasting evolution of low-attractor chaotic systems

A.V. Glushkov , V.M. Kuzakon , P.A. Zaichko

Abstract It is presented an advanced chaos-geometrical approach to treating of evolution of low-attractor chaotic systems. It combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc. Some technical application of an approach is given

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, chaos theory

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

Earlier [1-10] we have developed a new, chaos-geometrical combined approach to treating and analysis of chaotic dynamics of complex dynamical systems. Here we present its advanced version and as example list the results of its application to studying temporal evolution of the complex chaotic system on example of time series of intensity in GaAs / GaAlAs Hitachi HLP1400 laser.

Let us remind that during the last two decades, many studies in various fields of science have appeared, in which chaos theory was applied to a great number of dynamical systems, including those are originated from nature (e.g. [1-22]). The outcomes of such studies are very encouraging, as they reported very good predictions using such an approach for different systems.

2. Advanced chaos-geometrical approach to evolution of complex dynamical system

2.2.1. Data and methodics

The time series of intensity in GaAs / GaAlAs Hitachi HLP1400 laser are presented in [1].

Following to [1-10], further we formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

Let us remind that following to [1,10], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. In ref. [4] it is suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

In [1,10] it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system

is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

2.2.2 The results for time series

Table 1 summarizes the results for the time lag calculated for first 10^3 values of time series.

Table 1. The correlation dimension d_2 , embedding dimension, based on the algorithm of false nearest neighboring points d_N calculated for different values of the delay time τ for the time series of intensity in GaAs / GaAlAs Hitachi HLP1400 laser

	Chaos		Hyperchaos	
τ	58	6	67	10
d_2	3.4	2.2	8.4	7.4
d_N	5	4	11	8

It is worth to note that the values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, are usually chosen as τ . however, it is known that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values in Table 1. Very large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using the known Grassberger-Procaccia method.

2.2.3. Nonlinear prediction model

The fundamental problem of theory of any dynamical system is in predicting the evolutionary dynamics of a chaotic system. Let us remind following to [1-,2,10] that the cited predictability can be estimated by the Kolmogorov entropy, which is proportional to a sum of positive LE. As usually, the spectrum of LE is one of dynamical invariants for non-linear system with chaotic behaviour. The limited predictability of the chaos is quantified by the local and global LE, which can be determined from measurements. The LE are related to the eigenvalues of the linearized dynamics across the attractor. Negative values show stable behaviour while positive values show local unstable behaviour. For chaotic systems, being both stable and unstable, LE indicate the complexity of the dynamics. The largest positive value determines some average prediction limit. Since the LE are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and hence the choice of trajectory, and they do comprise an invariant measure of the attractor. An estimate of this measure is a sum of the positive LE. The estimate of the attractor dimension is provided by the

conjecture d_L and the LE are taken in descending order. The dimension d_L gives values close to the dimension estimates discussed earlier and is preferable when estimating high dimensions. To compute LE, we use a method with linear fitted map, although the maps with higher order polynomials can be used too. Non-linear model of chaotic processes is based on the concept of compact geometric attractor on which observations evolve. Since an orbit is continually folded back on itself by dissipative forces and the non-linear part of dynamics, some orbit points $[1,10] \mathbf{y}^r(k)$, $r = 1, 2, \dots, N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k . One can then choose some interpolation functions, which account for whole neighbourhoods of phase space and how they evolve from near $\mathbf{y}(k)$ to whole set of points near $\mathbf{y}(k+1)$. The implementation of this concept is to build parameterized non-linear functions $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ which take $\mathbf{y}(k)$ into $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ and use various criteria to determine parameters \mathbf{a} . Since one has the notion of local neighbourhoods, one can build up one's model of the process neighbourhood by neighbourhood and, by piecing together these local models, produce a global non-linear model that capture much of the structure in an attractor itself. Table 2 shows the global LE.

Table 2. First two LE (λ_1, λ_2), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and the Kolmogorov entropy K_{entr} for the time series of intensity in GaAs / GaAlAs Hitachi HLP1400 laser (for two series of calculations)

	Chaos 1	Chaos 2	Hyperchaos 1	Hyperchaos 2
λ_1	0.151	0.154	0.517	0.521
λ_2	0.00001	0.00003	0.192	0.194
d_L	1.8	1.9	7.1	7.2
K_{entr}	0.15	0.17	0.71	0.73

The presence of the two (from six) positive λ_i suggests the system broadens in the line of two axes and converges along four axes that in the six-dimensional space.

3. Conclusions

In this paper we considered an advanced chaos-geometrical approach to treating of chaotic dynamics of complex systems. The approach combines the non-linear analysis methods to dynamics, such as the correlation integral analysis, the LE analysis, surrogate data method etc. We have investigated a chaotic behaviour in the time series of intensity in GaAs / GaAlAs Hitachi HLP1400 laser and proved an existence of as low-D as high-D chaos. We presented an effective non-

linear prediction model and realized a successful short-range forecast of intensity evolution. Earlier the same successful results were received for other cases and systems [1-10]. All considered examples has shown high perspectives of a new approach methods to treating dynamics of very complicated chaotic systems.

References

1. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
2. Glushkov A.V., Chaos-geometrical universal numerical approach to life science processes: Theoretical basis's// Computational Life Sciences (Springfer), in print.
3. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-6(??)-6-12.
4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A. Atmospheric teleconnection patterns: wavelet analysis// Nonlin. Proc.in Geophys.-2004.-V.11,N3.-P.285-293.
5. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V.,Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
6. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284-7292.
7. Bunyakova Yu.Ya., Khetselius O.Yu., Non-linear prediction statistical method in forecast of atmospheric pollutants//Proc. of the 8th International Carbon Dioxide Conference.-Jena (Germany).-2009.- P.T2-098.
8. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Non-linear prediction method in forecast of air pollutants CO_2 , CO // Transport and Air Pollution. - Zurich: ETH University Press (Switzerland). -2010. - P.131-136.
9. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems - Theory and Applications. - Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.- LIF111 (6p).
10. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. of Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N3.-P.6-14.
11. Lanfredi M., Macchiato M.: Searching for low dimensionality in air pollution time series.*EurophysicsLetters* 1997, 1997, 589-594.
12. KoP-ak K., Saylan L., Sen O., Nonlinear time series prediction of O_3 concentration in CityplaceIstanbul. *AtmosphericEnvironment* (Elsevier) 34, 2000, 1267-1271.
13. Kuznetsov S.P., Dunamical chaos.-Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P.
14. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.
15. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712-716.
16. Grassberger P., SnplaceProcaccia SnI., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189-208.
17. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134-1140.
18. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366-381
19. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230-242
20. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082-1085

21. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B., Farmer J., Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data// *Physica D*.-1992.-Vol.58.-P.77-94.
22. Fischer I., Hess O., Elsaber W., Gobel E., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in: Peitgen H.-O., Walter H.-O. (Eds.), *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*. Lecture Notes in Mathematics No. 730. Springer, Berlin.-1994.Vol.73.-pp.2188-2192.

