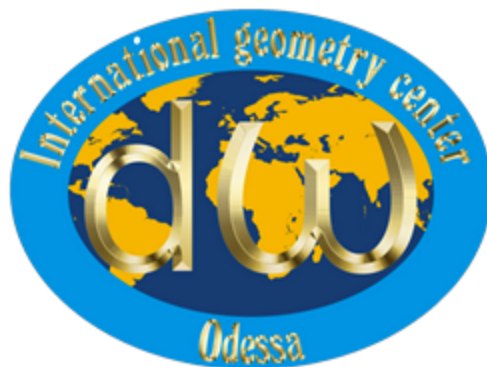

ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)
ISO 26324:2012

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 7, No. 4, 2014





ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)

Благодійний фонд наукових досліджень
"Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 7, No. 4, 2014

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 7, No. 4, 2014

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 7, No. 4, 2014

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2014

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеської національної академії харчових технологій
(№ 6 від 02.12.2014р)

Головний редактор: **Пришляк О.О.**

Заступники головного редактора: **Микитюк І.В., Мілка А.Д.,
Шелєхов О.М.**

Відповідальні редактори: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Відповідальні секретарі: **Мойсеєнок О.П., Федченко Ю.С.**

Редакційна колегія:

Балан В.	Кирилов В.Х.	Сергеєва О.Є.
Банах Т.О.	Максименко С.І.	Федосов С.Н.
Волков В.Е.	Машков О.А.	Фоменко А.Т.
Глушков О.В.	Мікеш Й.	Фоменко В.Т.
Задорожний В.Г.	Мормул П.	Хаддад М.
Зарічний М.М.	Рахула М.О.	Швець В.Т.
Кац І.С.	Сабітов І.Х.	Шуригін В.В.
Кириченко В.Ф.	Савченко О.Г.	

©Благодійний фонд наукових досліджень "Наука", 2014

Главный редактор: **Пришляк О.О.**

Заместители главного редактора: **Микитюк И.В., Милка А.Д., Шелехов А.М.**

Ответственные редакторы: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Ответственные секретари: **Мойсеенок А.П., Федченко Ю.С.**

Редакционная коллегия:

Балан В.	Кириллов В.Х.	Сергеева А.Е.
Банах Т.О.	Максименко С.И.	Федосов С.Н.
Волков В.Э.	Машков О.А.	Фоменко А.Т.
Глушков А.В.	Микеш Й.	Фоменко В.Т.
Задорожный В.Г.	Мормул П.	Хаддад М.
Заричный М.М.	Рахула М.О.	Швец В.Т.
Кац И.С.	Сабитов И.Х.	Шурыгин В.В.
Кириченко В.Ф.	Савченко А.Г.	

Editor-in-Chief: **Prishlyak A. O.**

Deputies Editor-in-Chief: **Mikityuk I. V., Milka A. D.**
Shelekhov A. M.

Managing Editors: **Konovenko N. G., Kuzakon V. M.**

Executive Secretary: **Moiseenok A. P., Fedchenko Ju. S.**

Editorial Board:

Balan V.	Kirillov V.Kh.	Sergeeva A.S.
Banah T.S.	Kirichenko V.F.	Shvets V.T.
Fedosov S.N.	Maksimenko S.I.	Shurygin V.V.
Fomenko A.T.	Mashkov O.A.	Sabitov I.Kh.
Fomenko V.T.	Mikes J.	Volkov V.E.
Glushkov A.V.	Mormul P.	Zadorozhnyi V.G.
Haddad M.	Rahula M.O.	Zarichnyi M.M.
Kats I.S.	Savchenko O.G.	

©Charity Fund for Scientific Research "Science", 2014

Зміст

И. Ю. Власенко

Топологические инварианты слоения на эквипотенциальные
кривые функции Грина множества Жюлиа 7

I.M. Іванюк, O.O. Пришляк

Топологічна структура деформацій векторних полів
Морса-Смейла на тривимірних многовидах роду 2 12

В. М. Прокіп

Про розв'язки матричного рівняння $XA_0 = A_1$ із заданими
характеристичними многочленами 23

A. Savchenko

Correspondences of probability measures
with restricted marginals 34

A. B. Сергеюк

Топологическая классификация функций Морса
рода 1 на S^3 40

І.А. Юрчук Властивості псевдогармонічної функції на замкненій області	50
A.V. Glushkov, V.B. Ternovsky, V.V. Buyadzhi, G.P. Prepelitsa Geometry of a Relativistic Quantum Chaos: New approach to dynamics of quantum systems in electromagnetic field and uniformity and charm of a chaos	60
A. A. Svinarenko Quantum Geometry: Application of an advanced energy approach in scattering theory to multicharged ions	72
A.V. Glushkov, O.Yu. Khetselius, T.A. Florko, G.P. Prepelitsa Chaos-Geometric approach to analysis of chaotic dynamics of quantum-generator systems	77
О. І. Герасін Інваріантні міри на системах багатогранників	83

Топологические инварианты слоения на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа

Игорь Юрьевич Власенко

Аннотация В голоморфной динамике слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа как аналитический инвариант известно давно. Однако тот факт, что в области притяжения суперпритягивающего цикла это слоение является не только аналитическим, но и топологическим инвариантом, был ранее неизвестен.

Ключевые слова голоморфные отображения, внутренние отображения, классы топологической сопряженности, блуждающее множество, множество Фату

УДК 517

Вступление.

Голоморфные отображения являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Не будем здесь давать обзор базовых понятий и основных результатов этой теории, ограничившись отсылкой к популярным учебникам по голоморфной динамике (см. например, [1]).

Специфика этой теории в том, что она построена на аналитических инвариантах голоморфных отображений, таких, как множества Фату и Жюлиа, а не топологических инвариантах (хотя то же разбиение на множества Фату и Жюлиа является и топологическим инвариантом голоморфных отображений). Однако в целом теория топологических инвариантов голоморфных отображений не развита.

Поэтому применение к голоморфным отображениям топологической теории динамики внутренних отображений, построенной в [2], позволяет получить новые результаты, относящиеся к, казалось бы, давно и хорошо изученным отображениям. В основном, это вопросы, связанные с топологическими инвариантами голоморфных отображений, т. е. какие свойства этих отображений сохраняются при непрерывных заменах координат на многообразии, и вопросы о принадлежности внутренних отображений к классу голоморфноподобных отображений, т. е. возможно ли, что для данного внутреннего отображения найдется замена координат (гомеоморфизм) такой, что полученное сопряженное отображение (определение см. [3]) будет голоморфным.

Приведем здесь один такой новый результат, относящийся к топологической инвариантности слоения на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа (еще используется название канонический потенциал, а в англоязычной литературе часто используется термин Douady-Hubbard potential), полученный применением теории из [2] к известным результатам голоморфной динамики.

Предварительные сведения.

В [2] было установлено, что для внутренних отображений существует много топологически различных типов множеств, соответствующих множествам блуждающих точек гомеоморфизмов в классическом определении.

Широкой траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{m,n \geq 0} f^{-m}(f^n(x))$. Нейтральным сечением точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим его через $O_f^\perp(x)$. Так как f — конечнократный эпиморфизм, то естественно эти множества воспринимать как наборы из отдельных точек.

Определение 1 Точка x называется блуждающей точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. Иначе точка называется неблуждающей.

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих точек даны в [2]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 2 Точка x называется нейтрально блуждающей точкой f , если найдется такая ее связная окрестность U , что $\forall n \geq 0$ открытое

множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности таким образом, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одну точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$. Иначе точка называется нейтрально неблуждающей.

Определение 3 Точка x называется суперблуждающей точкой f , если она блуждающая и нейтрально блуждающая.

Топологические инварианты в множестве Фату.

Используя определения и результаты из [2], и известные результаты из голоморфной динамики, в множестве Фату можно выделить дополнительные топологические инварианты.

Пусть аналитическая функция f имеет притягивающую критическую (в терминологии голоморфной динамики — суперпритягивающую) точку. Всегда можно подобрать такой локальный униформизирующий параметр z , что $z = 0$ будет суперпритягивающей неподвижной точкой функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, \quad (1)$$

где $n \geq 2$.

Теорема 1 (теорема Бёхтера) Пусть функция f имеет вид (1). Тогда существует такая локальная голоморфная замена координат $w = \phi(z)$, что $\phi(0) = 0$, и относительно этой замены f сопряжена отображению $w \mapsto w^n$ всюду в некоторой окрестности нуля. Более того, ϕ единственна с точностью до умножения на некоторый корень степени $(n - 1)$ из единицы.

Отображения $w \mapsto w^n$, как показано в [2], обладает весьма специальной структурой блуждающего множества. Для этих отображений $\hat{\mathbb{C}}$ распадается на бассейн притяжения точки 0 (в полярных координатах множество точек с $\rho < 1$), бассейн притяжения точки ∞ (в полярных координатах множество точек с $\rho > 1$) и отталкивающую неблуждающую окружность с $\rho = 1$. Каждый из бассейнов притяжения состоит из особой неподвижной притягивающей точки и нейтрально неблуждающих¹ блуждающих² точек в смысле определений из [2] таких, что слоение на окружности $\{\varphi = const\}$ в

¹ Определение 2.

² Определение 3.

комплексных координатах является топологическим инвариантом: для любой блуждающей точки бассейна притяжения ее нейтральное сечение всюду плотно на содержащей эту точку окружности.

Как следствие из этого факта и из теоремы Бёхтера, получим следующее утверждение.

Теорема 2 *Пусть функция f имеет вид (1). Тогда в некоторой окрестности нуля f обладает топологически инвариантным слоением на гомеоморфные окружностям замыкания нейтральных сечений точек этой окрестности.*

Это слоение можно продолжить на всю область притяжения суперпритягивающей точки, хотя, возможно, слои уже не будут гомеоморфны окружностям, так как, если в области притяжения есть блуждающие точки ветвления, то в таких точках прообраз окружности превращается в букет окружностей. Заметим, что как аналитический инвариант области притяжения суперпритягивающей точки это слоение в голоморфной динамике давно известно: это слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа.

Однако тот факт, что это слоение является не только аналитическим, но и топологическим инвариантом, был ранее неизвестен.

При этом топологическим инвариантом слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа является только на бассейнах притяжения суперпритягивающих точек.

Рассмотрим бассейн притяжения геометрически притягивающего цикла. Так как множество особых точек отображения изолировано, у геометрически притягивающего цикла можно найти окрестность в его бассейне притяжения, не содержащую особых точек и такую, что сужение отображения на эту окрестность будет гомеоморфизмом на свой образ. Тогда притягивающиеся к циклу точки этой окрестности по определению являются суперблуждающими, и, как следствие, в бассейне притяжения геометрически притягивающей точки притягивающиеся к ней точки являются суперблуждающими. Поэтому на бассейнах притяжения геометрически притягивающих точек слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа не является топологически выделенным слоением и не сохраняется при сопряжении гомеоморфизмом.

Как следствие, получим следующее утверждение.

Теорема 3 *Слоение на эквипотенциальные кривые функции Грина множества Жюлиа является топологическим инвариантом голоморфного*

отображения, при чем только на бассейнах притяжения суперпритягивающих точек.

Список литературы

1. Milnor, J: Dynamics in one complex variable. Introductory lectures. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. viii+257 pp.
2. Власенко И. Ю.: Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 101. Інститут математики НАН України. Київ, 2014, 225 стр.
3. Кузаконь, В. М., Кириченко, В. Ф., Пришляк, О. О.: Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 97, Інститут математики НАН України, Київ, 2013, 500 стр.
4. Стоилов, С.: О топологических принципах теории аналитических функций. М., Мир. 1964, 228 стр.
5. Трохимчук, Ю. Ю.: Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Інститут математики НАН України. Київ, 2008, 538 стр.

Игорь Юрьевич Власенко

Институт математики НАНУ, Киев, Украина

E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Igor Yu. Vlasenko

Topological invariants of equipotential foliation of the Green's function of the Julia set

It is shown that the well-known equipotential foliation of the Green's function of the Julia set (also known as equipotential foliation of Douady-Hubbard potential of the Julia set) is in fact the topological invariant of holomorphic maps, but only in superattracting basins.

Топологічна структура деформацій векторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах роду 2

І.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Анотація Ми розглядаємо деформації полярих полів Морса-Смейла без замкнених траєкторій на замкнених тривимірних многовидах роду 2. За кожним полем будується діаграма Хегора. Ми описуємо перетворення діаграм, що відповідають деформаціям полів. Розглядаються діаграми Хегора роду 2, в яких не більше чотирьох точок перетину між меридіанами. Досліджено ситуацію, коли вершини можуть мати прості петлі. Описано всі можливі переходи від однієї діаграми до іншої, використовуючи операції ковзання, витягування петель, перестановки вершин місцями. Знайдено всі негомеоморфні діаграми та всі їх можливі перетворення.

Ключові слова Діаграми Хегора · функції Морса · тривимірні многовиди · топологічна еквівалентність

УДК 517.91

Вступ

Діаграми Хегора є зручним способом задання замкнених орієнтованих тривимірних многовидів. Нагадаємо, що трійка (F, u, v) називається *діаграмою Хегора* многовиду M , де $F = \partial H = \partial H'$ — загальна поверхня роду g кренделів, $u = \{u_1, \dots, u_g\}$ — система меридіанів кренделя H і $v = \{v_1, \dots, v_g\}$

— система меридіанів кренделя H' , $H \cup H' = M$ — розбиття Хегора многовида M .

У роботах [4], [5] за векторним полем Морса-Смейла без замкнених траєкторій на тривимірному многовиді було побудовано діаграму Хегора, то показано, що поля будуть топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли відповідні діаграми Хегора є гомеоморфними. Також діаграми Хегора використовуються для топологічної класифікації функцій на тривимірних многовидах. Простір орбіт функцій розглядались у роботі [3].

Ще діаграми Хегора роду 2 досліджувались в [6], [8], було доведено, що існує скінченне число розбиттів Хегора для кожного многовида роду 2.

Діаграми Хегора задають розклад тривимірного на ручки Смейла. При деформації векторного поля відбувається ковзання ручок, що на мові діаграм Хегора означає напівізотопію діаграми за допомогою додавання меридіанів, скорочення або утворення двокутників, перестановки меридіанів.

Основна мета роботи — описати всі можливі деформації полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах за допомогою перетворення діаграм Хегора роду 2; знайти еквівалентні діаграми, складність яких не перевищує 4.

1 Діаграми Хегора

Тривимірний многовид відновлюється за своєю діаграмою Хегора однозначно: якщо трійка (F, u, v) є діаграмою Хегора як многовида M , так і многовида M_1 , то існує нерухомий на поверхні F гомеоморфізм $h : M \rightarrow M_1$.