A.V. Glushkov

Mathematics Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: dirac13@mail.ru

V.M. Kuzakon

Mathematics Department

National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine

E-mail: vkuzakon@ukr.net

P.A. Zaichko

Mathematics Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: quantber@mail.ru

Quantum Geometry: Application of energy-amplitude approach to calculating parameters of multi-photon resonances for some complex atomic systems

Andrey A. Svinarenko

Abstract Within quantum geometry it is presented a generalized energy-amplitude approach to calculation of the energies (eigen values) and widths of multi-photon (autoionization) resonances for some complex systems. The improved numerical data for energies and widths are presented for magnesium and krypton.

Keywords Multiphoton resonances · An advanced energy-amplitude approach · Eigen functions and energy eigen values

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

At present time a great progress can be noted in development of a quantum geometry and quantum mechanics. [1]–[9]. It is provided mainly due to the carrying out more correct and effective mathematical methods of solving eigen function and eigen values tasks for multi-body complex quantum systems in relativistic approximation and new algorithms of accounting for the complex exchange-correlation effects. Let us remind that the mathematical methods of calculation of the energy and width parameters of resonances are usually divided into a few main groups. First, the well known, classical multi-configuration Hartree-Fock method (as a rule, the relativistic effects are taken into account in the Pauli approximation or Breit hamiltonian etc.) allowed to get a great number of the useful spectral information about light and not heavy systems, but in fact it provides

only qualitative description of spectra of the heavy quantum systems. Second, the multi-configuration Dirac-Fock (MCDF) method is the most reliable version of calculation for multielectron systems with a large charge. These methods can be served as an initial basis for the further studying multi-photon and autoionization resonances properties. It is worth also remind about the Green's function method (the imaginary part of the Green function pole for atomic quasienergetic state), the density - matrix formalism (the stochastic equation of motion for density - matrix operator and its correlation functions), a time-dependent density functional formalism, direct numerical solution of the Schrödinger (Dirac) equation, multi-body multi-photon approach etc. [1]–[8]. In [2],[4] authors extended the non-Hermitian multi-state Floquet dynamics approach by Day to treat one-electron atomic system to the case of general multi-electron ones. The approach based on the eigenchannel R-matrix method and multichannel quantum-defect theory , introduced by Robicheaux and Gao to calculate two-photon processes in light alkaline-earth atoms has been implemented by Luc-Koenig et al [4] in j-j coupling introducing explicitly spin-orbit effects and employing both the length and velocity forms of the electric dipole transition operator. Nevertheless in many calculations there is a serious problem of the gauge invariance, connected with using non-optimized one-electron representation. In many aspects this problem is connected with correct accounting for the complex exchange-correlation effects (such as polarization and screening effects, a continuum pressure etc.). In this paper, which goes on our studying [5]–[10], we present a generalized version of an energy-amplitude approach to calculation of the characteristics of resonances in atomic systems. It is based on the relativistic many-body perturbation theory (PT) and more correct numerical accounting for the complex polarization, screening effects and continuum pressure. There are presented more exact quantitative data on energy and widths of resonances in magnesium (test data) and krypton.

2 An advanced energy relativistic approach to resonances

Here we briefly consider the main blocks of an earlier presented formally exact approach based on the QED perturbation theory [5]–[12], which allow to calculate the energies and widths of complex resonances in atomic spectra. For definiteness, as example, we consider spectrum of magnesium. As usually [10], one may write an expression for the two-photon amplitude for the transition from an initial state Ψ_0 with energy E_0 to a final state $|\Psi_f\rangle$ with energy $E_f = E_0 + 2\omega$ as follows:

$$T_{f0}^{(2)} = \lim_{n \rightarrow 0_+} \int d\epsilon \langle \Psi_f | D \times e | \epsilon \rangle (E_0 + \omega - \epsilon + in)^{-1} \langle \epsilon | d \times e | \Psi_0 \rangle. \quad (1)$$

Here D is the electric dipole transition operator (in the length r form), e is the electric field polarization and ω is a laser frequency. The integration in equation 1 is meant to include a discrete summation over bound states and integration over continuum states. This moment is more complicated in a whole computation scheme. Usually an explicit summation is avoided by using the Dalgarno-Lewis by means the setting [3]:

$$T_{f0}^{(2)} = C_f \langle \| D \times e \| A_p \rangle, \quad (2)$$

where $\langle \| \dots \| \rangle$ is a reduced matrix element and C_f is an angular factor depending on the symmetry of the Ψ_f , A_p , Ψ_0 states. A_p can be founded from solution of the following inhomogeneous equation [3]

$$(E_0 + \omega \times H | A_p \rangle = (D \times e) | \Psi_0 \rangle \quad (3)$$

at energy $E_0 + \omega$, satisfying outgoing-wave boundary condition in the open channels and decreasing exponentially in the closed channels. The total cross section (in $\text{cm}^4 \text{W}^{-1}$) is defined as

$$\sigma/I = \sum_J \sigma_J/I = 5.7466 \times 10^{-35} \omega_{\text{au}} \sum_J |T_{J,0}^{(2)}|^2, \quad (4)$$

where I (in W/cm^2) is a laser intensity. To describe two-photon processes there can be used different quantities [9]: the generalized cross section $\sigma^{(2)}$, given in units of cm^4s , by

$$\sigma_{\text{cm}^4\text{s}}^{(2)} = 4.3598 \times 10^{-18} \omega_{\text{au}} \sigma / I_{\text{cm}^4\text{W}^{-1}} \quad (5)$$

and the generalized ionization rate $\Gamma^{(2)}/I^2$, (and probability of to-photon detachment) given in atomic units, by the following expression

$$\sigma / I_{\text{cm}^4\text{W}^{-1}} = 9.1462 \times 10^{-36} \omega_{\text{au}} \Gamma_{\text{au}}^{(2)} / I_{\text{au}}^2 \quad (6)$$

Described approach is realized as computer program block in atomic numeric code "Super-atom" (c.f. [2]–[7], which includes a numeric solution of the Dirac equation and calculation of the matrix elements of the Eqs. 1–5 type. In order to develop a generalized version of an approach we introduce three new blocks: 1) in an advanced scheme one should use more corrected in comparison with [9], [10] total gauge invariant procedure for generating the one-particle eigen

Table 1 Characteristics for $3p^{21}S_0$ resonance of atom of the magnesium: E - energy, counted from ground state (cm^{-1}), Γ - autoionization width (cm^{-1}), σ/I - maximum value of generalized cross-section (cm^4W^{-1}).