Означення 1 Діаграми Хегора (F, u, v) , (F', u', v') многовидів M , M' називаються гомеоморфними, якщо існує такий гомеоморфізм $h : F \rightarrow F'$, що $h(u) = u'$, $h(v) = v'$ або $h(u) = v'$, $h(v) = u'$ (порядок меридіанів при цьому не має значення).

Будь-який гомеоморфізм $h : (F, u, v) \rightarrow (F', u', v')$ продовжується до гомеоморфізму $\hat{h} : M \rightarrow M'$ [1].

Означення 2 Діаграми Хегора (F, u, v) , (F', u', v') називаються ізотопними, якщо існує така ізотопія $\varphi_t : F \rightarrow F'$, що $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1(u) = u'$, $\varphi_1(v) = v'$

Означення 3 Діаграми (F, u, v) , (F', u', v') називаються напівізотопними, якщо існують такі ізотопії $\varphi_t, \psi_t : F \rightarrow F'$, що $\varphi_0 = \psi_0 = 1$, $\varphi_1(u) = u'$ і $\psi_1(v) = v'$.

При ізотопії всі криві діаграми ковзають по поверхні як єдине ціле, тоді як при напівізотопії кожна сім'я рухається по-своєму. Ізотопні і напівізотопні діаграми визначають один і той же тривимірний многовид. Ми не міняємо кренделів H, H' відповідного розбиття Хегора, а тільки замінюємо в кожному з них меридіональні диски на ізотопні. Операцію зв'язної суми меридіанів, тобто операцію додавання одного меридіана до іншого можна застосувати до кожного сімейства u, v діаграми Хегора. Для простоти позначень покладемо, що крива u_2 додається до кривої u_1 .

Нехай (F, u, v) — діаграма Хегора і β — проста крива, що з'єднує меридіани u_1, u_2 діаграми і не має з кривими інших спільних точок. Нехай C — замкнений окіл об'єднання $u_1 \cup u_2 \cup \beta$ гомеоморфний диску з двома дірками і не перетинає інших кривих u . Позначимо $u_1 \# u_2$ компоненту краю, яка не ізотопна кривій u_1 чи кривій u_2 . Систему $\{u_1 \# u_2, u_2, \dots, u_g\}$ позначимо \tilde{u} .

Означення 4 Діаграма (F, \tilde{u}, v) отримується з діаграми (F, u, v) операцією додавання кривої u_2 до кривої u_1 вздовж кривої β .

Аналогічно визначається операція суми кривих системи v . Криві системи u до кривих системи v і навпаки додавати не можна. Додавання однієї кривої системи до іншої кривої того ж сімейства не змінює не тільки відповідного многовида, але і його розбиття Хегора — кренделі розбиття залишаються незмінними, змінюються тільки їх меридіальні диски.

Означення 5 Діаграми (F, u, v) і (F, u', v') називаються еквівалентними, якщо від однієї можна перейти до іншої за допомогою гомеоморфізмів, напівізотопій і операцій додавання одного меридіана до іншого.

Діаграми Хегора еквівалентні тоді і тільки тоді, коли еквівалентні відповідні їм розбиття Хегора. Еквівалентні діаграми дають з точністю до гомеоморфізму одне і те ж розбиття Хегора. Будь-яку систему меридіанів повного кренделя можна перевести в іншу за допомогою операцій зв'язної суми та ізотопій. Доведення цього в [1]

Нехай (F, u, v) — зв'язна діаграма Хегора. Гомеоморфні диску області, на які граф $u \cup v$ розрізає поверхню, будемо трактувати як криволінійні многокутники, вважаючи вершинами точки перетину меридіанів різних систем. Кожний многокутник має парне число сторін.

Означення 6 Діаграма Хегора (F, u, v) називається нормалізованою, якщо серед областей, на які меридіани розбиває поверхню, нема двокутників.

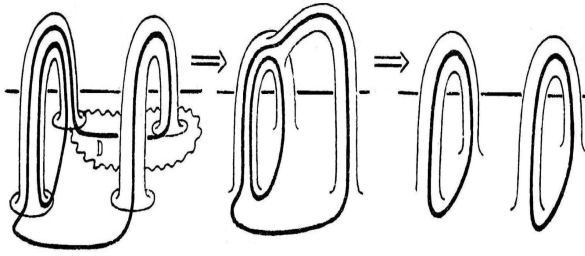


Рис.1

Будь-яка діаграма Хегора напівізотопна нормалізованим. Якщо дві нормалізовані діаграми напівізотопні, то вони ізотопні. Доведення цього факту можна зустріти в [1]

Якщо діаграма має хвилю, ми можемо застосувати до діаграми хвильове перетворення. Хвильове перетворення для діаграми Хегора полягає в тому, що одну діаграму Хегора замінюємо на еквівалентну їй діаграму. Нова діаграма завжди простіша попередньої, тому що при хвильовому перетворенні загальне число точок перетину меридіанів строго зменшується. Нехай (F, u, v) — нормалізована діаграма.

Означення 7 Проста крива $l \subset F$ називається u -хвилею (або просто хвилею), якщо: 1) її кінці лежать на одному з меридіанів u_i системи u ; 2) інших спільних точок з меридіанами u, v крива l не має; 3) кінцеві точки кривої l належать до різних дуг, на які меридіани v розбивають меридіан u_i ; 4) в цих двох точках крива l підходить до меридіана з однієї сторони.

Геометричний зміст хвильового перетворення. Зобразимо крендель H у вигляді сфери з ручками, в основі яких лежать меридіани u_1, u_2, \dots, u_g . Позначимо через D диск на краю сфери, обмежений хвилею і тією частиною меридіана u_i , яка відкидається при хвильовому перетворенні. Тоді хвильове перетворення можна інтерпретувати як протягування по ручці з номером i тих ручок, основа яких лежить на диску D (Рис.1).

2 Структура діаграм Хегора роду 2

Нехай (F, u, v) — нормалізована діаграма. Якщо поверхню F розрізати по меридіанах u_1, \dots, u_g , то отримаємо сферу з $2g$ дірками D_1, D_2, \dots, D_{2g} , які зручно інтерпретувати як виділені диски на сфері. Дірки природним чином

розбити на пари — в кожну пару D_{2i-1} , D_{2i} входять дírки, що відповідають меридіану u_i . Меридіани при цьому розріжуться на дуги, які різним способом з'єднують дírки. Для того, щоб за таким зображенням відновити діаграму Хегора однозначно, потрібно знати, як край кожної дírки D_{2i-1} склеюється з краєм дírки D_{2i} . Зручно занумерувати для цього точки перетину меридіану u_i з меридіанами v в тому порядку, в якому вони зустрічаються при обході меридіану u_i , і ці номери зберегти при розрізанні.

Розіб'ємо всі нормалізовані діаграми Хегора роду 2 на три класи. k паралельних дуг, що з'єднують одну дírку з іншою, будемо позначати однією дугою, поміченою числом k . В загальному випадку, коли на діаграмі немає простих петель, $a = e$, $b = f$

Означення 8 Діаграма Хегора (F, u, v) роду 2, що зображені на рис.2, будемо називати діаграмами типу I, II або III, відповідно.

Теорема 1 ([1]) Будь-яка нормалізована діаграма роду 2 гомеоморфна діаграмі одного з типів I, II або III.

Позначимо через a_{ij} ($i < j$) число дуг, з'єднує дírку D_i з дírкою D_j . На краях дірок D_1, D_2 повинно закінчуватись однакове число дуг, те саме справедливо для дірок D_3, D_4 . Тому числа a_{ij} повинні задовольняти співвідношення $a_{ij} \geq 0$ і систему (*): $a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,1} = a_{2,3} + a_{2,4} + a_{2,2}$, $a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = a_{1,4} + a_{2,4} + a_{4,4}$. Якщо кожну дírку стягнути в свою точку і кожний пучок паралельних дуг замінити на одну дугу, то отримаємо граф $G \subset S^2$. Ми повинні за допомогою інваріантного на вершинах гомеоморфізму сфери перевести його в один із графів G_I, G_{II}, G_{III} (Рис.1). Гомеоморфізм сфери може переставляти вершини, але тільки так, щоб вершини однієї пари, тобто 1 і 2, або 3 і 4, переставлялись як єдине ціле. Таких гомеоморфізмів багато. Можна, наприклад, будь-яку дугу, що з'єднує вершини 1 і 2, перевести у відрізок, а будь-яку петлю з кінцями в вершині 1, яка відокремлює вершину 3 від вершини 2, 4 — в звичайну петлю, що охоплює вершину 3.

Можливі три випадки:

- 1) граф G не має петель і подвійних ребер;
- 2) немає петель, але є подвійні ребра;
- 3) є петлі.

Ці випадки відповідають типам I, II, III. Розглянемо їх детальніше. 1) Нехай немає петель і подвійних ребер. Тоді з системи $a_{1,3} = a_{2,4}$, $a_{1,4} = a_{2,3}$. Покладемо $a = a_{1,3} = a_{2,4}$, $b = a_{1,2}$, $c = a_{3,4}$ і $d = a_{1,4} = a_{2,3}$. Якщо

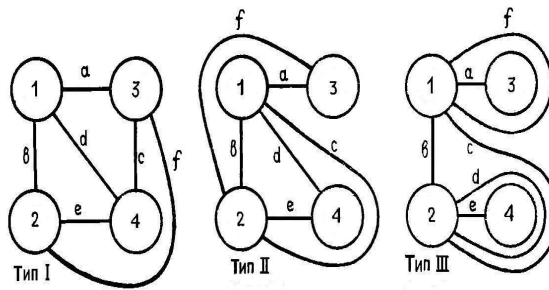


Рис.2

$a, b, c, d > 0$, то граф G — це повний граф з чотирма вершинами, тобто граф з 4 вершинами, будь-які дві з яких з'єднані тільки одним ребром. Граф G_I також має таку властивість. Оскільки всі вкладення такого графа в сферу еквівалентні (від одного можна перейти до іншого гомеоморфізмами сфери), то гомеоморфізм, за допомогою якого граф G переходить в граф G_I існує.

2) Нехай немає петель, але є подвійні ребра. Кожне подвійне ребро повинно розбивати сферу на дві частини, кожна з яких містить тільки одну вершину, в іншому випадку ребра були б паралельні, і ми замінили б їх на одне ребро. Можна вважати, що загальний початок пари подвійних ребер знаходиться у вершині 1. Тоді їх загальний кінець не може знаходитись у вершині 3 або 4, так як тоді система (*) буде несумісною. Тому загальний кінець подвійного ребра знаходиться у вершині 2 і гомеоморфізмом сфери його можна з'єднати з подвійним ребром графа G_{II} .

3) Нехай є петлі. Кожна петля розбиває сферу на частини, одна з яких містить тільки одну вершину. Будемо вважати, що петля починається з вершини 1. Тоді вона не може охоплювати вершину 2 — система (*) буде несумісною. Вершини 3 і 4 рівноправні. Тому можна вважати, що петля охоплює вершину 3. За допомогою гомеоморфізму сфери її можна перевести в аналогічну петлю графа G_{III} . $a_{2,2} = a_{1,1}, a_{1,3} = a_{2,4}$, петля з кінцями в вершині 2 повинна охоплювати вершину 4.

Розглянемо, діаграми яких типів допускають u -хвилю. В діаграмі типу III хвиля є завжди. В діаграмі типу II хвиля є тільки за умови $a = 0$ або $d = 0$. Якщо $c = d = 0$, то u -хвиля є і в діаграмі типу I. Випадки $b = d = 0, a = b = 0, a = c = 0$ будуть аналогічні, за рахунок перестановки першої і другої пари дірок або за рахунок перестановки 3-ї і 4-ї дірки можна завжди замінити a на d і b на c .

Якщо брати тільки многовиди, а не їх діаграми, то діаграми з хвилями можна не розглядати, оскільки вони спрощуються за допомогою хвильових перетворень. При цьому існування не тільки u -, але і v -хвилі можна побачити, виходячи з діаграми. Наприклад, якщо один з орієнтованих меридіанів v_i системи v входить в якусь дірку в одній точці, то v -хвиля існує. На основі опису структури діаграми Хегора роду 2 існує такий алгоритм переліку замкнених орієнтованих тривимірних многовидів, рід яких не більше 2:

1. По черзі перерахувати всі набори значень параметрів a, b, c, d .

2. Для кожного з них побудувати діаграму типу I або II. Щоб знати, як ототожнюються краї дірок, потрібно занумерувати на кожній з них кінці дуг в циклічному порядку. На непарних дірках можна вибрати додатній напрям обходу і нумерації зафіксувати, тоді на відповідних парних дірках потрібно вибрати від'ємний напрям обходу і послідовно перебрати всі циклічні перестановки.

3. З'ясувати, чи дійсно побудована діаграма буде діаграмою Хегора. Для цього, потрібно перевірити, чи буде рівно дві криві, і чи не розбивають вони поверхні. Якщо ці дві умови виконуються, то діаграма буде діаграмою Хегора деякого замкненого орієнтованого многовида роду не більше 2.

3 Деформація діаграм Хегора

Розглянемо на діаграмі Хегора крім петель, які обходять інші вершини, ще і прості петлі.

Означення 9 Простою петлею на діаграмі Хегора назвемо дугу, початок і кінець якої належать одній вершині, і яка при цьому вона не обходить інші вершини.

С.В. Матвеев ввів поняття складності для тривимірних многовидів [9]. А ми під складністю діаграми Хегора будемо розуміти таке:

Означення 10 Складністю діаграми Хегора назвемо кількість точок перетину між меридіанами, тобто сумарну кількість всіх дуг і простих петель на діаграмі.

Розглядаємо діаграми Хегора роду 2, гомеоморфні діаграмам типу I, II, III складності 4.

Теорема 2 Існує 15 діаграм Хегора складності 4, 6 діаграм складності 3, одна складності 2. Всі вони описані в таблиці.

a, b, c, d, e, f — дуги, що з'єднують вершини, 1, 2, 3, 4 — номер вершини, в таблиці вказуємо кількість простих петель, що відповідає даній вершині.

	a	b	c	d	e	f	1	2	3	4	тип
1	1	2	—	—	1	—	—	—	—	—	I
2	1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	II
3	1	1	—	—	—	—	—	1	—	—	I
4	1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	I
5	1	—	1	—	—	1	—	—	—	1	I
6	—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	I
7	—	1	3	—	—	—	—	—	—	—	I
8	1	—	—	1	1	1	—	—	—	—	I
9	—	1	1	1	—	1	—	—	—	—	I
10	—	2	—	1	—	1	—	—	—	—	I
11	—	1	1	1	—	1	—	—	—	—	II
12	—	1	1	—	—	—	—	—	1	1	I
13	1	1	—	—	1	—	—	—	—	—	I
14	—	1	—	1	—	1	—	—	—	—	I
15	—	1	2	—	—	—	—	—	—	—	I
16	1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	II
17	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	I
18	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	II
19	—	—	2	1	—	1	—	—	—	—	I
20	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	I
21	1	—	2	—	1	—	—	—	—	—	II
22	—	—	2	1	—	1	—	—	—	—	II

Можливі наступні рухи для діаграм: 1) витягування простих петель, 2) ковзання 3) попарна перестановка вершин (1), (2) між собою або (3) і (4).

Теорема 3 Якщо існує деформація, то вона реалізується рухами 1), 2), 3), Кожен рух задаємо парю діаграм, від однієї можна перейти до іншої послідовністю рухів. Всі можливі рухи: 1-10, 1-13, 1-15, 1-19, 2-11, 2-13, 2-15, 2-16, 3-5, 3-13, 3-14, 3-20, 4-9, 5-13, 5-17, 5-20, 8-9, 10-14, 10-15, 11-14, 11-15, 11-16, 12-20, 13-14, 13-17, 13-20, 14-20, 16-18, 16-20, 17-20, 18-20, 21-15, 21-16, 22-15, 22-18

Доведення. Ми можемо попарно міняти місцями вершини (1) і (2) між собою, а також (3) і (4), отримуючи при цьому еквівалентні діаграми Хегора. Так, якщо в діаграмі 1 поміняти місцями вершини (3) і (4), отримаємо діаграму 10, таким чином діаграма 1 еквівалентна діаграмі 10, 2 — діаграмі

11, 3 — 5, 4 — 9, 13 — 14, 13 — 17, 16 — 18, 19 — 1, 21 — 22. Витягуючи петлю з вершини кількість точок перетину меридіанів буде зменшуватись на 2. Так в графі 3, якщо витягнути з вершини (2) петлю, то отримаємо граф 20; витягнувши петлю у графі 5, прийдемо також до 20. Витягуючи петлю у графі 12 одразу скоротяться 2 петлі, і вийде граф 20. Розглянемо, як одна діаграма переходить в іншу при ковзанні. Кожна діаграма повинна містити дві криві. Для діаграми 1 можливі випадки: 1) Два ребра, що з'єднують вершини (1) і (2), належать різним кривим. 2) Два ребра, що з'єднують вершини (1) і (2), належать одній кривій; Розглянемо перший випадок. В діаграмі 1 дірки (1) і (3) з'єднані ребром. Візьмемо вершину (3) і протягнемо її через дірку (1), вийде вона через вершину (2), таким чином кількість точок перетину меридіанів зменшиться на 1, і граф 1 перейде у 13. У другому випадку, якщо ребро пройде крізь дірку (1), і вийде через (2), то отримаємо діаграму 15. Для графа 2 також можливі такі випадки розташування кривих: 1) b — це перша крива, a, c, e належать до другої кривої; 2) b, c — перша крива, a, e — друга 3) c — перша крива, a, b, e — друга Якщо b — окрема крива, то вершина (3) входить у вершину (1), виходить із (2) і переходить у граф 13. У другому випадку при такому русі отримаємо граф 15. Якщо a, b, e належать одній кривій, то ми перейдемо у граф 16. У діаграмі 3 протягуючи вершину (3) крізь (1), вийдемо з (2), граф перейде у 14. Також вершина (4) має спільну дугу з (1). Якщо ми будемо рухати (4) крізь (1), вийдемо з (2), отримаємо діаграму 13. В діаграмі 5 вершину (1) будемо протягувати крізь (3), вийдемо з (4), отримаємо 17, також вершини (2), (3) з'єднані дугою, операцією ковзання перейдемо до 13. У 8 (1) і (3) з'єднані дугою, ковзаючи, вершина (1) вийде з (4), діаграма перетвориться на 9. Для діаграми 10 можливі випадки: 1) Два ребра між вершинами (1) і (2) належать різним кривим. 2) Два ребра між вершинами (1) і (2) — це одна крива; Вершини (1) і (4) з'єднані дугою, у випадку 1) при ковзанні отримаємо 14, у другому 15. В діаграмі 11 можливе таке розташування кривих: а) b — окрема крива; б) c — окрема крива; в) b і c належать одній кривій. У випадку а) при ковзанні вершини (3) по (2) перейдемо до 14, у б) до 18, у в) до 15

В діаграмах 13, 16 вершини (1), (3) з'єднані ребром. Вершину (3) протягуємо крізь (1), виходимо із (2) і переходимо до діаграми 20. У діаграм 14, 18 вершини (1) і (4) з'єднані ребром, вершина (4) рухаючись крізь (1), вийде з (2), в результаті отримаємо 20. У 17 вершини (2) і (3) мають спільне ребро, рухаємо (2) крізь (3) вийдемо через (4), і перейдемо до 20. У 19 вершини (3)

і (4) з'єднані двома ребрами. Якщо вони з різних кривих, то протягуючи (1) крізь (4), які мають спільне ребро, отримаємо 17, якщо (3),(4) — одна крива, то маємо 15. У діаграмах 14, 18 вершини (1) і (4) мають спільну дугу, операцією ковзання у обох випадках кількість точок перетину меридіанів зменшиться з трьох до двох і отримаємо 20. В 21-ій діаграмі вершини (1) і (2) з'єднані двома дугами, які обходять вершину (4), вони можуть належати одній або різним кривим: 1) дві дуги c — перша крива, a, e — друга, 2) одна дуга c — перша крива, a, e і інша дуга c — друга крива. У першому випадку дірка (3) пройшовши крізь вершину (1) перейде у граф 15, у другому — у 16. Подібна ситуація для №22, c складається з двох дуг: 1) дві дуги c — перша крива, f, d — друга, 2) одна дуга c — перша крива, f, d та інша дуга c — друга крива. У першому випадку дірка (3) пройшовши крізь вершину (1) перейде у граф 15, у другому — у 18. Теорему доведено.

Висновки

В роботі для дослідження деформацій векторних полів на тривимірних многовидах використано діаграми Хегора роду два, в яких кількість точок перетину меридіанів не перевищує 4, описані еквівалентні діаграми. Кожна деформація задається послідовністю, описаною в теоремі 2. Було б цікаво узагальнити отримані результати для діаграм Хегора роду 3. Ми також сподіваємось, що результати цієї роботи будуть використані для дослідження деформацій функцій на тривимірних многовидах.

Література

1. Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. Издательство Московского университета, 1991, 301с.
2. Matveev S.V. Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. Second Edition / Springer, 2007. - 492p.
3. Maksimenko S.I. Homotopic types of right stabilizers and orbits of smooth functions on surfaces / Ukrainian Mathematical Journal, vol. 64, no. 9, 2012. - p.1186–1203
4. Пришляк А.О. Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях // Мат. заметки, том 71, вып. 2, 2002.-с.254–260
5. Пришляк А.О. Топологическая эквивалентность функций и векторных полей Морса-Смейла на трехмерных многообразиях // Праці укр. мат. конгресу, 2001. – Київ: 2003. – с.29–38
6. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления и трехмерные многообразия // М.: МЦНМО, 1997, - 352с.
7. Пришляк О.О. Теорія Морса. Київ, 2002. - 65с.
8. Hass J. Genus Two Heegaard Splittings: Proc. of the Amer. Math. Society. - 1992. - Vol.114, №2. - p.565–570.
9. Cattabrica M., Mulazzani M., Vesnin A. Complexity, Heegaard diagrams and generalized dunwoody manifolds. Bologna, Univ.of Bologna, 2008. - p.2–15

І.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: ivanna.ivanyuk@gmail.com, prishlyak@yahoo.com

Ivanna M. Ivanyuk, Alexandr O.Ptishlyak

The topological structure deformation functions of three-dimensional manifolds of genus 2

We consider the deformation of polar Morse-Smale vector fields without closed orbit on closed 3-manifolds. Heegaard diagram are building by the field. We describe diagram transformation corresponded to deformation of field. We consider Heegaard diagrams of genus 2, which have four and less points of intersection between meridians. The situation that the vertices have a simple loop are investigated. All possible transformations of diagram was describing, using the operations of sliding, pulling loops, permutations of the vertices. Thus we find all nonhomeomorphic diagrams and all possible transformations of it.

Про розв'язки матричного рівняння $XA_0 = A_1$ із заданими характеристичними многочленами

В. М. Прокіп

Анотація Досліджується структура розв'язків матричного рівняння $XA_0 = A_1$, де A_0 і A_1 – $(n \times m)$ -матриці над полем \mathbb{F} , X – невідома $(n \times n)$ -матриця. Нехай $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ – унітальний многочлен степеня n . В статті встановлено умови, за яких для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок із характеристичним многочленом $d(\lambda)$.

Ключові слова Матричне лінійне рівняння, характеристичний многочлен

УДК 512.643.4

Вступ

Нехай \mathbb{F} – поле. Введемо наступні позначення: $M_{n,m}(\mathbb{F})$ та $M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$ – множини $(n \times m)$ матриць над полем \mathbb{F} та кільцем многочленів $\mathbb{F}[\lambda]$ відповідно; I_n – одинична $(n \times n)$ -матриця; $0_{n,k}$ – нульова $(n \times k)$ -матриця. Надалі через $d_A^{(k)}(\lambda)$ позначатимемо найбільший спільний дільник (н.с.д.) мінорів k -го порядку матриці $A(\lambda) \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$, де $k = 1, 2, \dots, \min\{n, m\}$. Якщо $B(\lambda) \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ – неособлива матриця, то через $B^*(\lambda)$ позначатимемо (класичну) приєднану до неї матрицю, тобто $B^*(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)B^*(\lambda) = I_n \det B(\lambda)$.

Розглянемо матричне рівняння

$$XA_0 = A_1, \tag{1}$$

де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ і X невідома $(n \times n)$ -матриця. Відомо [1], що рівняння (1) над полем \mathbb{F} розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rank } A_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Незважаючи на те, що умова (2) розв'язності рівняння (1) є досить простою, багато авторів досліджували задачу про існування розв'язків цього рівняння, які належать до певних класів. Так в роботах [2]–[4] досліджувались умови, за яких для рівняння (1) над полем дійсних чисел існують симетричні розв'язки. Дальніші дослідження пошуку умов, за яких для рівняння (1) над полем дійсних або комплексних чисел існують додатньо (або від'ємно) визначені, кососиметричні, унітарні, ермітові, рефлексивні та *конгруентні розв'язки, наведені в роботах [5]–[10].

З огляду на сказане вище, закономірно виникає наступна задача. Нехай рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, сумісне. Нехай, далі, $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ – унітальний многочлен степеня n . Вказати умови, за яких для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$, тобто $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda)$. Якщо ж такий розв'язок існує, то запропонувати метод його знаходження. В даній статті встановлено умови, за яких для сумісного рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$. Крім цього, вказано клас сумісних матричних рівнянь над полем \mathbb{F} , які мають розв'язок із кожним унітальним многочленом $d(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$ степеня n .

1 . Допоміжні результати

Матричному рівнянню $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, поставимо у відповідність матричну в'язку $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$. Очевидно, що рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне тоді і тільки тоді, коли для матричної в'язки $A(\lambda)$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n\lambda - D)A_0$, де $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$. Тепер матричній в'язці $A(\lambda)$ та унітальному многочлену $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[x]$ степеня n поставимо у відповідність матриці

$$M(A) = \left. \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & 0_{n,m} & \dots & \dots & 0_{n,m} \\ 0_{n,m} & A_0 & -A_1 & 0_{n,m} & \dots & 0_{n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{n,m} & \dots & \dots & 0_{n,m} & A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \right\} (n-1),$$

$$N(A, d) = \begin{bmatrix} A_0d_1 + A_1 & A_0d_2 & \dots & A_0d_{n-1} & A_0d_n \end{bmatrix}.$$

Матриці $M(A)$ і $N(A, d)$ вимірності $n(n-1) \times mn$ та $n \times mn$ відповідно.

Доведемо, що із розв'язності рівняння $XA_0 = A_1$ випливає розв'язність рівняння $ZM(A) = N(A, d)$.

Лема 1 . Нехай матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ з характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n$ – розв'язок рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F})$. Нехай, далі,

$$B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda^{n-3} + \dots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F}[x])$$

– взаємна матриця для матриці $I_n\lambda - D$. Тоді матриця

$$Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{bmatrix}$$

є розв'язком рівняння $ZM(A) = N(A, d)$.

Доведення . Нехай матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda)$ є розв'язком рівняння $XA_0 = A_1$, тобто $DA_0 = A_1$. Отже, матрична в'язка $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ допускає зображення у вигляді добутку

$$A(\lambda) = (I_n\lambda - D)A_0. \quad (3)$$

Нехай, далі, $B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \dots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1} \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ – приєднана матриця для матриці $I_n\lambda - D$. Помноживши обидві частини рівності (3) зліва на $B(\lambda)$ здобуємо

$$B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0.$$

Виконавши множення в обох частинах останньої рівності та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях λ в лівій та правій частинах, отримуємо систему рівностей

$$\begin{cases} B_1A_0 & & & & = d_1A_0 + A_1, \\ B_2A_0 & - B_1A_1 & & & = d_2A_0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n-1}A_0 & - B_{n-2}A_1 & & & = d_{n-1}A_0, \\ & - B_{n-1}A_1 & & & = d_nA_0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{bmatrix}$ задовольняє рівність $Z_0M(A) = N(A, d)$. Отже, рівняння $ZM(A) = N(A, d)$ розв'язне. Лему доведено.

Тепер встановимо зв'язок між розв'язністю рівняння $ZM(A) = N(A, d)$ та матричною в'язкою $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$, яка поставлена у відповідність матричному рівнянню $XA_0 = A_1$.

Лема 2 . Нехай $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ і матриця

$$Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-2} & B_{n-1} \end{bmatrix},$$

де $B_j \in M_{n,n}(\mathbb{F})$; $j = 1, 2, \dots, n-1$; - розв'язок рівняння $ZM(A) = N(A, d)$. Тоді для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ та многочленної матриці

$$B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda^{n-3} + \dots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}$$

виконується співвідношення $B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0$.