Methods	E	Γ	σ/I
Luc-Koenig E. et al, 1997	without	account	SE
Length form	68492	374	$1,96 \cdot 10^{-27}$
Velocity form	68492	376	$2,10 \cdot 10^{-27}$
Luc-Koenig E. et al, 1997	With	Account	SE
Length form	68455	414	$1,88 \cdot 10^{-27}$
Velocity form	68456	412	$1,98 \cdot 10^{-27}$
Moccia and Spizzo (1989)	68320	377	$2,8 \cdot 10^{-27}$
Robicheaux and Gao (1993)	68600	376	$2,4 \cdot 10^{-27}$
Mengali and Moccia(1996)	68130	362	$2,2 \cdot 10^{-27}$
Karapanagioti et al (1996)	68470	375	$2,2 \cdot 10^{-27}$
Svinarenko (2012)	68281	323	$2,0 \cdot 10^{-27}$
Svinarenko (2013)	68395	386	$1,9 \cdot 10^{-27}$
This paper	68424	393	$1,92 \cdot 10^{-27}$

functions - relativistic Dirac orbitals according to new algorithm [2]; The latter includes solution of the whole differential equations systems for Dirac-like bi-spinor equations; 2) in order to take into account polarization and screening effects more exactly, it is necessary use correct many-body polarization and screening potentials; for this purpose we have used methods [6], [11].

3 Numerical results and conclusion

Further we present the results of computing the resonances energies and widths for atoms of magnesium (new data) and krypton in a laser field. For comparison we present the data of different methods for comparison: relativistic R-matrix method (R-method; Robicheaux-Gao, 1993; Luc-Koenig E. et al, 1997), added by multi-channel defect method, K-matrix method (K-method; Mengali-Moccia,1996), different versions of the finite L^2 method (L^2 method) with account of polarization and screening effects (SE) (Moccia-Spizzo, 1989; Karapanagioti et al, 1996), Hartree-Fock configuration interaction method (CIHF), operator QED PT (Glushkov-Ivanov, 1992; Glushkov et al; 2004), energy amplitude approach (Svinarenko, 2013) too. etc.(c.f.[2,10,11]. Table 1 contents results of calculating characteristics for $3p^{21}S_0$ resonance of Mg; E - energy, counted from ground state (cm^{-1}), Γ -autoionization width (cm^{-1}), σ/I - maximum value of generalized cross-section (cm^4W^{-1}). R-matrix calculation with using length and velocity formula led to results, which differ on 5-15% , that is evidence of non-optimality of atomic basis's.

Let us consider further the numerical data for the three-photon ($k=3$) resonance $4p - 5d[1/2]_1$ in the krypton. The detailed experimental study of the multi-photon processes in the caesium has been earlier carried out in details (look refs. [2],[13]). According to [13], the resonance line shift is linear to respect to the laser intensity (laser intensity is increased from $3 \cdot 10^{12}$ to $3 \cdot 10^{14}$ W/cm^2) and is equal (the gaussian multi-mode pulse): bI . Here I is a laser pulse intensity and coefficient b is expressed in terms of energy of the three-photon transition: $b=(3,9 \pm 0,3)cm^{-1}/GW \times cm^{-2}$. For comparison let us present the analogous theoretical value, obtained in the S-matrix formalism calculation [14]: $b=3,95$. Our theoretical values, obtained with using optimized basis's, are as follows: $b=3,922$ that is in quite good agreement with empirical result [14] and theoretical one [13].

References

1. Grant, I.: Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules –Oxford (2008), 650p
2. Glushkov, A. : Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems – Odessa, Astroprint (2008), 700p.
3. Glushkov, A., Ivanov, L.: Radiation decay of atomic states: Atomic residue and gauge non-invariant contributions – Phys. Lett.A., **170** (1992), P.33-37.
4. Luc-Koenig, E., Lyras, A., Lecomte J., Aymar, M.: Eigenchannel R-matrix study of two-photon processes including above-threshold ionization in magnesium – J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **30** (1997), P.5213-5232.
5. Glushkov, A., Khetselius, O., Prepelitsa G., Svinarenko, A.: Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape – Coherence and Ultrashort Pulsed Emission, Ed. Duarte F. J. – Vienna, Intech (2011), P.159-186.
6. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Theoretical spectroscopy of autoionization resonances in spectra of lanthanides atoms – Physica Scripta, textbfT153 (2013), P.014029 (6p.).
7. Khetselius, O.: Quantum Geometry: New approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac equation for relativistic many-body system and calculating some spectral parametersGeneralized model of decay of the multipole giant resonances – Proceedings of International Geometry Center, **6** (2013), P.60-66.
8. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Relativistic theory of cooperative muon-gamma-nuclear processes: Negative muon capture and metastable nucleus discharge – Advances in the Theory of Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry, Eds. P.Hoggan, E.Brandas, G. Delgado-Barrio, P.Piecuch – Berlin, Springer, **22** (2011), P.51-70.
9. Glushkov, A., Khetselius, O., Florcko, T. et al : Gauge-invariant QED perturbation theory approach to calculating nuclear electric quadrupole moments, hyperfine structure constants – Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry – Berlin, Springer, **18** (2008), P.504-522.
10. Svinarenko, A.: Quantum Geometry: Energy-amplitude approach to multiphoton resonances and above threshold ionization – Proc. of Int. Geometry Center., **6** (2013), N3, P.54-59.
11. Svinarenko, A.: Quantum Geometry: An advanced energy-amplitude approach to multiphoton resonances in atomic spectra – Proc. of Int.Geometry Center., **6** (2013), N4, P.79-83.
12. Glushkov, A., Svinarenko, A., Khetselius, O. et al : Relativistic Quantum Chemistry: Advanced Approach to Construction of the Green's Function of the Dirac Equation with Complex Energy and Mean-Field Nuclear Potential – Frontiers in Quantum Methods and Applications in Chemistry and Physics – Berlin, Springer, **29** (2015), P.197-218.

13. Glushkov, A.: Spectroscopy of atom and nucleus in a strong laser field: Stark effect and multiphoton Resonances – J.Phys.C.Ser.,**548** (2014), P.012020 (7p).
14. Landen, O., Perry, M. and Campbell, E.: Resonant multiphoton ionization of krypton by intense uv laser radiation – Phys.Rev.Lett.,**59** (1987), P.2558-2562.

Andrey A. Svinarenko

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.

E-mail: quantsvi@mail.ru

Geometry of a chaos: dynamics of non-linear processes in relativistic backward-wave tubes chain. new data

V.B. Ternovsky

Abstract Using universal chaos-geometric and multisystem approach it is studied chaotic dynamics of the nonlinear processes in a relativistic backward-wave TUBES (single one and chain) There are theoretically studied scenarios of generating chaos, obtained complete quantitative data on the characteristics of chaotic dynamics and the different modes of operation

Keywords chaotic dynamics, backward-wave tube, chaos-geometric approach

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

Powerful generators of chaotic oscillations of microwave range of interest for radar, plasma heating in fusion devices, modern systems of information transmission using dynamic chaos and other applications. Among the most studied of vacuum electronic devices with complex dynamics are backward-wave tubes (BWT) , for which the possibility of generating chaotic oscillations has been theoretically and experimentally found [1-12]. The BWT is an electronic device for generating electromagnetic vibrations of the superhigh frequencies range. Authors [3] formally considered the possible chaos scenario in a single relativistic BWT. Authors [4,5] have studied dynamics of a non-relativistic BWT, in particular, phase portraits, statistical quantifiers for a weak chaos arising via period-doubling cascade of self-modulation and the same characteristics of two non-relativistic backward-wave tubes. The authors of [4,5] have solved the equations of nonstationary nonlinear theory for the O-type BWT without account

of the spatial charge, relativistic effects, energy losses etc. It has been shown that the finite-dimension strange attractor is responsible for chaotic regimes in the BWT. The multiple studies [1-12], increasing the beam current in the system implemented complex pattern of alternation of regular and chaotic regimes of generation, completes the transition to a highly irregular wideband chaotic oscillations with sufficiently uniform continuous spectrum.

In our work in order to study the chaotic dynamics of non-linear processes in the chain of relativistic BWTs we have used earlier adapted advanced universal combined techniques of the non-linear analysis, including the correlation integral method, multi-fractal formalism, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, surrogate data method and others (numerical code "Geomath" [12-15]). The chaotic dynamics data for the chain of relativistic BWTs are firstly obtained.

1. Dynamics of relativistic backward-wave tube: Single tube and chain

As the key ideas of our technique for nonlinear analysis of chaotic systems have been in details presented in refs. [12-15], here we are limited only by brief representation. Nonlinear dynamics of the system is described by means of the nonstationary nonlinear theory equations for the evolution in time and space of the amplitude of the electromagnetic field and the motion of the beam (single relativistic BWT):

$$\partial^2\theta/\partial\xi^2 = -(1+\nu\partial\theta/\partial\xi)^{3/2} \operatorname{Re} \{ 1/2L [\delta(\xi) + \delta(\xi-L)F e^{i\theta}] \} \quad (1a)$$

$$\partial F/\partial\tau - \partial F/\partial\xi = - \left[1/\pi \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0 \right] 1/2L [\delta(\xi) + \delta(\xi-L)] \quad (1b)$$

with boundary conditions:

$$\theta(0, \tau) = \theta_0,$$

$$\partial\theta(0, \tau) / \partial\xi = 0, \quad (1)$$

$$F(L+0, \tau) = 0.$$

Here $\theta(\xi, \tau, \theta_0)$ is a phase of the electron, which runs in a space of interaction with phase θ_0 in a field, $F(\xi, \tau)$ dimensionless complex amplitude of the wave

$E(x, t) = Re[E(x, t)exp(i\omega_0 t - i\beta_0 x)]$, $\xi = \beta_0 C x$ - the dimensionless coordinate, $L = \beta_0 l C = 2\pi CN$ - the dimensionless length of the interaction space, l is a length of a system, N - is a number of slow waves, covering over the length of system, $C = \sqrt[3]{I_0 K_0 / (4U)}$ is the known Pierce parameter, I_0 is a current of beam, U is an accelerated voltage, K_0 - resistance of link of the slowing system, $\tau = \omega_0 C (c - x/v_0)(1 + v_0/v_i)$ i.e. $(\tau \sim \tau - \xi/\nu_0)$ - the dimensionless "retarded" time, $\nu = 2C(\gamma_0^2 - 1)$ - relativistic parameter, C - modified gain parameter, γ_0 - the ratio of the electron energy to the rest energy on entering into the interaction space.

As the solving of the system (1) gives a field distribution $F(\xi, \tau)$ for any $\tau > \tau'$, within chaos-geometric approach and dynamical systems theory, a set of the possible functions F can be treated as a phase space, where every point corresponds to the definite state. When a state changes in time according to the system (1), the corresponding point moves in a space of functions along some phase trajectory. The control (governing) parameter is provided by the normalized length L . As a rule, in practical aspect this parameter is usually varied by changing current of the electron beam I_0 through variation of voltage on the governing electrode in an electron gun ($L \sim I_0^{1/3}$). It is known that for a single relativistic backward-wave TUBE the stable state is realized for the little values of L . At the same time for $L = L_{st} = 1.97327$ there is a bifurcation of loss of the unmoved point stability [3,4].

In order to reduce the threshold of the transition to the development of chaos, in this paper we propose to use a chain of two relativistic BWTs. The master system of evolution equation for the system is as follows:

$$\partial^2 \theta_{1,2} / \partial \xi^2 = -(1 + \nu \partial \theta / \partial \xi)^{3/2} Re \{ 1/2 L_{1,2} [\delta(\xi) + \delta(\xi - L) F_{1,2} e^{i\theta_{1,2}}] \}$$

(3a)

$$\partial F_{1,2} / \partial \tau - \partial F_{1,2} / \partial \xi = - \left[1/\pi \int_0^{2\pi} e^{-i\theta_{1,2}} d\theta_0 \right] 1/2 L_{1,2} [\delta(\xi) + \delta(\xi - L_{1,2})]$$

(3b)

Equations (3a) represent the equations of motion of electrons in the field of the electromagnetic wave and equations (3b) are the nonstationary equations of excitation of a decelerating structure by a current of the slowly varying amplitude. The subscripts indicate the item number of the chain. In equations (3a) and (3b) $\theta_{1,2}$ - the phases of the electron relative to the wave, θ_0 - the initial phase, $F_{1,2}$ - the dimensionless slowly varying amplitudes of the fields, ξ and τ - the dimensionless coordinate and time, respectively. The dynamics of the partial generator

depends on a single bifurcation parameter $L = 2\pi CN$. When the first oscillator acts on the second one, then the boundary conditions for equations (3a) and (3b) can be written as follows:

$$\theta_{1,2}|_{\xi=0} = \theta_0 \in [0; 2\pi], \quad \left. \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0,$$

$$F_1(\xi=1) = 0, F_2(\xi=1) = RF_1(\xi=0).$$

where R - coupling parameter, which can be assumed real without loss of generality.

1. Analysis and prediction of nonlinear dynamics of relativistic backward-wave tubes and conclusions

Let us firstly consider in brief nonlinear dynamics of the single relativistic backward-wave TUBE using the model (1) and nonlinear analysis and prediction technique [1-3]. The detailed description of our techniques is given in ref. [12-15]. As usually, we consider a set of measurement data $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is the start time, Δt is the time step, and is n the number of the measurements. The next step is to reconstruct phase space using as well as possible information contained in the $s(n)$. Such a reconstruction results in a certain set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing the scalar measurements. Here we use the Packard-Tackens's method of time-delay coordinates [9,10]. The direct use of the lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be determined, results in a coordinate system in which the structure of orbits in phase space can be captured and further using a collection of time lags to create a vector in d dimensions: $\mathbf{y}(n) = s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)$, required coordinates are provided. Here d is the embedding dimension, d_E .