Доведення . Рівність $Z_0M(A) = N(A, d)$ разом з тотожністю $A_0 = A_0$ рівносильна системі рівностей

$$\begin{cases} A_0 & = A_0, \\ B_1A_0 - A_1 & = d_1A_0, \\ B_2A_0 - B_1A_1 & = d_2A_0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ B_{n-1}A_0 - B_{n-2}A_1 & = d_{n-1}A_0, \\ & - B_{n-1}A_1 = d_nA_0. \end{cases} \quad (4)$$

Помноживши обидві частини k -го рівняння із (4) на λ^{n-k} , $k = 0, 1, \dots, n$; та склавши при цьому ліві та праві частини отримуємо

$$\begin{aligned} & A_0\lambda^n + (B_1A_0 + A_1)\lambda^{n-1} + (B_2A_0 - B_1A_1)\lambda^{n-2} + \dots \\ & + (B_{n-1}A_0 - B_{n-2}A_1)\lambda - B_{n-1}A_1 = \\ & (\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + d_1\lambda^{n-2} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n)A_0. \end{aligned}$$

З даної рівності здобуваємо, що для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ та многочленної матриці $B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + \dots + B_{n-2}\lambda + B_{n-1}$ виконується співвідношення $B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0$. Лему доведено.

2 . Основні результати

Нехай матричне рівняння $XA_0 = A_1$ сумісне (X – невідома $n \times n$ матриця). Неважко переконатись в тому (див. приклад 1), що не для кожного унітального многочлена $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n$ для цього рівняння існує розв'язок із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. В цій частині встановимо умови, за яких для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$.

Теорема 1 . *Нехай для рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F})$,*

$$\text{rank } A_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1. \quad (5)$$

Якщо $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n$ тоді і тільки тоді, коли

$$\text{rank } M(A) = \text{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix}.$$

При цьому шуканий розв'язок $X_0 = D$ однозначно визначається заданим многочленом $d(\lambda)$.

Доведення . Необхідність. Так як виконується умова (5), то рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне. Нехай матриця $X_0 = D$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$ розв'язок цього рівняння. На підставі леми 1 рівняння $ZM(A) = N(A, d)$ розв'язне, що і доводить необхідність.

Достатність. Нехай матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{n-1} \end{bmatrix}$, де $B_j \in M_{n,n}(\mathbb{F})$; $j = 1, 2, \dots, n - 1$; – розв'язок рівняння $ZM(A) = N(A, d)$. Згідно леми 2 для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ та многочленної матриці $B(\lambda) = I_n\lambda^{n-1} + B_1\lambda^{n-2} + B_2\lambda^{n-3} + \dots + B_{n-1}$ виконується співвідношення

$$B(\lambda)A(\lambda) = d(\lambda)A_0. \quad (6)$$

Враховуючи рівність (5) отримуємо $\text{rank } A(\lambda) = n - 1$. Так як $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для матричної в'язки $A(\lambda)$ існують матриці $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$ такі, що $A(\lambda) = U(\lambda) \text{diag}(1, \dots, 1, 0)V(\lambda)$. На підставі цього з рівності (6) отримуємо

$$B(\lambda)U(\lambda) \text{diag}(1, \dots, 1, 0) = d(\lambda)A_0V^{-1}(\lambda).$$

Звідси випливає

$$B(\lambda)U(\lambda) = W(\lambda) \text{diag}(d(\lambda), \dots, d(\lambda), 1). \quad (7)$$

Оскільки $\deg \det B(\lambda) = n(n-1)$ і $U(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, то перейшовши до визначників в обох частинах рівності (7), здобуємо $\det B(\lambda) = d^{n-1}(\lambda)$ і $W \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$. Отже, для матриці $G(\lambda) = \text{diag}(1, \dots, 1, d(\lambda))W^{-1}(\lambda)$ має місце співвідношення

$$B(\lambda)U(\lambda)G(\lambda) = I_n d(\lambda). \quad (8)$$

Так як $\deg B(\lambda) = n-1$ і $\deg b(\lambda) = n$, то з рівності (8) випливає, що

$$U(\lambda)G(\lambda) = I_n \lambda - D \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda]) \quad (9)$$

– матрична в'язка з визначником $\det(I_n \lambda - D) = d(\lambda)$. Враховуючи співвідношення (8) рівність (6) перепишемо так

$$B(\lambda)A(\lambda) = B(\lambda)U(\lambda)G(\lambda)A_0 = B(\lambda)(I_n \lambda - D)A_0.$$

Звідси здобуємо, що для матричної в'язки $A(\lambda)$ існує зображення у вигляді добутку $A(\lambda) = (I_n \lambda - D)A_0$, де $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ – матриця з характеристичним многочленом $d(\lambda)$. Отже, матриця D є розв'язком рівняння $XA_0 = A_1$. Крім цього, на підставі рівності (8) отримуємо $B(\lambda)(I_n \lambda - D) = I_n d(\lambda)$. Звідси здобуємо, що $D = B_1 - I_n d_1$.

Доведемо, що шуканий розв'язок $X_0 = D$ однозначно визначений многочленом $d(\lambda)$. Враховуючи умову (5) припустимо, що для рівняння $XA_0 = A_1$ існує ще один розв'язок $\tilde{D} \in M_n(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$, який відмінний від попереднього, тобто $\tilde{D} \neq D$. Тоді

$$A(\lambda) = (I_n \lambda - D)A_0 = (I_n \lambda - \tilde{D})A_0.$$

Так як $A(\lambda) = U(\lambda) \text{diag}(1, \dots, 1, 0)V(\lambda)$, де $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, то на підставі рівності (9) здобуємо

$$\begin{aligned} I_n \lambda - \tilde{D} &= U(\lambda) \text{diag}(1, \dots, 1, d(\lambda))W_1(\lambda) = \\ &U(\lambda) \text{diag}(1, \dots, 1, d(\lambda))W(\lambda)W^{-1}(\lambda)W_1(\lambda) = \\ &(I_n \lambda - D)Q(\lambda), \end{aligned}$$

де $W_1(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$ і $Q(\lambda) = W^{-1}(\lambda)W_1(\lambda)$. Звідси випливає, що рівність $I_n \lambda - \tilde{D} = (I_n \lambda - D)Q(\lambda)$ можлива лише при $Q(\lambda) = I_n$.

Отже, матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$, яка є розв'язком рівняння $XA_0 = A_1$, однозначно визначена своїм характеристичним многочленом $d(\lambda)$. Одночасно здобуємо, що рівняння $ZM(A) = N(A, d)$ має єдиний розв'язок, тобто $\text{rank } M(A) = \text{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix} = n(n-1)$. Теорему доведено.

Зауважимо, що із доведення достатності теореми 1 отримуємо метод побудови розв'язку рівняння $XA_0 = A_1$ із заданим характеристичним многочленом, який будемо за розв'язком рівняння $ZM(A) = N(A, d)$.

Теорема 2 . Нехай для рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0, A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{F})$,

$$\text{rank } A_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n - 1. \quad (10)$$

Якщо для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1$ н.с.д. мінорів $(n - 1)$ -го порядку $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для кожного унітального многочлена

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$$

для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. При цьому матриця D многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно.

Доведення . На підставі рівності (10) матричне рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне. Нехай матриця $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $\det(I_n\lambda - D) = d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n$ є розв'язком цього рівняння. Отже, $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 = (I_n\lambda - D)A_0$. Так як $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то згідно теореми 1 матриця D характеристичним многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно. Крім цього

$$\text{rank } M(A) = \text{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix} = n(n - 1).$$

Оскільки $\text{rank } A_0 = n - 1$, то для A_0 існує матриця $T \in GL(n, \mathbb{F})$ така, що $A_0T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix}$, де $\tilde{A}_0 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. На підставі цього здобуємо

$$A(\lambda)T = (I_n\lambda - D)A_0T = (I_n\lambda - D) \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(x) & 0_{n,1} \end{bmatrix},$$

де $\tilde{A}_1 = D\tilde{A}_0 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. Отже, матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ – розв'язок рівняння $X\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1$. Так як $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$, то для матричної в'язки $\tilde{A}(\lambda) \in M_{n,n-1}(\mathbb{F}[\lambda])$ виконується $d_{\tilde{A}}^{(n-1)}(\lambda) = 1$. Згідно теореми 1 та наслідку 1

$$\text{rank } M(\tilde{A}) = \text{rank} \begin{bmatrix} M(\tilde{A}) \\ N(\tilde{A}, d) \end{bmatrix} = n(n - 1).$$

Так як $M(\tilde{A})$ квадратна $(n - 1)n \times (n - 1)n$ -матриця, то з останньої рівності випливає, що $M(\tilde{A})$ – неособлива матриця.

Таким чином, рівняння $ZM(\tilde{A}) = N(\tilde{A}, d)$ розв'язне для довільного унітального многочлена $d(\lambda)$ степеня n . Оскільки матричні рівняння $XA_0 = A_1$ і $X\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1$ рівносильні, то матричне $ZM(A) = N(A, d)$ розв'язне для довільного унітального многочлена $d(\lambda)$ степеня n . На підставі теореми 1, розв'язок $X_0 = D$ рівняння $XA_0 = A_1$ однозначно визначається характеристичним многочленом $d(\lambda) = \det(I_n\lambda - D)$. Теорему доведено.

Розглянемо матричне рівняння

$$XA_0 = A_1, \quad (11)$$

де $A_0, A_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. Рівняння (11) розв'язне тоді і тільки тоді, коли розв'язне рівняння $X \begin{bmatrix} A_0 & 0_{n,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n,1} \end{bmatrix}$. Із теореми 1 отримуємо.

Наслідок 1 . Нехай для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F}[\lambda])$ н.с.д. мінорів $(n-1)$ -го порядку $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$. Якщо $\text{rank } A_0 = n-1$, то для кожного унітального многочлена

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$$

для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. При цьому матриця D многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно.

Наслідок 2 . Нехай для матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{F}[\lambda])$, $m > n$, н.с.д. мінорів $(n-1)$ -го порядку $d_A^{(n-1)}(\lambda) = 1$. Якщо $\text{rank } A_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n-1$, то для кожного унітального многочлена

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$$

для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. При цьому шуканий розв'язок D характеристичним многочленом $d(\lambda)$ визначений однозначно.

Доведення . Так як $\text{rank } A_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = n-1$, то для матриць $A_0, A_1 \in$

$M_{n,m}(\mathbb{F})$ існує матриця $W \in GL(m, \mathbb{F})$ така, що

$$A_0W = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0_{n,m-n} \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 & 0_{n,m-n+1} \\ \tilde{A}_1 & 0_{n,m-n+1} \end{bmatrix},$$

де $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F})$. Очевидно, що $d_{\tilde{A}}^{(n-1)}(\lambda) = 1$, де $\tilde{A}(\lambda) = \tilde{A}_0\lambda - \tilde{A}_1 \in M_{n,n-1}(\mathbb{F}[\lambda])$. На підставі наслідку 1, для кожного унітального многочлена $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ для рівняння $X\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1$ існує розв'язок $X_0 = D \in M_{n,n}(\mathbb{F})$ із характеристичним многочленом $d(\lambda)$. При цьому матриця D многочленом $d(\lambda)$ визначена однозначно. Оскільки рівняння $X\tilde{A}_0 = \tilde{A}_1$ і $XA_0 = A_1$ рівносильні, то наслідок доведено.

3 . Приклади

Нехай $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел. Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1 . Нехай $A_0 = A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$. Очевидно, що рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне над полем \mathbb{Q} . Покажемо, що для даного рівняння не існує розв'язку з характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$. Припустимо, що матриця $X_0 = D \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ із заданим характеристичним многочленом $d(\lambda)$ є розв'язком цього рівняння. Згідно леми 1 для матричної в'язки $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \lambda - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ та многочлена $d(\lambda)$ рівняння $ZM(A) =$

$N(A, d)$ розв'язне. Очевидно, що $\text{rank } M(A) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$. Про-

те $\text{rank} \begin{bmatrix} M(A) \\ N(A, d) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$. Так як рівняння $ZM(A) =$

$N(A, d)$ несумісне, то для рівняння $XA_0 = A_1$ не існує розв'язку $X_0 = D$ з характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$.

Приклад 2 . Розглянемо матричне рівняння $XA_0 = A_1$, де $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

і $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Легко перевірити, що $\text{rank } A_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = 2$ і для

матричної в'язки $A(\lambda) = A_0\lambda - A_1 \in M_{3,3}(\mathbb{Q}[\lambda])$ н.с.д. мінорів 2-го порядку $d_A^{(2)}(\lambda) = 1$. Отже, для кожного унітального многочлена третього степеня $d(\lambda) \in \mathbb{Q}[\lambda]$ для рівняння $XA_0 = A_1$ існує розв'язок із характеристичним многочленом $d(\lambda)$.

Вкажемо розв'язок цього рівняння із характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^3$. Тепер побудуємо матриці

$$M(A) = \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & A_0 & -A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$N(A, d) = \begin{bmatrix} A_0 d_1 + A_1 & A_0 d_2 & A_0 d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця $Z_0 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ – розв'язок рівняння

$$ZM(A) = N(A, d).$$

Так як $B_1 - D = I_3 d_1$, то $D = B_1 - I_3 d_1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ – шуканий розв'язок

рівняння із характеристичним многочленом $d(\lambda) = \lambda^3$.

Надалі \mathbb{C} – поле комплексних чисел. Здобуті результати можуть бути використані при розв'язуванні систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. В цьому зв'язку розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dY(t)}{dt} A_0 = Y(t) A_1, \quad (12)$$

де $A_0, A_1 \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ і $Y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_n(t)]$ – невідомий вектор-рядок від змінної t . Очевидно, якщо рівняння $XA_0 = A_1$ розв'язне, то система лінійних диференціальних рівнянь (12) теж розв'язна. Нехай матриця $D \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ – розв'язок рівняння $XA_0 = A_1$. Тепер систему лінійних диференціальних рівнянь (12) запишемо у вигляді $\left(\frac{dY(t)}{dt} - Y(t)D\right) A_0 = 0$. Оскільки рівняння $\frac{dY(t)}{dt} = Y(t)D$ розв'язне, то розв'язки системи рівнянь (12) ми можемо шукати з наперед заданим спектром. Отже, результати попереднього розділу можуть бути застосовані до пошуку розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь (12) з наперед заданими характеристичними значеннями.

Література

1. Ф.Р. Гантмахер. *Теория матриц*. М.: Физматлит, 1988, 556 с.
2. F.J.H. Don. *On the symmetric solutions of a linear matrix equation* // Linear Algebra Appl., **93**(1987), p.1-7.
3. K.-W.E. Chu. *Symmetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions* // Linear Algebra Appl., **119** (1989), p.35-50.
4. Hua Dai. *On the symmetric solutions of linear matrix equations* // Linear Algebra Appl., **131** (1990), p.1-7.
5. L. Wu. *The Re-positive definite solution to the matrix inverse problem $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **174** (1992), p.145-151.
6. L. Wu, B. Cain. *The Re-nonnegative definite solutions to the matrix inverse problem $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **236** (1996), p.137-146.
7. Zhenyun Peng, Xiyun Hu. *The reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equation $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **375** (2003), p.147-155.
8. Chunjun Meng, Xiyun Hu, Lei Zhang. *The skew-symmetric orthogonal solutions of the matrix equation $AX = B$* // Linear Algebra Appl., **402** (2005), p.303-318.
9. R.A. Horn, V. Sergeichuk, N. Shaked-Monderer. *Solution of linear matrix equations in a *congruence class* // Electron. J. Linear Algebra, **17** (2005), p.153-156.
10. Bing Zheng, Lijuan Ye, Dragana S. Cvetkovic-Ilic. *The *congruence class of the solutions of some matrix equations* // Comput. Math. Appl., **57** (2009), p.540-549.

В. М. Прокіп

ІППММ НАН України, Львів, Україна

E-mail: v.prokip@gmail.com

V.M. Prokip

On solutions of the matrix equation $XA_0 = A_1$ with prescribed characteristic polynomials

We investigate the structure of solutions of a matrix equation $XA_0 = A_1$, where A_1, A_2 are $n \times m$ matrices over a field \mathbb{F} and X is unknown $n \times n$ matrix. Let $d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n \in \mathbb{F}[\lambda]$ be a monic polynomial of degree n . In this note we present the conditions under which for the equation $XA_0 = A_1$ there exists a solution $X_0 = D$ with the characteristic polynomial $d(\lambda)$.

Correspondences of probability measures with restricted marginals

Aleksandr Savchenko Mykhailo Zarichnyi

Abstract We derive the proof of continuity of the correspondence of probability measures with restricted marginals from the property of bicommutativity in the sense of E. Shchepin of probability measure functor.

Keywords probability measure, product, bicommutative functor

Mathematics Subject Classification (2010) 4B30, 54G60

1 Introduction

In [1] it is proved that the correspondence assigning to every probability measures on two coordinate spaces the set of probability measures on the product is continuous. Earlier, a similar result was proved by Eifler [2] and Schief [6].

In this note we develop a different approach to this problem and apply some known properties of probability measures in order to prove a more general result. Note that problems of this type arise in mathematical economy (see, e.g., introduction in [1]). Consider the income distributions at the time period k as probability measures μ_k on a space Y of possible incomes. Then any redistribution policy can be interpreted as a probability measure, τ , on the product $Y \times \dots \times Y$ such that the marginal distributions of τ are μ_i and this leads to the problem of welfare maximization for prescribed sequence μ_1, \dots, μ_k and dependence of this maximum on μ_1, \dots, μ_k .

A part of this text circulated as a preprint of the second-named author (see also the preprint [3]). In this note, we consider the problem not in full generality, our aim is rather unveiling the basic idea, which consists in reducing the situation

to the case of finite spaces. Remark that the methods used in this note are based on general properties of functors in the category of compact Hausdorff spaces and Shchepin's theory of uncountable inverse spectra [7].

2 Preliminaries

By 1_X we denote the identity map of X . Given a product $\prod_i X_i$, we denote by π_i its projection onto the i th coordinate.

Given a topological space X , denote by $\exp X$ its hyperspace, i.e., the set of nonempty compact subsets in X endowed with the Vietoris topology. A base of this topology consists of the sets of the form

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subset \cup_{i=1}^n U_i, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ for all } i\},$$

where U_1, \dots, U_n are open subsets in X and $n \in \mathbb{N}$.

Given a compact-valued map (correspondence) $F: X \rightarrow Y$, we regard it as a (single-valued) map from X into $\exp Y$. The continuity of the correspondence F is equivalent to the continuity of f if we endow $\exp Y$ with the Vietoris topology.

Every continuous onto map $f: X \rightarrow Y$ determines the inverse map $f^{-1}: Y \rightarrow \exp X$, $y \mapsto f^{-1}(y)$. It is a well-known fact that f is open if and only if f^{-1} is continuous.

2.1 Inverse systems and bicommutative diagrams

A commutative diagram

$$X[r]^f[d]_g Y[d]^u Z[r]_v T \tag{1}$$

is called bicommutative [5] if its characteristic map

$$\chi = (f, g): X \rightarrow Y \times_T Z = \{(y, z) \in Y \times Z \mid u(y) = v(z)\}$$

is onto. The following lemma is proved by Shchepin [7].

Lemma 1 *Suppose that in diagram (1) the spaces X, Y, Z, T are compact, the maps f, g, u, v are continuous and g, u are onto. If f is an open map, then so is v .*

The necessary definitions and results concerning σ -spectra (inverse systems) can be found in [7]. Here we only recall that a morphism $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ of an inverse system $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$ into an inverse system $\mathcal{S}' = \{X'_\alpha, p'_{\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$ is called bicommutative if, for every $\alpha \geq \beta$, the diagram

$$X_\alpha[r]^{f_\alpha} [d]_{p_{\alpha\beta}} X'_\alpha [d]^{p'_{\alpha\beta}} X_\beta [r]_{f_\beta} X'_\beta$$

is bicommutative.

In [7], it is proved that for any bicommutative morphism of σ -spectra consisting of open maps the limit map $\varprojlim(f_\alpha): \varprojlim \mathcal{S} \rightarrow \varprojlim \mathcal{S}'$.

2.2 Probability measures and bicommutative diagrams

By P we denote the probability measure functor in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces and continuous maps.

Lemma 2 For arbitrary maps $f_i: X_i \rightarrow X'_i$, $i = 1, \dots, k$, the diagram

$$P\left(\prod X_i\right)[d]_{P(\prod f_i)}[rr]^{M_{X_1, \dots, X_k}} \prod P(X_i)[d]^{\prod P(f_i)} P\left(\prod X'_i\right)[rr]_{M_{X'_1, \dots, X'_k}} \prod P(X_i) \quad (2)$$

is bicommutative. We will use the fact that P is a bicommutative functor in the sense that it preserves the class of bicommutative diagrams (see [6]).

Proof Given $\tau' \in P(\prod X'_i)$ and $(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \prod P(X'_i)$ such that

$$M_{X'_1, \dots, X'_k}(\tau') = \prod P(f_i)(\mu_1, \dots, \mu_k) = (P(f_1)(\mu_1), \dots, P(f_k)(\mu_k))$$

we proceed as follows.

For every $j \leq k$ denote by \mathcal{D}_i the diagram

$$\prod_{i \leq j} X_i \times \prod_{i > j} X'_i [d]_{\prod_{i \leq j} f_i \times 1_{\prod_{i > j} X'_i}} [rr]^{\pi_i} X_j [d]^{f_j} \prod X'_i [rr]_{\pi_j} X'_j,$$

which is obviously bicommutative.

Since $P(\pi_1)(\tau') = P(f_1)(\mu_1)$, applying the functor P to the diagram \mathcal{D}_1 we find $\tau_1 \in P(X_1 \times \prod_{i > 1} X'_i)$ such that

$$P(\pi_1)(\tau_1) = \mu_1, \quad P(f_1 \times 1_{\prod_{i > 1} X'_i})(\tau_1) = \tau'.$$

Consider natural l , $1 \leq l \leq k$, and suppose that, for every $j < l$, we have defined $\tau_j \in P\left(\prod_{i \leq j} X_i \times \prod_{i > j} X'_i\right)$ such that $P(\pi_j)(\tau_j) = \mu_j$ and $P\left(f_i \times 1_{\prod_{i > j} X'_i}\right)(\tau_j) = \tau_{j-1}$. Note that

$$\begin{aligned} P(f_l)(\mu_l) &= P(\pi_l)(\tau') = P(\pi_l)\left(P\left(f_1 \times 1_{\prod_{i > 1} X'_i}\right)\right) \\ &= \dots \\ &= P(\pi_l)\left(P\left(f_1 \times 1_{\prod_{i > 1} X'_i} \dots P\left(\prod_{i \leq l-1} f_i \times 1_{\prod_{i > l-1} X'_i}\right)\right)\right) \\ &= P(\pi_l)(\tau_{l-1}). \end{aligned}$$

Applying the functor P to the bicommutative diagram \mathcal{D}_j we conclude that there exists $\tau_l \in P\left(\prod_{i \leq l} X_i \times \prod_{i > l} X'_i\right)$ such that $P(\pi_l)(\tau_l) = \mu_l$ and $P\left(\prod_{i \leq l} f_i \times 1_{\prod_{i > l} X'_i}\right)(\tau_l) = \tau_{l-1}$.

It is easy to see that $\tau = \tau_k$ has the following properties: $M_{X_1, \dots, X_k}(\tau) = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ and $P(\prod f_i) = \tau'$. This proves the bicommutativity of diagram (2).

3 Result

The following is the main result of this note.

Let X_1, \dots, X_k be a finite sequence of compact spaces. Then the multivalued map assigning to every μ_1, \dots, μ_k , where $\mu_i \in P(X_i)$, $i = 1, \dots, k$, the set

$$M(\mu_1, \dots, \mu_k) = M_{X_1, \dots, X_k}(\mu_1, \dots, \mu_k) = \{\nu \in P\left(\prod X_i\right) \mid P(\pi_i) = \mu_i, i = 1, \dots, k\}$$

is continuous.

Proof Our proof consists of three steps.

1) Suppose that the spaces X_1, \dots, X_k are finite. Then the map M_{X_1, \dots, X_k} is an affine surjective map of compact convex polyhedra. In order to prove that every such map, say, $f: A \rightarrow B$ is open, it suffices to show that any point a of A lies in the image of a selection of f . Denote by C the union of simplices of the geometric boundary of B that do not contain the point $f(a)$. For every vertex c of a simplex in C let $g(c)$ be an arbitrary point of $f^{-1}(c)$. Extend the so-defined map g onto C affinely onto every simplex of C . Now, every point b in B can be uniquely represented in the form $tf(a) + (1-t)c$, where $c \in C$. Define $g(b) = ta + (1-t)g(c)$. We see that $fg = 1_B$ and $a \in g(B)$.

2) Suppose now that the spaces X_1, \dots, X_k are zero-dimensional. Then, for each i , there exists an inverse σ -system $\mathcal{S}_i = \{X_{i\alpha}, p_{i\alpha\beta}; \mathcal{A}\}$ consisting of finite spaces and surjective maps such that $X_i = \varprojlim \mathcal{S}_i$, $i = 1, \dots, k$.

By Lemma 2, the maps $(M_{X_{1\alpha}, \dots, X_{k\alpha}})_\alpha$ form a bicommutative morphism of the systems $\{P(\prod_i X_{i\alpha}), P(\prod_i p_{i\alpha\beta}); \mathcal{A}\}$ and $\{\prod_i P(X_{i\alpha}), \prod_i P(p_{i\alpha\beta}); \mathcal{A}\}$. The result of Shchepin mentioned above together with was proved in case 1) show that the limit map of the morphism, namely, the map M_{X_1, \dots, X_k} is continuous.

3) X_1, \dots, X_k are arbitrary compact Hausdorff spaces. Then there exist maps $f_i: Y_i \rightarrow X_i$, where Y_i are compact Hausdorff zero-dimensional spaces. Consequently applying Lemmas 1 and 2 we obtain the result.

ne can generalize the main result in different directions. First of all, the products in Theorem 3 need not be finite. The proof requires transfinite induction instead of finite one.

Second, one can replace the probability measure functor by another functors acting in the category **Comp** (see, e.g., the preprint [3]). Namely, consider the functor ccP defined as follows. The space $ccP(X)$ is the subspace in $\exp P(X)$ consisting of convex sets; for a map $f: X \rightarrow Y$, the map $ccP(f): ccP(X) \rightarrow ccP(Y)$ acts by the formula $ccP(f)(A) = P(f)(A)$, for $A \in ccP(X)$. The proof that a counterpart of Theorem 3 holds also for the functor ccP consists in establishing a counterpart of Lemma 2 for the functor ccP and finite spaces X_1, \dots, X_k . Note that this approach leads to a proof which is simpler than that in [3].

The second-named author considered the functor of idempotent measures (Maslov measures) in the category **Comp** (see [8]). In [8], it is proved, in particular, that one cannot replace the probability measure functor by the idempotent measure functor in Theorem 3.

A functor in the category **Comp** is said to be open-bicommutative if this functor preserves the class of open-bicommutative diagrams, i.e., diagrams (1) for which the characteristic maps are onto and open. A more general notion of open multi-commutativity of functors is introduced in the preprint [4].

References

1. J. Bergin, On the continuity of correspondences on sets of measures with restricted marginals, *Economic Theory*, 13(1999), 471–481.
2. L.Q. Eifler, Some open mapping theorems for marginals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 211 (1975), pp. 311–319.
3. R. Kozhan, Open-multicommutativity of some functors related to the functor of probability measures, preprint (arXiv:math/0409566).
4. R. Kozhan, M. Zarichnyi, Open-multicommutativity of the probability measure functor, preprint (arXiv:math/0409590).
5. K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1. - Academic Press, New York–London, 1996.
6. A. Schief, An open mapping theorem for marginals, *J. Math. Analysis Appl.*, Volume 147, Issue 2, 1990, 506–511.
7. E.V. Shchepin, Functors and uncountable powers of compacta, *Russian Mathematical Surveys*, 1981, 36:3, 1–71.
8. M.M. Zarichnyi, Spaces and maps of idempotent measures, *Izvestiya: Mathematics*, 2010, 74:3, 481–499.

Aleksandr Savchenko

Kherson State Agrarian University, 23 Rozy Liuksemburg Str., 73006 Kherson, Ukraine

E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Mykhailo Zarichnyi

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Топологическая классификация функций Морса рода 1 на S^3

А. В. Сергеюк

Аннотация В данной статье рассматривается вопрос о топологической классификации функций Морса на трехмерной сфере, все критические точки которой лежат на разных поверхностях уровня. Классификация производится по отношению к группе $\text{Diff}_0(S^3) \times \text{Diff}_0(\mathbb{R})$ – группе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов областей определения и значений. Описаны соответствующие ориентированные графы (графы Кронрода-Риба). Показано, что для функций, компоненты поверхностей уровня которых не сложнее тора, они являются полными инвариантами. Более того, каждый такой граф может быть реализован функцией рода 1, поэтому для более сложных функций на сфере эти ориентированные графы уже не различают их топологический тип.