To choose a time lag we use two methods: method of autocorrelation function and method of average mutual information. Next step is to determine the embedding dimension in order to reconstruct a Euclidean space R^d . The essence is in that a space should be large enough for the set of points d_A unfolded without ambiguity. In accordance with the embedding theorem, the embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. There are several standard approaches to reconstruct the attractor dimension (see, e.g., [13,14]), but in our technique we use two methods: the correlation integral one (or algorithm of Grassberger and Procaccia [11]) and method of false neighbours.

The essence of the latter is understandable from asking the basic question addressed in the embedding theorem: when has one eliminated false crossing of the orbit with itself which arose by virtue of having projected the attractor into a too low dimensional space? By examining this question in dimension one, then dimension two, etc. until there are no incorrect or false neighbours remaining, one should be able to establish, from geometrical consideration alone, a value for the necessary embedding dimension.

Advanced version is presented in Ref. [12-14]. Multifractal spectral calculations can be performed with using the version algorithm, which is presented in [15]. The prediction block includes computing the Lyapunov's exponents which are the dynamical invariants of the studied nonlinear system.

As it is indicated in [13], in a general case, the orbits of chaotic attractors are unpredictable, but there is the limited predictability of chaotic physical system, which is defined by the global and local Lyapunov's exponents. A negative exponent indicates a local average rate of contraction while a positive value indicates a local average rate of expansion. In the chaos theory, the spectrum of Lyapunov's exponents is considered a measure of the effect of perturbing the initial conditions of a dynamical system. In fact, if one manages to derive the whole spectrum of the Lyapunov's exponents, other invariants of the system, i.e. Kolmogorov entropy and attractor's dimension can be found. The Kolmogorov entropy K measures the average rate at which information about the state is lost with time. An estimate of this measure is the sum of the positive Lyapunov's exponents. The inverse of the Kolmogorov entropy is equal to an average predictability. Estimations of the Kolmogorov entropy and average predictability can further show a limit, up to which the amplitude level data can be on average predicted. At last in the prediction model block it is used the traditional concept of a compact geometric attractor, which evolve measurement data, plus implementation neural network algorithms [14]. In Fig.1 we present the numerical temporal dependence of the output signal amplitude of the relativistic backward-wave TUBE for $L=4.1$ (a) and $L=6.1$ (b).

In whole the picture is similar to the analogous temporal dependence of the output signal amplitude of the non-relativistic backward-wave TUBE, except of some quantitative differences. Besides, we have carried out the numerical realization of the prediction model for relativistic BWT as in the chaos regime as the hyperchaos regime. In Table 1 we present our data on the correlation dimension d_2 , the embedding dimension determined based on the algorithm of false nearest neighboring points (d_N) with percentage of false neighbors (%)

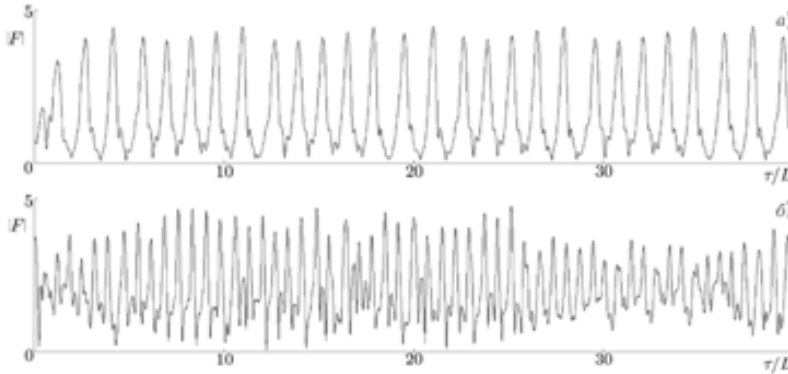


Fig 1. Numerical temporal dependence of the output signal amplitude of the relativistic BWT for $L=4.2$ (a) and $L=6.1$ (b).

calculated for different values of time lag τ . In Table 2 we list the results of computing the Lyapunov's exponents, the Kolmogorov entropy K_{entr} . For the studied series there are positive and negative values of the Lyapunov's exponents.

Table 1. Correlation dimension d_2 , the dimension of the attachment determined based on the algorithm of false nearest neighboring points (d_N) with percentage of false neighbors (%) calculated for different values of time lag τ

Chaos (I)			Hyperchaos (II)		
τ	d_2	(d_N)	τ	d_2	(d_N)
60	3.6	5(5.5)	67	7.2	10(12)
6	3.1	4(1.1)	10	6.4	8 (2.1)
8	3.1	4 (1.1)	12	6.4	8 (2.1)

Table 2. Numerical parameters of the chaotic self-oscillations in the backward-wave tube: $\lambda_1 - \lambda_4$ are the Lyapunov exponents in descending order, K is the Kolmogorov entropy

Regime	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	K
Chaos ($L=4.2$)	0.261	0.0001	-0.0004	-0.528	0.26
Hyperchaos ($L=6.1$)	0.514	0.228	0.0000	-0.0002	0.74

In table 3 we present data on the correlation coefficient (r) between the actual and prognostic rows, referred to the number of neighbors (NN) for pre-ahead 100 points numerical series of the temporal dependence of the output signal amplitude of the relativistic BWT for $L=4.1$ (I) and $L=6.1$ (II).

Table 3. The correlation coefficient (r) between the actual and predicted rows, referred to the number of neighbors (NN) for pre-ahead 100 points numerical se-

ries of the temporal dependence of the output signal amplitude of the relativistic BWT for $L=4.1$ (I) and $L=6.1$ (II).

NN	85	225	250
r (chaos: I)	0,94	0.96	0.96
r (hyperchaos-II)	0,61	0.68	0.70

One can see very exciting coincidence between the actual and predicted row values for the temporal dependence of the output signal amplitude of the relativistic backward-wave TUBE. Now that in a case of the low-D chaotic dynamics the quality of prediction is significantly higher in comparison with high-D hyperchaotic dynamics.

Further let us consider two results on studying dynamics of the chain of the backward-wave TUBES. In the first modelling we accept that the BWTs are operating in regime of the periodical automodulation (in full analogy with the non-relativistic case [5]). The values of the L parameters are as follows: $L_1=4.05$, $L_2=4.55$; The analysis shows that with growth of R the oscillations become chaotic and scenario of destroying quasi-periodic motion is main. Note that the similar picture is principally observed in the non-relativistic case except some quantitative differences including additional peaks. In fig.3 we present data on the temporal dependence of the output amplitude and signals spectrum for two different sets of the parameter values: (In). input acting BWT and (Out). Output BWT for $R=0.050$;



Fig.3. Temporal dependence of the output amplitude and signals spectrum: (In). input acting BWT; and (Out). Output BWT $R=0.050$;

In the first case one deals with the Feigenbaum chaos type and in the second case – after transition “chaos-order” through intermittency that resulted in different spectra. In conclusion we note that quantitative modelling chaotic dynamics of nonlinear processes in relativistic BWTs (single one and chain) is carried out using the same uniform chaos-geometric and multi-system approach and firstly the chaos generation features in the chain of relativistic BWTs are found.