Ключевые слова функция Морса · топологическая классификация · трехмерная сфера

УДК 517.91

1 Введение

Задача о топологической классификации функций Морса является частью общей задачи о классификации дифференцируемых отображений между многообразиями. Общее определение, сформулированное Р. Томом, звучит так: два отображения $f, g \in C^k(M, N)$ называются дифференцируемо-

эквивалентными если существуют C^k -дiffeоморфизмы $h: M \rightarrow M$ и $k: N \rightarrow N$ такие что $f \circ h = k \circ g$, $0 \leq k \leq \infty$. Аналогичным образом эту задачу можно сформулировать как задачу об описании орбит естественного действия группы Ли $\text{Diff}^k(M) \times \text{Diff}^k(N)$ на многообразии $C^k(M, N)$. В случае пространства вещественных гладких функций $C^\infty(M, \mathbb{R})$ имеется его стратификация, предложенная и описанная Ж.Серфом [6]. Стратом \mathcal{F}_0 коразмерности 0 является пространство функций с невырожденными критическими точками (функции Морса), причем никакие две критические точки не лежат на одном уровне. Этот страт имеет много замечательных свойств, см. [16]. Функции из этого страта мы будем называть "функциями общего положения". Естественно начинать изучать топологическую классификацию именно с них, заданных на конкретных многообразиях, причем иногда, в зависимости от заданного многообразия, разумным является ограничивать группу $\text{Diff}^k(M) \times \text{Diff}^k(\mathbb{R})$ до группы $\text{Diff}_0(M) \times \text{Diff}_0(\mathbb{R})$ – изотопных тождеству диффеоморфизмов.

В.Арнольдом была изучена топологическая классификация функций общего положения на окружности S^1 при изотопных тождеству диффеоморфизмах [1]. Эти функции классифицируются конечными последовательностями пилообразного типа, названные им "змеями". Он также подсчитал количество неэквивалентных функций с заданным количеством критических точек, выразив его через коэффициент разложения в ряд функции \tan .

В.Шарко исследовал вопрос о топологической классификации в случае поверхностей [14]. Им был получен полный инвариант функций даже более широкого класса. Этим инвариантом является специальным образом ориентируемый граф ("граф Кронрода-Риба"). В дальнейшем, Арнольд, используя инвариант Шарко, занялся подсчетом числа неэквивалентных функций общего положения на двумерной сфере с заданным количеством критических точек, сформулировав гипотезу о его асимптотическом росте [2]. Эта гипотеза вскоре была доказана Николаеску, который также вывел для этого числа рекуррентную формулу [10],[11]. В.Арнольд стал развивать эти исследования для случая двумерного тора, ограничиваясь специфическими классами функций, также он изучал связи этой задачи с вещественной алгебраической геометрией [4], [5]. Свойства действия группы Diff на поверхностях изучались в работе [8].

А. Пришляк исследовал общий вопрос о топологической классификации функций Морса на многообразиях размерности 3 и 4, связав её с классификациями соответственно диаграм Хегора и Кёрби [12], [13].

Целью данной статьи является развитие этого направления на конкретный случай трехмерной сферы S^3 . Вопрос о строении графов функций на S^3 был также поставлен Арнольд в его лекциях [5]. Ограничиваясь функциями Морса, род компонент поверхностей уровней которых не сложнее тора (функции Морса рода 1), мы показываем что соответствующий ориентированный граф, как и в случае функций на S^2 , также является полным инвариантом и описываем все такие графы. Вместе с тем оказывается, что для функций высших родов ориентированные графы уже не способны различить их топологический тип.

2 Топология функций общего положения на S^3

Пусть задана функция Морса $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$, все критические точки которой лежат на разных уровнях. Такие функции мы также будем называть *функциями общего положения*. Обозначим через m_i количество критических точек индекса i . По теореме Морса,

$$\sum_{i=0}^3 (-1)^i m_i = \chi(S^3) = 0.$$

Обозначим через $n = 2k = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$ количество всех критических точек функции f . Тогда $m_2 = k - m_0$ и $m_3 = k - m_1$.

Предложение 1 *Имеют место следующие неравенства*

$$\begin{aligned} 1 &\leq m_0 \leq k \\ m_0 - 1 &\leq m_1 \leq k - 1, \end{aligned}$$

причем m_0 и m_1 могут принимать любые значения из этого диапазона.

Доказательство Функция имеет не менее одного минимума, поэтому $m_0 \geq 1$. Предположим что $m_0 > k$. Тогда должно существовать как минимум k критических точек индекса 1 чтобы нулевое число Бетти равнялось нулю, поскольку в соответствующем разложении сферы на ручки каждой критической точке индекса 0 соответствует своя компонента связности. Для их соединения необходимо как минимум k ручек индекса 1. Но тогда общее количество критических точек будет превосходить $2k$. Поэтому $m_0 \leq k$ и $m_1 \geq m_0 - 1$.

Равенства $m_0 = k$, $m_1 = m_0 - 1$ и $m_1 = k - 1$ возможны, поскольку тогда в соответствующем разложении на ручки будут существовать $k - 1$ ручек индекса 1, уменьшающих количество компонент связности до единицы, в результате чего получится трехмерный диск, и также будет одна ручка индекса 3, заклеивающая этот диск до трехмерной сферы – она соответствует единственной критической точке индекса 3.

Неравенство $m_1 \leq k - 1$ следует из того что $m_3 = k - m_1 \geq 1$, поскольку функция имеет не менее одного максимума. Пусть теперь $m_0 = l$, $1 \leq l \leq k$ и $m_1 = p$, $l - 1 \leq p \leq k - 1$ – произвольные значения из диапазона неравенств. Тогда $m_2 = k - l$ и $m_3 = k - p$.

Покажем, что существует разложение трехмерной сферы на ручки, количество которых соответствует этим значениям. Тем самым будет доказано существование функции Морса на трехмерной сфере с таким числом критических точек соответствующих индексов. Мы имеем l ручек индекса 0. Соединим их между собой с помощью $l - 1$ ручек индекса 1. Получим трехмерный диск. Остальные $p - l + 1$ ручек индекса 1 приклеим к нему, получив тем самым крендель рода $p - l + 1$. Заметим, что до сих пор все приклейки осуществлялись единственно возможным, с точностью до изотопии, образом. Теперь мы можем приклеить к нашему кренделю $p - l + 1$ ручек индекса 2 таким образом, чтобы получить опять трехмерный диск. Сделать это можно, например, приклеивая вдоль стандартной системы неразбивающих поверхность кренделя системы кривых. Приклеим остальные $k - l - (p - l + 1) = k - p - 1$ ручек индекса 2 не нарушая ориентируемость. Получим сферу S^3 с вырезанными из неё трехмерными дисками в количестве $k - p$ штук. Заклеим их всеми ручками индекса 3 в соответствующем количестве. Получим сферу S^3 .

Далее мы установим свойство "незаузленности" поверхностей уровня функций общего положения на S^3 . Под "кренделем" мы будем понимать любое 3-мерное многообразие, образованное прилейкой к трехмерному диску ручек индекса 1. Аналогично, крендель – это регулярная окрестность любого конечного одномерного комплекса в S^3 .

Определение 1 Конечный одномерный комплекс (граф) K в S^3 называется незаузленным если в S^3 существует вложенная двумерная сфера S^2 такая, что $K \subset S^2$.

Замкнутая ориентируемая поверхность, вложенная в S^3 , разбивает её на две компоненты. Замыкание по крайней мере одной из компонент всегда

является кренделем. Будем называть его *кренделем, ограниченным данной поверхностью*. *Остовом* кренделя будем называть букет окружностей в S^3 , регулярной окрестностью которого он является.

Определение 2 *Замкнутая ориентируемая поверхность, вложенная в S^3 , называется незаузленной если остов кренделя который она ограничивает является незаузленным.*

Предложение 2 *Всякая регулярная поверхность уровня функции общего положения на трехмерной сфере является незаузленной.*

Доказательство Построим по функции разложение трехмерной сферы на ручки. Рассмотрим объединение всех ручек индекса 0 и 1 – регулярную окрестность замыкания интегральных траекторий градиента функции f , выходящих из критических точек индекса 0 и входящих в критические точки индекса 1. Эта окрестность является кренделем. Замыкание дополнения к этому кренделю также является кренделем, поскольку его можно представить как аналогичную регулярную окрестность уже для функции $-f$. Общий край этих кренделей таким образом является поверхностью Хегора F в трехмерной сфере. По теореме Вальдхаузена, [18], любые два разбиения Хегора трехмерной сферы поверхностями одинаковых родов эквивалентны: существует диффеоморфизм трехмерной сферы, переводящий одну поверхность в другую. При этом, образ остова первой поверхности будет, очевидно, остовом для второй. Существует стандартное разбиение Хегора трехмерной сферы незаузленной поверхностью любого рода. Если бы поверхность F была заузленной, то не существовало бы диффеоморфизма трехмерной сферы, который бы перевел незаузленный остов стандартной поверхности в заузленный остов поверхности F , поскольку двумерная сфера, на которой лежит первый остов, перейдет в двумерную сферу. Таким образом поверхность F является незаузленной.

Рассмотрим теперь произвольную регулярную поверхность уровня \tilde{F} функции f , отличную от S^2 . Она является связной частью всей поверхности F : $F = X \# \tilde{F} \# Y$, следовательно остов кренделя который она ограничивает является подграфом остова кренделя который ограничивает поверхности F . Известно ([17]), что если граф незаузелен, то и всякий подграф также незаузелен. Отсюда следует незаузленность поверхности уровня \tilde{F} .

3 Теоремы о реализации и классификации

Определение 3 *Графом гладкой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ на замкнутом компактном многообразии X называется пространство, точками которого являются компоненты связности уровней функции f .*

Это пространство действительно является конечным графом. Детальнее об этих графах см. [15]. На графе G функции общего положения f существует каноническая ориентация: $a < b$, $a, b \in V(G)$, если $f(a) < f(b)$. Пусть $f: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – функция общего положения и G – её ориентированный граф. В этом случае G является деревом. Концевые вершины этого дерева соответствуют локальным минимумам и максимумам функции f . Внутренние вершины имеют валентность 2 или 3.

Вершины валентности 3 соответствуют критическим точкам индекса 1 и 2, после прохождении которых число компонент уровня функции уменьшается либо увеличивается на единицу соответственно. В первом случае происходит приклейка ручки индекса 1 своими концами к разным компонентам уровня. Во втором случае приклеивается ручка индекса 2 вдоль простой замкнутой кривой, ограничивающей диск. Учитывая ориентацию, для этих вершин возможны две ситуации – либо два ребра являются входящими а третье – исходящим (соответствующая критическая точка имеет индекс 1), либо наоборот (соответствующая критическая точка имеет индекс 2). Число вершин валентности 3, соответствующих критическим точкам индекса 1, равно $m_0 - 1$, а число вершин, соответствующих критическим точкам индекса 2, равно $m_3 - 1$.

Вершины валентности 2 также соответствуют критическими точками индекса 1 и 2, но при прохождении их число компонент не меняется. В этом случае соответствующая ручка индекса 1 приклеивается обеими концами к одной компоненте связности и ручка индекса 2 приклеивается вдоль простой замкнутой кривой, не ограничивающей диск. В этих точках одно ребро является входящим, а другое – исходящим. Число вершин валентности 2, соответствующих критическим точкам индекса 1, равно $m_1 - m_0 + 1$, а соответствующих критическим точкам индекса 2 – $m_2 - m_3 + 1$. Общее число таких вершин четно, причем $m_1 - m_0 + 1 = m_2 - m_3 + 1$.

Теорема 1 *Рассмотрим конечное дерево, имеющее помимо концевых вершин однозначно определенное число вершин валентности 3 и четное число вершин валентности 2. Упорядочим его вершины таким образом, чтобы*

число входящих и исходящих ребер в вершинах валентности 3 отличалось ровно на единицу, а в вершинах валентности 2 было одинаковым. Тогда любое такое ориентированное дерево является графом некоторой функции общего положения на S^3 .

Доказательство Сопоставим концевой вершине с входящим ребром ручку индекса 3, концевой вершине с исходящим ребром – ручку индекса 0, вершине валентности 3 с двумя входящими ребрами – ручку индекса 1, вершине валентности 3 с двумя исходящими ребрами – ручку индекса 2.

Количество вершин валентности 2 является четным. Разобьем их на две равномогущные части. При этом, каждая вершина из первой части должна быть меньше каждой вершины из второй части. Сопоставим точкам первой части ручки индекса 1, а точкам второй части – ручки индекса 2.

Тогда граф будет задавать разложение трехмерной сферы на ручки – достаточно лишь контролировать способ приклейки ручки индекса 2, отвечающей вершине валентности 3, таким образом, чтобы в результате род компонент уровня был равен числу оставшихся вершин валентности 2, отвечающих критическим точкам индекса 2, на соответствующих ветках дерева. Это разложение на ручки будет задавать некоторую функцию общего положения на S^3 .

Для функций на замкнутых компактных трехмерных многообразиях, помимо такой характеристики её топологической сложности как число критических точек, удобно ввести еще и понятие рода.

Определение 4 Будем говорить что функция общего положения на трехмерной сфере имеет род g если род любой её регулярной поверхности уровня не превосходит g .

Замечание 1 Если ориентированный граф из предыдущей теоремы не имеет вершин валентности 2, то он реализуется лишь функциями рода 0. Если же он имеет по крайней мере 2 вершины валентности 2 то его всегда можно реализовать функцией рода 1.

Следующая теорема дает топологическую классификацию функций рода 1 в терминах их ориентированных графов. Беря во внимание предыдущее замечание, топологический тип функций высших родов эти графы уже не различают.

Дадим определение.

Определение 5 Две функции общего положения $f, g: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть топологически эквивалентными, если существуют сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $h \in \text{Diff}_0(S^3)$ и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $k \in \text{Diff}_0(\mathbb{R})$ такие что $f \circ h = k \circ g$

Теорема 2 Две функции общего положения $f, g: S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ рода 1 топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их ориентированные графы изоморфны с сохранением ориентации.

Доказательство Необходимость. Пусть функции топологически эквивалентны. Тогда они задают одинаковые представления S^3 в виде композиции элементарных кобордизмов. По этому разложению однозначно, с точностью до изоморфизма с сохранением ориентации, восстанавливаются их графы.

Достаточность. Пусть графы изоморфны с сохранением ориентации. Тогда они задают одинаковые разложения S^3 в композицию элементарных кобордизмов. С помощью диффеоморфизма $k \in \text{Diff}_0(\mathbb{R})$ можно добиться того что на соответствующих границах кобордизмов обоих разложений функции принимают одинаковые значения. Поскольку поверхности уровня функции на трехмерной сфере являются незаузленными и двусторонними, границы элементарных кобордизмов одного разложения можно изотопией перевести в соответствующие границы элементарных кобордизмов другого разложения. За теоремой о продлении изотопии, существует диффеоморфизм $\tilde{h} \in \text{Diff}_0(S^3)$, реализующий эту изотопию.

Рассмотрим элементарный трехмерный кобордизм $(\partial_- W, W, \partial_+ W) \subset S^3$, род компонент границ которого не превышает 1. Пусть \tilde{f} и \tilde{g} – две функции Морса на нем, имеющие ровно по одной критической точке внутри него. Пусть также $f(\partial_- W) = g(\partial_- W) = \text{const}_1$ и $\tilde{f}(\partial_+ W) = \tilde{g}(\partial_+ W) = \text{const}_2$. Покажем, что существует диффеоморфизм s кобордизма W , изотопный дождественному и тождественный на его границах. Для этого достаточно показать что соответствующие критическим точкам характеристические диски изотопны. Таких кобордизмов существует 8 штук. Зададим их, указывая пару $(\partial_- W, \partial_+ W)$: (\emptyset, S^2) , (S^2, \emptyset) , $(S^2, S^2 \sqcup S^2)$, $(S^2 \sqcup S^2, S^2)$, (S^2, T^2) , (T^2, S^2) , $(T^2, S^2 \sqcup T^2)$, $(S^2 \sqcup T^2, T^2)$. В первом случае характеристическим диском является пустое множество \emptyset , а во втором – трехмерный диск D^3 . Любые два таких диска изотопны. В третьем случае характеристическим диском является двумерный диск D^2 , пересекающий S^2 вдоль простой замкнутой кривой. Любые два таких диска изотопны. В четвертом случае характеристический диск представляет собой одномерный диск D^1 , пересекающий каждую из компонент $S^2 \sqcup S^2$ в одной точке. Любые два

таких диска также изотопны. В пятом случае характеристическим диском является одномерный диск D^1 , пересекающий сферу S^2 в двух точках. Любые два таких диска также изотопны. В шестом случае характеристическим диском является двумерный диск D^2 , пересекающий тор T^2 вдоль простой замкнутой кривой γ . Пусть $D^2 \times S^1$ – полноторий, ограниченный этим тором и $D^2 \times S^1 \cap W = \emptyset$. Характеристический диск D^2 вложен в дополнении к этому полноторию: $D^2 \subset (S^3 - D^2 \times S^1)$. Единственно возможной, с точностью до изотопии, кривой $\gamma \subset T^2$ является его параллель, поскольку любая другая кривая в $S^3 - D^2 \times S^1$ не ограничивает диск. Следовательно, все такие характеристические диски также изотопны. В седьмом случае характеристическим диском является двумерный диск D^2 , пересекающий поверхность тора вдоль простой замкнутой кривой, гомотопной нулю. Все такие кривые на торе изотопны, поэтому изотопны и характеристические диски. И наконец, в восьмом случае характеристическим диском является одномерный диск D^1 , пересекающий каждую из компонент $S^2 \sqcup T^2$ в одной точке. Все такие диски также изотопны. Стоит отметить, что при рассмотрении этих вариантов мы неявно опять пользовались утверждением о незаузленности поверхностей уровня.

Таким образом, после применения диффеоморфизмов k и \tilde{h} мы применяем еще диффеоморфизмы типа s на каждом из элементарных кобордизмов. Композиция h этих диффеоморфизмов является изотопным тождеству диффеоморфизмом. Получаем, что функции f и g топологически эквивалентны.

Замечание 2 *Графы функций рода 0 не имеют вершин валентности 2, поэтому топологические классы таких функций находятся во взаимно-однозначном соответствии с топологическими классами функций общего положения на S^2 .*

Список литературы

1. V. I. Arnold, The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups, Russian Math. Surveys 47 (1992), 3-45
2. V. I. Arnold, Smooth functions statistics, Funct. Anal. Other Math. 1 (2006), 135-178
3. V. I. Arnold, Topological classification of Morse functions and generalization of Hilbert's 16th problem, Math. Phys. Anal. Geom. 10 (2007), 227-236
4. V. I. Arnold, Topological classification of Morse polynomials, Proc. Steklov Inst. Math. 268 (2010), 32-48
5. В. И. Арнольд, Экспериментальное наблюдение математических фактов, МЦНМО (2006), 120
6. J. Cerf, La stratification naturelle des espaces de fonctions differentiables reelles et le theoreme de la pseudo-isotopie, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, 39 (1970), 5-173
7. M. Hirsch, Differential topology, Springer-Verlag New York, (1976), 209
8. S.I.Maksimenko, Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces, Annals of Global Analysis and Geometry, 29-3 (2006), 241-285

9. J. W. Milnor, Lectures on the h-cobordism, Princeton University Press, (1965), 121
10. L. I. Nicolaescu, Morse functions statistics, *Funct. Anal. Other Math.* 1 (2006), 85-91
11. L. I. Nicolaescu, Counting Morse functions on the 2-sphere, *Compositio Math.*, 144 (2008), 1081-1106
12. A. O. Prishlyak, Equivalence of Morse function on 3-manifolds, *Meth. Func. Anal. Top.*, 5(3) (1999), 49-53
13. A. O. Prishlyak, Conjugacy of Morse functions on 4-manifolds, *Russian Math. Surveys*, 56(1) (2001), 173-174
14. V. V. Sharko, Smooth and topological equivalence of functions on surfaces, *Ukrainian Math. J.*, 55 (2003), 832-846
15. V. V. Sharko, About a Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold, *Meth. Funct. Anal. Top.*, 12 (2006), 389-396
16. V. V. Sharko, Functions on manifolds: algebraic and topological aspects, *Amer. Math. Soc.*, (1993), 206
17. M. Scharlemann, A. Thompson, Detecting unknotted graphs in 3-space, *J. Diff. Geom.*, 34 (1991), 539-560
18. F. Waldhausen, Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphere, *Topology* 7, (1968), 195-203

A. В. Сергеюк

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев, Украина.

E-mail: serheyuk@gmail.com

Andriy V. Serheyuk

Topological classification of genus 1 Morse functions on S^3

We study the question about a topological classification of Morse functions on the 3-sphere, all critical points of which lie on a different level surfaces. The classification provides with respect to the group $\text{Diff}_0(S^3) \times \text{Diff}_0(\mathbb{R})$ – the group of orientation-preserving diffeomorphisms of the source and the target. We give a description of a corresponding oriented graphs (Kronrod-Reeb graphs). It is shown that these graphs completely classify genus 1 functions. These functions has a property that the genus of all the components of their level surfaces is not greater than 1. Moreover, all these graphs can be realized by a genus 1 functions, thus they can not distinguish a topological type of a more complex functions.

Властивості псевдогармонічної функції на замкненій області

І.А. Юрчук

Анотація Нехай $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – псевдогармонічна функція, яка задана на k -зв'язній орієнтованій замкненій області $D \subset \mathbb{C}$, обмеженій жордановими кривими $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k, 0 \leq k < \infty$. Нагадаємо, що клас псевдогармонічних функцій співпадає з класом неперервних функцій таких, що у внутрішності області міститься скінченне число критичних точок, кожна з яких є сідловою, а звуження функції на її межу має скінченне число локальних екстремумів.

В даній статті доведено, що замикання кожної зв'язної компоненти сім'ї, яка є різницею області D та тих зв'язних компонент ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f , які містять критичні та межові критичні точки, є замкненою областю одного з трьох типів (кільце, смужка чи сектор). Перший тип характеризується тим, що межа області складається з двох зв'язних компонент, які не мають спільних точок з межовими кривими $\gamma_i, i = \overline{0, k}$, а всі лінії рівня у її внутрішності гомеоморфні колам. Другий та третій типи областей мають одну зв'язну компоненту межі, а всі лінії рівня у їх внутрішності гомеоморфні відріzkам. Різниця між ними полягає у кількості дуг, що належать межовим кривим $\gamma_i, i = \overline{0, k}$. У випадку області типу смужка, її межа містить дві дуги, що належать або одній і тій же межовій кривій, або різним. Якщо ж область типу сектор, то така дуга одна. Автором також доведено ряд тверджень, які використовуються при доведенні основної теореми.

Ключові слова псевдогармонічна функція, k -зв'язна область

УДК 515.173.2

1 Вступ

Дослідженню псевдогармонічних функцій присвячені роботи В.Каплана [1], М.Морса [5], Ю. Токи [3], Є.Полуляха [2, 6] та ін., де доведені основні топологічні характеристики даного класу функцій на диску, площині та поверхні. Зокрема, у монографії [2] досліджено властивості псевдогармонічних функцій на замкненому двовимірному диску та доведено критерій топологічної еквівалентності даного класу функцій. У роботі [6], автором вивчаються псевдогармонічні функції на площині та доведено достатню умову реалізації дерева як їх множини рівня.

В даній роботі розглядаються псевдогармонічні функції, що задані на k -зв'язній орієнтованій замкненій області D , $D \subset \mathbb{C}$. Автором доведено Теорему 2 про структуру зв'язних компонент сім'ї, яка є замиканням різниці області D та тих зв'язних компонент множин рівня критичних та напіврегулярних значень функції f , які містять критичні та межові критичні точки.

Автор висловлює подяку старшому науковому співробітнику відділу топології Інституту математики НАНУ Полуляху Євгену за корисні обговорення та цікавість до даної тематики.

2 Попередні відомості

Позначимо через D , $D \subset \mathbb{C}$, k -зв'язну орієнтовану замкнену область, яка обмежена жордановими кривими $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$, $0 \leq k < \infty$.

Нехай $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка псевдогармонічна функція. Нагадаємо основні означення, що пов'язані з даним класом функцій [5, 2, 4].

Означення 1 Функція $f(x, y)$ гармонічна в точці (x_0, y_0) , якщо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Означення 2 Функція $f(z)$ псевдогармонічна в точці $z_0 = (x_0, y_0)$, якщо існує околість $U(z_0)$ та гомеоморфізм φ околу $U(z_0)$ в себе такий, що $\varphi(z_0) = z_0$ та $f(\varphi(z))$, $z = (x, y)$, – гармонічна і $f(\varphi(z)) \neq \text{const}$.

Функція f псевдогармонічна в замкненій області, якщо вона псевдогармонічна в кожній її точці.

Означення 3 Точка $z_0 \in D$ є регулярною точкою f , якщо існує відкритий її отвір $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \rightarrow D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = Rez + f(z_0)$ для всіх $z \in U$.

Означення 4 Точка $z_0 \in \partial D$ є регулярною межовою точкою f , якщо існує її отвір U в D та гомеоморфізм $h : U \rightarrow D_+$ цього околу в верхній напівдиск D_+ такий, що $h(z_0) = 0$, $h(U \cap f^{-1}(f(z_0))) = \{0\} \times [0, 1)$, $h(U \cap \partial D^2) = (-1, 1) \times \{0\}$ і функція $f \circ h^{-1}$ є строго монотонна на інтервалі $(-1, 1) \times \{0\}$.

Якщо точка $z_0 \in D$ не є регулярною точкою f , то вона називається критичною.

За означенням всі критичні точки f є сідловими, тобто для кожної з них існує отвір $U \subseteq D$ і гомеоморфізм $\varphi : U \rightarrow D$ такий, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = Rez^n + f(z_0)$ для всіх $z \in U$. Число n назвемо кратністю сідлової точки z_0 .

Означення 5 Точки межі ∂D , що не є ні межовими регулярними, ні ізольованими точками їх ліній рівня називаються критичними межовими точками.

Означення 6 Число c є критичним значенням f , якщо $f^{-1}(c)$ містить принаймні одну критичну точку.

Означення 7 Число c є регулярним значенням f , якщо $f^{-1}(c)$ не містить критичних точок і гомеоморфне незв'язному об'єднанню інтервалів, які перетинаються з межею ∂D лише в своїх кінцях.

Означення 8 Число c є напірегулярним значенням f , якщо воно не є ні регулярним, ні критичним.

Лінії рівня напірегулярного значення містять лише межові критичні точки та локальні екстремуми $f|_{\partial D}$.

3 Властивості псевдогармонічних функцій

Нехай z_0 – деяка точка замкненої області D , а f – псевдогармонічна функція, що задана на ній. Позначимо через $\Theta(z_0)$ ту зв'язну компоненту ліній рівня $D \cap f^{-1}(f(z_0))$, яка містить точку z_0 . Зауважимо, що деколи в тексті ми будемо спрощувати запис до виразу Θ .

Якщо $z_0 \in \partial D$ є ізольованою критичною точкою $f|_{\partial D}$, то $\Theta(z_0) = \{z_0\}$. В усіх інших випадках, $\Theta(z_0)$ є компактною лінійно-зв'язною множиною.

Означення 9 Дугою α деякої замкненої жорданової кривої γ називається образ неперервного відображення $s(t) : [0; 1] \rightarrow \gamma_i$ такий, що $s(0) \neq s(1)$ або $s(0) = s(1)$.

Межею дуги $\partial\alpha$ будуть точки $s(0)$ та $s(1)$. Скажемо, що дуги α та β різні, якщо $\text{Int}\alpha \cap \text{Int}\beta = \emptyset$.

Якщо z_0 – регулярна точка функції f , так само як і довільна точка z , $z \neq z_0$ така, що $z \in \Theta(z_0)$, то $\Theta(z_0)$ гомеоморфна колу або відрізьку. У першому випадку $\Theta(z_0) \cap \partial D = \emptyset$ і скажемо, що $\Theta(z_0)$ є множиною *I типу*, а в другому $\Theta(z_0) \cap \partial D = \{z_1, z_2\}$, де z_1 та z_2 – різні точки ∂D . Якщо z_1 та z_2 належать одній дузі α деякої межової кривої $\gamma_i \subset \partial D$, то $\Theta(z_0)$ назвемо множиною *II типу*. У випадку, коли z_1 та z_2 належать різним дугам, то $\Theta(z_0)$ – множина *III типу*. Зауважимо, що тут можливо два випадки: дуги належать одній і тій самій межовій кривій або різним.

Позначимо через $\mathfrak{L}(f)$ множину тих зв'язних компонент ліній рівня критичних та напірегулярних значень функції f , що містять критичні або межові критичні точки. Розглянемо зв'язні компоненти D_i сім'ї $\overline{D \setminus \mathfrak{L}(f)}$. Зрозуміло, що їх скінченна кількість, кожна з яких є відкритою областю. Позначимо через Λ сім'ю, що складається із $\overline{D_i}$.

Нехай D' – замкнена область з Λ . Згідно побудови D' , довільна точка $z \in \text{Int}D'$ є регулярною точкою функції f .

Теорема 1 Нехай $z_0 \in \text{Int}D'$, $D' \in \Lambda$. Тоді, для довільної $z \in U(z_0)$, $z_0 \neq z$, множини $\Theta(z)$ та $\Theta(z_0)$ мають той самий тип, де $U(z_0)$ – канонічний окіл точки z_0 .

Доведення Якщо $z \in \Theta(z_0)$, то теорема справедлива.

Нехай $z \notin \Theta(z_0)$. Зрозуміло, що $\Theta(z_0) \cap \Theta(z) = \emptyset$, бо в протилежному випадку існує точка $z \in \Theta(z_0) \cap \Theta(z)$, яка є критичною точкою функції f , а це суперечить побудові D' .