References

1. Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.-N.-Y: Springer, 1997.-688 p.
2. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M., Isaeva O.B., Non-linearity: From oscillations to chaos.-M: NIS RHD.-2006.-184p.
3. Kuznetsov A.P., Shirokov A.P., Discrete model of relativistic backward-wave TUBE//Russian Journ.of Phys. Ser.PND.-1997.-Vol.5.-P.76-83.
4. Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I., Chaos and hyperchaos in backward-wave tube//Russian Journ.of Phys. Ser.Radiophys.-2004.-Vol.XLVII ,N5.-P.1-8
5. Ryskin N.M., Titov V.N., The transition to the development of chaos in a chain of two unidirectionally-coupled backward-wave tubes//Journ.Techn.Phys.-2003.-Vol.73.-P.90-94.
6. Goedgebuer J.-P., Levy P., Larger L., Chen C., Rhodes W., Optical communication with synchronized hyperchaos generated electrooptically//IEEE J. Quantum Electron. -2002.-Vol.38.-P.1178-1183.
7. Gallager R.G., Information theory and reliable communication, Wiley, New York.-1986.
8. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using geometrical construction//Phys.Rev.A.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.
9. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from time series// Phys.Rev.Lett-1988.-Vol.45.-P.712-716.
10. Takens F., Detecting strange attractors in turbulence//Dynamical systems and turbulence Ed. Rand D., Young L. - N.-Y.: Springer, 1981.-P.366-381.
11. Grassberger P., Procaccia I., Measuring the strangeness of strange attractors// Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189-208.
12. Prepelitsa G.P., Buyadzi V.V., Ternovsky V.B. Non-linear analysis of chaotic self-oscillations in backward-wave tube// Photoelectronics.-2013.-Vol.22.-P.103-107.
13. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Buyadzi V.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics during perception process// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering, Ed. J.Balicki.(Gdansk, WSEAS Pub).-2014.-Vol.21.-P.143-150.
14. Glushkov A.V., Prepelitsa G.P., Svinarenko A.A., Zaichko P.A. Studying interaction dynamics of the non-linear vibrational systems within non-linear prediction method (application to quantum autogenerators)// Dynamical Systems Theory, Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski (WSEAS, Lodz).-2013.-Vol.T1.-P.467-477.
15. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A., Atmospheric teleconnection patterns and eddy kinetic energy content: wavelet analysis//Nonlinear Proc.in Geophys.-2004.-Vol.11.-P.285-293.

V.B. Ternovsky

Odessa State Maritime University, Odessa, Ukraine

E-mail: quantign@mail.ru

Modeling chaotic dynamics of complex systems with using chaos theory, geometric attractors, and quantum neural networks

A.V. Glushkov, O.Yu. Khetselius, S.V. Brusentseva, A.V. Duborez

Abstract Nonlinear simulation and forecasting chaotic evolutionary dynamics of complex systems has been effectively performed using the concept of compact geometric attractors. We present an advanced approach to analyze complex system dynamics based on the concept of geometric attractors, chaos theory methods and algorithms for quantum neural network simulation.

Keywords Geometric attractor conception, quantum neural networks, chaotic dynamics

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

In this work nonlinear simulation and forecasting chaotic evolutionary dynamics of complex systems are carried out using the concept of compact geometric attractors . We are developing a new approach to analyze complex system dynamics based on the concept of geometric attractors, chaos theory methods and algorithms for quantum neural network simulation. This work develops our studies, presented in [1-12].

The basic idea of the construction of our approach to prediction of chaotic processes in complex systems is in the use of the traditional concept of a compact geometric attractor in which evolves the measurement data, plus the implementation of neural network algorithms. The existing so far in the theory of chaos prediction models are based on the concept of an attractor, and are described in

a number of papers (e.g. [1,13-20]). From a mathematical point of view, it is a fact that in the phase space of the system an orbit continuously rolled on itself due to the action of dissipative forces and the nonlinear part of the dynamics, so it is possible to stay in the neighborhood of any point of the orbit $y(n)$ other points of the orbit $y^r(n)$, $r = 1, 2, \dots, N_B$, which come in the neighborhood $y(n)$ in a completely different times than n . Of course, then one could try to build different types of interpolation functions that take into account all the neighborhoods of the phase space and at the same time explain how the neighborhood evolve from $y(n)$ to a whole family of points about $y(n+1)$. Use of the information about the phase space in the simulation of the evolution of some physical (geophysical etc.) process in time can be regarded as a fundamental element in the simulation of random processes.

In terms of the modern theory of neural systems, and neuro-informatics (e.g. [1]), the process of modelling the evolution of the system can be generalized to describe some evolutionary dynamic neuro-equations (miemo-dynamic equations). Imitating the further evolution of a complex system as the evolution of a neural network with the corresponding elements of the self-study, self-adaptation, etc., it becomes possible to significantly improve the prediction of evolutionary dynamics of a chaotic system. Considering the neural network with a certain number of neurons, as usual, we can introduce the operators S_{ij} synaptic neuron to neuron $u_i u_j$, while the corresponding synaptic matrix is reduced to a numerical matrix strength of synaptic connections: $W = w_{ij}$. The operator is described by the standard activation neuro-equation determining the evolution of a neural network in time:

$$s'_i = \text{sign}\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} s_j - \theta_i\right), \quad (1)$$

where $1 < i < N$.

From the point of view of the theory of chaotic dynamical systems, the state of the neuron (the chaos-geometric interpretation of the forces of synaptic interactions, etc.) can be represented by currents in the phase space of the system and its the topological structure is obviously determined by the number and position of attractors. To determine the asymptotic behavior of the system it becomes crucial a information aspect of the problem, namely, the fact of being the initial state to the basin of attraction of a particular attractor.

Modelling each physical attractor by a record in memory, the process of the evolution of neural network, transition from the initial state to the (following) the final state is a model for the reconstruction of the full record of distorted

information, or an associative model of pattern recognition is implemented. The domain of attraction of attractors are separated by separatrices or certain surfaces in the phase space. Their structure, of course, is quite complex, but mimics the chaotic properties of the studied object. Then, as usual, the next step is a natural construction parameterized nonlinear function $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, which transforms: $\mathbf{y}(n) \rightarrow \mathbf{y}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(n), \mathbf{a})$, and then to use the different (including neural network) criteria for determining the parameters \mathbf{a} (see below). The easiest way to implement this program is in considering the original local neighborhood, enter the model(s) of the process occurring in the neighborhood, at the neighborhood and by combining together these local models, designing on a global nonlinear model. The latter describes most of the structure of the attractor.

Although, according to a classical theorem by Kolmogorov-Arnold-Moser, the dynamics evolves in a multidimensional space, the size and the structure of which is predetermined by the initial conditions, this, however, does not indicate a functional choice of model elements in full compliance with the source of random data. One of the most common forms of the local model is the model of the Schreiber type [14] (see also [1,15-19]).

Nonlinear modelling of chaotic processes can be based on the concept of a compact geometric attractor, which evolve with measurements. Since the orbit is continually folded back on itself by the dissipative forces and the non-linear part of the dynamics, some orbit points $\mathbf{y}^r(k), r = 1, 2, \dots, N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k . Then one could build the different types of interpolation functions that take into account all the neighborhoods of the phase space, and explain how these neighborhoods evolve from $y(n)$ to a whole family of points about $y(n+1)$. Use of the information about the phase space in modelling the evolution of the physical process in time can be regarded as a major innovation in the modelling of chaotic processes.

This concept can be achieved by constructing a parameterized nonlinear function $F(x, a)$, which transform $y(n)$ to $y(n+1) = F(y(n), a)$, and then using different criteria for determining the parameters \mathbf{a} . Further, since there is the notion of local neighborhoods, one could create a model of the process occurring in the neighborhood, at the neighborhood and by combining together these local models to construct a global nonlinear model that describes most of the structure of the attractor.

As shown Schreiber [14], the most common form of the local model is very simple:

$$s(n + \Delta n) = a_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{d_A} a_j^{(n)} s(n - (j - 1)\tau) \quad (2)$$

where Δn - the time period for which a forecast .

The coefficients $a_j^{(k)}$, may be determined by a least-squares procedure, involving only points $s(k)$ within a small neighbourhood around the reference point. Thus, the coefficients will vary throughout phase space. The fit procedure amounts to solving $(d_A + 1)$ linear equations for the $(d_A + 1)$ unknowns. When fitting the parameters a , several problems are encountered that seem purely technical in the first place but are related to the nonlinear properties of the system. If the system is low-dimensional, the data that can be used for fitting will locally not span all the available dimensions but only a subspace, typically. Therefore, the linear system of equations to be solved for the fit will be ill conditioned. However, in the presence of noise the equations are not formally ill-conditioned but still the part of the solution that relates the noise directions to the future point is meaningless .Other modelling techniques are described, for example, in [3,10, 17-20].

Assume the functional form of the display is selected, wherein the polynomials used or other basic functions. Now, we define a characteristic which is a measure of the quality of the curve fit to the data and determines how accurately match $y(k + 1)$ with $F(y(k), a)$, calling it by a local deterministic error:

$$\epsilon_D(k) = \mathbf{y}(k + 1) - \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a}).$$

The cost function for this error is called $W(\epsilon)$. If the mapping $F(y, a)$, constructed by us, is local, then one has for each adjacent to $y(k)$ point, $y^{(r)}(k) (r = 1, 2, \dots, N_B)$,

$$\epsilon_D^{(r)}(k) = \mathbf{y}(r, k + 1) - \mathbf{F}(\mathbf{y}^r(k), \mathbf{a}),$$

where $y(r, k + 1)$ - a point in the phase space which evolves $y(r, k)$. To measure the quality of the curve fit to the data, the local cost function is given by

$$W(\epsilon, k) = \frac{\sum_{r=1}^{N_B} |\epsilon_D^{(r)}(k)|^2}{\sum_{r=1}^{N_B} [y(k) - \langle y(r, k) \rangle]^2} \quad (3)$$

and the parameters identified by minimizing $W(\epsilon, k)$, will depend on \mathbf{a} .

Furthermore, formally the neural network algorithm is launched, in particular, in order to make training the neural network system equivalent to the reconstruction and interim forecast the state of the neural network (respectively, adjusting the values of the coefficients). The starting point is a formal knowledge of the time series of the main dynamic parameters of a chaotic system, and then to identify the state vector of the matrix of the synaptic interactions w_{ij} etc. Of course, the main difficulty here lies in the implementation of the process of learning neural network to simulate the complete process of change in the topological structure of the phase space of the system and use the output results of the neural network to adjust the coefficients of the function display.

Further we consider implementation of the quantum neural networks algorithm into general scheme of studying chaotic dynamics. The basic aspects of theory of the photon echo based neural networks are stated previously (see, for example, [21]). So here we mention only the essential elements. Photon echo is a nonlinear optical effect, in fact this is the phenomenon of the four wave interaction in a nonlinear medium with a time delay between the laser pulses. We have used a software package for numerical modeling of the dynamics of the photon echo neural network, which imitates evolutionary dynamics of the complex system. It has the following key features: multi-layering, possibility of introducing training, feedback and controlled noise. There are possible the different variants of the connections matrix determination and binary or continuous sigmoid response (and so on) of the model neurons. In order to imitate a tuition process we have carried out numerical simulation of the neural networks for recognizing a series of patterns (number of layers $N=5$, number of images $CTB = 640$; the error function:

$$SSE = \sum_{p=1}^{p_{\max}} \left\{ \sum_{k=1}^{k_{\max}} [t(p, k) - O(p, k)]^2 \right\}, \quad (4)$$

where $O(p, k)$ – neural networks output k for image p and $t(p, k)$ is the trained image CTB for output Pe ; SSE is determined from a procedure of minimization; the output error is $RMS = \sqrt{SSE/P_{\max}}$; As neuronal function there is used function of the form: $f(x) = 1/[1 + \exp(-\delta x)]$. In our calculation there is tested the function $f(x, T) = \exp[(xT)^4]$ too.

The result of the PC simulation (with using our neural networks package NNW-13-2003 [21]) of dynamics of the quantum multilayer neural networks with the input rectangular and soliton-like pulses is listed in fig.1 and fig 2. The same results for sinusoidal and noisy input sequence are listed in [21]. Analysis of the

PC experiment results allows to make conclusion about sufficiently high-quality processing the input signals of very different shapes and complexity by a photon echo based neural network.

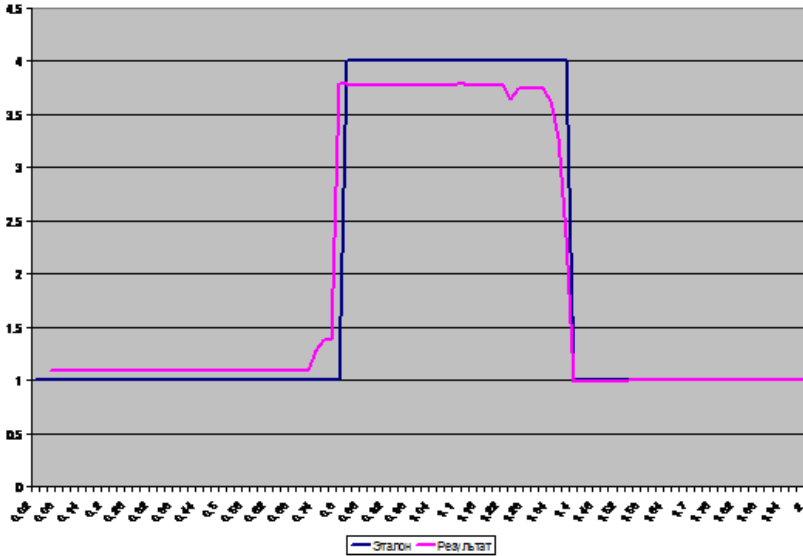


Fig. 1. The results of modeling the dynamics of multilayer neural networks with rectangular input pulse

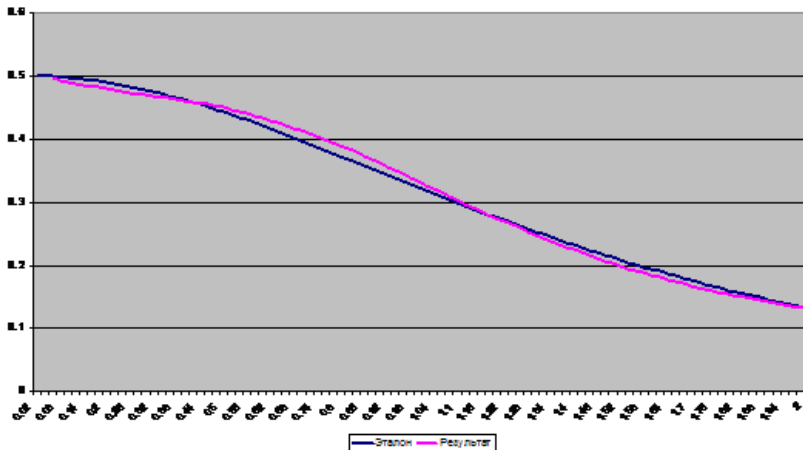


Fig. 2. The results of modeling the dynamics of multilayer neural networks with soliton-like input pulse

References

1. Glushkov A.V.: Methods of a chaos theory // Ecology, Odessa. – 2012.
2. Glushkov, A.V., Loboda, N.S., Khokhlov, V.N.: Using meteorological data for reconstruction of annual runoff series: Orthogonal functions approach // Atmospheric Research (Elsevier). – 2005. – Vol. 77. – P. 100-113.
3. Glushkov, A.V., Khokhlov, V.N., Tsenenko, I.A.: Atmospheric teleconnection patterns: wavelet analysis // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2004. – Vol. 11(??). – P. 285-293.
4. Khokhlov, V.N., Glushkov, A.V., Loboda, N.S., Bunyakova, Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method // Atmospheric Environment (Elsevier). – 2008. – Vol. 42. – P. 1213-1220.
5. Glushkov, A.V., Kuzakon', V.M., Khetselius, O.Yu., Prepelitsa, G.P., Svinarenko, A.A., Zaichko, P.A.: Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination // Proceedings of International Geometry Center. – 2013. – Vol. 6(??). – P. 43-48.
6. Khetselius, O.Yu., Forecasting evolutionary dynamics of chaotic systems using advanced non-linear prediction method // Dynamical Systems - Theory and Applications. – 2013. – Vol. LIF142. – P.1-11.
7. Glushkov A.V., Khetselius O.Y., Brusentseva S.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., Studying interaction dynamics of chaotic systems within a non-linear prediction method: application to neurophysiology// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering, Ed. J.Balicki.(Gdansk, WSEAS Pub.).-2014.-Vol.21.-P.69-75.
8. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Buyadzi V.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., Chaogeometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics during perception process// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering, Ed. J.Balicki.(Gdansk, WSEAS Pub.).-2014.-Vol.21.-P.143-150.
9. Khetselius O.Yu., Forecasting evolutionary dynamics of chaotic systems using advanced non-linear prediction method// Dynamical Systems Applications, Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski (Lodz, Polland).-2013.-Vol.T2.-P.145-152
10. Khetselius O.Yu., Brusentseva S.V., Tkach T.B. Studying interaction dynamics of chaotic systems within non-linear prediction method: Application to neurophysiology// Dynamical Systems Applications, Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski (Lodz, Polland).-2013.-Vol.T2.-P.251-259.
11. Kondratenko P.A., Khetselius O.Yu., Ternovsky V.B., Zaichko P.A., Duborez A.V., Simulation chaotic dynamics of complex systems with using chaos theory, geometric attractors, and quantum neural networks//P.160-166.
12. Lichtenberg, A., Liebermann, A.: Regular and chaotic dynamics // Springer, N.-Y. – 1992.
13. Abarbanel H.: Analysis of observed chaotic data // Springer, N.-Y. – 1996.
14. Schreiber T.: Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // Phys. Rep. – 1999. – Vol. 308. – P. 1-64.
15. Sivakumar B.: Chaos theory in geophysics: past, present and future // Chaos, Solitons & Fractals. – 2004. – Vol. 19. – P. 441-462
16. Turcotte, D.L. Fractals and chaos in geology and geophysics // Cambridge University Press, Cambridge. – 1997.
17. Hastings, A.M., Hom, P.Ň., Ellner, S, Turchin, P., Godfray, Y. Chaos in ecology: is Mother Nature a strange attractor // Ann.Rev.Ecol.Syst. – 1993. – Vol. 24. – P. 1-33.
18. May, R.M.: Necessity and chance: deterministic chaos in ecology and evolution // Bull. Amer. Math. Soc. – 1995. – Vol. 32. – P. 291-308.
19. Grassberger, P., Procaccia, I.: Measuring the strangeness of strange attractors // Physica. – 1983. – Vol. D.9. – P. 189-208.
20. Neural Networks for Computing, Ed. Denker J. // AIP Publ.,N.-Y. – 2000.
21. Glushkov, A.V., Svinarenko, A.A., Loboda, A.V. Theory of neural networks on basis of photon echo and its program realization // TEC, Odessa. – 2004.

A.V. Glushkov, O.Yu. Khetselius, S.V. Brusentseva, A.V. Duborez
Mathematics Department
State Environmental University, Odessa, Ukraine
E-mail: dirac13@mail.ru

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік № 1-05/3 від 14.04.2010 Бюлетень ВАК України. 2010. №
4)

Наклад 300 примірників. Зам. №

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,

кафедра вищої математики,

вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net

website: <http://geometry-center.com>

ISSN 2072-9812 (print). ISSN 2409-8906 (Online).

ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.

2014. ТОМ 7. №3. 1-96

Журнал індексується в WorldCat;



Журнал індексується в Bielefeld Academic Search Engine (BASE);



Журнал індексується в Research Bible;



Журнал індексується в Google Scholar;



Журналу присвоєно Міжнародний номер наукових періодичних видань ISSN для друкованих видань ISSN print 2072-9812, а також для онлайн версії журналу ISSN online 2409-8906



Журнал сертифікований за стандартом якості ISO 26324:2012