Не обмежуючи загальності, припустимо, що $f(z) > f(z_0)$.

Доведемо методом від супротивного, що $\Theta(z_0)$ та $\Theta(z)$ мають той самий тип. Припустимо, що в канонічному околі точки z_0 знайдеться точка z така, що $\Theta(z_0)$ та $\Theta(z)$ мають різний тип. Розглянемо можливі випадки:

Випадок 1: $\Theta(z_0)$ має тип *I*, а $\Theta(z)$ – тип *II*. Нехай z_1 та z_2 – точки, що належать деякій дузі $\alpha \subset \gamma_i$ і $\{z_1, z_2\} = \partial\Theta(z)$. Оскільки $f|_{D'}$ є неперервною, до для довільного значення c такого, що $f(z_0) < c < f(z)$ існує компонента Θ' така, що $\Theta' \cap U(z_0) \neq \emptyset$ і $f_{\Theta'} = c$. Згідно припущення Θ' є множиною *I* або *II* типу.

Якщо всі Θ' є множинами I типу, то z_1 та z_2 належать межі дуги α . Звідки, $z_1, z_2 \in \partial D$ і $z_1, z_2 \in \mathfrak{L}(f)$. Тоді, значення c є критичним чи напіврегулярним значенням функції f . Отримали суперечність.

Якщо серед всіх Θ' є множини II типу, то знайдеться множина Θ'' така, що $\partial\Theta'' \subseteq \partial\alpha$. Звідки впливає існування критичного чи напіврегулярного значення c' , $c' < c$, такого, що $f_{\Theta''} = c'$. Знову отримали суперечність з побудовою області D' .

Випадок 2: $\Theta(z_0)$ має тип I, а $\Theta(z)$ – тип III. Доводимо аналогічно до попереднього випадку.

Випадок 3: $\Theta(z_0)$ має тип II, а $\Theta(z)$ – тип III. Нехай межовими точками $\Theta(z_0)$ є точки z_1^0 та z_2^0 , що належать дузі α_1 , а межовими точками $\Theta(z)$ є точки z_1 та z_2 такі, що $z_1 \in \alpha_2$ та $z_2 \in \alpha_3$. Тоді, існує значення c , $f(z_0) < c < f(z)$ і компонента Θ' такі, що $f_{\Theta'} = c$ і $\partial\Theta' \in \partial\alpha_1$. Звідки впливає, що c – критичне чи напіврегулярне значення, а це суперечить побудові області D' .

Наслідок 1 Для довільних точок $z_1, z_2 \in \text{Int}D'$, $D' \in \Lambda$, множини $\Theta(z_1)$ та $\Theta(z_2)$ мають той самий тип.

Лема 1 Для довільних точок $z_1, z_2 \in \text{Int}D'$, $D' \in \Lambda$, таких, що $z_1 \notin \Theta(z_2)$ і $z_2 \notin \Theta(z_1)$ справедливо $f|_{\Theta(z_1)} \neq f|_{\Theta(z_2)}$.

Доведення Доведемо методом від супротивного, що $f|_{\Theta(z_1)} \neq f|_{\Theta(z_2)}$. Припустимо, що існують точки $z_1, z_2 \in \text{Int}D'$, $D' \in \Lambda$, такі, що $z_1 \notin \Theta(z_2)$, $z_2 \notin \Theta(z_1)$ і $f|_{\Theta(z_1)} = f|_{\Theta(z_2)}$. Якими б не були $\Theta(z_2)$ і $\Theta(z_1)$, кожна з них розбиває область D' на дві зв'язні компоненти (у випадку типів II та III, кожна з компонент є розрізом області, а для випадку, коли компонента має тип I, справедлива теорема Жордана). Позначемо через A та B зв'язні компоненти множини $D' \setminus \Theta(z_1)$. Згідно Лемми 4 (див. [3, ст.103]) для довільної точки $z \in A$ справедливо $f(z) < f(z_1)$ або $f(z) > f(z_1)$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $f(z) < f(z_1)$. Тоді, згідно Теорема 1.(vii) (див. [3, ст.106]), для $z \in B$ справедливо $f(z) > f(z_1)$. З іншого боку, в одній з областей A або B лежить компонента $\Theta(z_2)$, тобто $z_2 \in A$ або $z_2 \in B$, а згідно припущення $f(z_1) = f(z_2)$. Отримали суперечність.

Розглянемо задачу про структуру межі замкненої області D' із сім'ї Λ . Згідно побудови області D' , кожна зв'язна компонента її межі складається з двох видів дуг: дуги, що є частинами межових кривих γ_i області D , та дуги, що є частинами ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f . Перші позначимо через α_i , а другі через β_i . Оскільки, область D є орієнтованою, то і на D' існує орієнтація, яка породжує циклічний порядок

дуг на кожній зв'язній компоненті межі області D' . В даних позначеннях кожну зв'язну компоненту межі довільної області D' можна представити як скінченну послідовність, на якій заданий циклічний порядок. Покажемо, що в такій послідовності дуги α_i і β_i чергуються, тобто

$$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_k). \quad (1)$$

Якщо припустити, що α_{i+1} (β_{i+1}) слідує за α_i (β_i), то існує спільна точка $z = \alpha_{i+1} \cap \alpha_i$ ($z = \beta_{i+1} \cap \beta_i$), де $z \in \partial\alpha_i$ і $z \in \partial\alpha_{i+1}$ ($z \in \partial\beta_i$ і $z \in \partial\beta_{i+1}$), яка одночасно належить двом різним межовим кривим (лініям рівня різних критичних значень), що не можливо, бо межові криві жорданові (лінії рівня різних критичних значень не є зв'язними) або одній межовій кривій (одній лінії рівня) і дана точка не має ніякого змістовного навантаження, бо легко можна ввести нове позначення $\alpha_i = \alpha_i \cup \alpha_{i+1}$ ($\beta_i = \beta_i \cup \beta_{i+1}$).

Для кожного з трьох типів компонент $\Theta(z)$ у внутрішніх точках області D' запишемо вигляд межі в термінах послідовності $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \dots)$.

Нехай всі компоненти $\Theta(z)$ внутрішніх точок області D' мають тип I. Тоді, межею області є скінченна кількість частин деяких зв'язних компонент ліній рівнів $D \cap f^{-1}(c_1), \dots, D \cap f^{-1}(c_n)$, де c_i – критичні чи напіврегулярні значення функції f при $i = \overline{1, n}$. Тому, $f|_{\partial D'} = const$. Відомо [5, ст.55], що для псевдогармонічних функцій, які не мають полюсів та сталі на всіх межових кривих, має місце рівність $2 = \nu - S$, де ν – кількість межових кривих, а S – кількість критичних точок у внутрішності області, кожна з яких порахована з її кратністю. Оскільки, всі точки області D' регулярні, то $S = 0$. Звідки випливає, що $2 = \nu$, а отже і $n = 2$.

Таку замкнену область будемо називати областю R -типу (*типу кільце*) і її межа складається з двох зв'язних компонент, а саме $\partial D' = (\beta_1) \cup (\beta_2)$.

Скажемо, що дуги α_i та α_{i+1} є сусідніми, якщо у послідовності (1) між ними міститься лише одна дуга.

Лема 2 *Нехай α_i та α_{i+1} – сусідні дуги межі області D' . Тоді існують точки z_1, z_2 такі, що $z_1 \in \partial\alpha_i$, $z_2 \in \partial\alpha_{i+1}$ і $f(z_1) = f(z_2) = C$, де C – критичне або напіврегулярне значення функції f , та точки z', z'' , де $z' \in U(z_1) \cap \alpha_i$, $z'' \in U(z_2) \cap \alpha_{i+1}$, які є межею деякої компоненти Θ такої, що $f|_{\Theta} > C$ ($f|_{\Theta} < C$).*

Доведення Оскільки α_i та α_{i+1} – сусідні дуги, то існує дуга β_i , яка є частиною зв'язної компоненти лінії рівня деякого критичного чи напіврегулярного значення C . Позначимо через $z_1 = \alpha_i \cap \beta_i$ і $z_2 = \alpha_{i+1} \cap \beta_i$. Оскільки, точки z_1 та z_2 належать β_i , то $f(z_1) = f(z_2) = C$.

Оскільки на ∂D довільна точка є регулярною точкою або локальним екстремумом неперервної функції $f|_{\partial D}$, то розглянемо наступні випадки:

Випадок 1: z_1 та z_2 – регулярні точки. Для довільного ε існують околи $U(z_1) \subset \partial D$ і $W(z_2) \subset \partial D$ точок z_1 та z_2 , відповідно, та регулярні точки $z_1^1 \in U(z_1)$, $z_1^2 \in U(z_1)$, $z_2^1 \in W(z_2)$ і $z_2^2 \in W(z_2)$ такі, що $C < f(z_1^1) = C_1 < C + \varepsilon$, $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$, $C < f(z_2^1) = C_1 < C + \varepsilon$ і $C > f(z_2^2) = C_2 > C - \varepsilon$. Оскільки z_j^i , $i, j = \overline{1, 2}$, – регулярні точки функції $f|_{\partial D}$, то згідно означення 4 існують компоненти $\Theta_1, \Theta_2, \Theta'_1$ та Θ'_2 такі, що $z_1^1 \in \partial\Theta_1$, $z_1^2 \in \partial\Theta_2$, $z_2^1 \in \partial\Theta'_1$ і $z_2^2 \in \partial\Theta'_2$. Зрозуміло, що Θ_1 та Θ_2 (Θ'_1 та Θ'_2) належать різним зв'язним компонентам множини $D \setminus \beta_i$, оскільки β_i – розріз області D між точками z_1 та z_2 , які належать межі. Звідки, $\Theta_1 \subset D'$ ($\Theta'_1 \subset D'$) або $\Theta_2 \subset D'$ ($\Theta'_2 \subset D'$). Не обмежуючи загальності припустимо, що $\Theta_1 \subset D'$. Якщо $\Theta'_1 \subset D'$, то з Лемми 1 випливає, що $\Theta_1 = \Theta'_1$. Далі, позначимо точки z_1^1 та z_2^1 через z' та z'' , відповідно, а Θ_1 через Θ , та отримаємо $f|_{\Theta} > C$. Якщо ж $\Theta'_2 \subset D'$, то в області D' існують точки значення функції в яких як менші так і більші ніж C , а це суперечить Лемі 4 (див. [3, ст.103]).

Випадок 2: z_1 – регулярна точка, а z_2 – локальний екстремум. Не обмежуючи загальності, припустимо, що z_2 – локальний максимум. Тоді, для довільного ε існують околи $U(z_1) \subset \partial D$ і $W(z_2) \subset \partial D$ точок z_1 та z_2 , відповідно, та регулярні точки $z_1^1 \in U(z_1)$, $z_1^2 \in U(z_1)$, $z_2^1 \in W(z_2)$ і $z_2^2 \in W(z_2)$ такі, що $C < f(z_1^1) = C_1 < C + \varepsilon$, $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$, $C > f(z_2^1) = C_2 > C - \varepsilon$ і $C > f(z_2^2) = C_2 > C - \varepsilon$. Тоді, існують $\Theta_1, \Theta_2, \Theta'_1$ та Θ'_2 такі, що $z_1^1 \in \partial\Theta_1$, $z_1^2 \in \partial\Theta_2$, $z_2^1 \in \partial\Theta'_1$ і $z_2^2 \in \partial\Theta'_2$. Зрозуміло, що Θ_1 та Θ_2 (Θ'_1 та Θ'_2) належать різним зв'язним компонентам множини $D \setminus \beta_i$, оскільки β_i – розріз області D між точками z_1 та z_2 , які належать межі. Звідки, $\Theta_1 \subset D'$ ($\Theta'_1 \subset D'$) або $\Theta_2 \subset D'$ ($\Theta'_2 \subset D'$). Якщо припустити, що $\Theta_1 \subset D'$, то $\Theta'_1 D'$ і $\Theta'_2 D'$, бо в протилежному випадку отримаємо суперечність з Лемою 4 (див. [3, ст.103]). Звідси випливає, що $\Theta_2 \subset D'$. Отже, $\Theta_2 = \Theta'_1$ або $\Theta_2 = \Theta'_2$.

Випадок 3: z_1 та z_2 – локальні екстремуми. Якщо z_1 та z_2 – локальні максимуми (мінімуми), то для довільного ε існують околи $U(z_1) \subset \partial D$ і $W(z_2) \subset \partial D$ точок z_1 та z_2 , відповідно, та регулярні точки $z_1^1 \in U(z_1)$, $z_1^2 \in U(z_1)$, $z_2^1 \in W(z_2)$ і $z_2^2 \in W(z_2)$ такі, що $C > f(z_1^1) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_1^1) = C_1 < C + \varepsilon$), $C > f(z_1^2) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_1^2) = C_1 < C + \varepsilon$), $C > f(z_2^1) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_2^1) = C_1 < C + \varepsilon$) і $C > f(z_2^2) = C_2 > C - \varepsilon$ ($C < f(z_2^2) = C_1 < C + \varepsilon$). Тоді, по аналогії, існують $\Theta_1, \Theta_2, \Theta'_1$ та Θ'_2 такі, що $z_1^1 \in \partial\Theta_1$, $z_1^2 \in \partial\Theta_2$, $z_2^1 \in \partial\Theta'_1$ і $z_2^2 \in \partial\Theta'_2$. Якщо $\Theta_i \subset D'$ і $\Theta'_j \subset D'$, де

$i, j = \overline{1, 2}$, то згідно Лема 1 $\Theta_i = \Theta'_j$. Звідки випливає існування Θ такої, що $f|_{\Theta} < C$ ($f|_{\Theta} > C$).

Зауважимо, що випадок, коли z_1 – локальний мінімум, а z_2 – локальний максимум не можливий, оскільки це суперечить Лемі 4 (див. [3, ст.103]).

Наслідок 2 Якщо α_{i-1} , α_i та α_{i+1} – сусідні дуги межі області D' , а C_{i-1} та C_i – критичні чи напірегулярні значення функції f в точках межі дуги α_i такі, що $C_{i-1} < C_i$ ($C_{i-1} > C_i$), то $C_{i-1} < C_{i-2}$ ($C_{i-1} > C_{i-2}$) і $C_i > C_{i+1}$ ($C_i < C_{i+1}$), де C_{i-2} та C_{i-1} – критичні чи напірегулярні значення функції f в точках межі дуги α_{i-1} , а C_i та C_{i+1} – дуги α_{i+1} .

Нехай всі компоненти $\Theta(z)$ внутрішніх точок області D' мають тип II. Доведемо, що межа такої області містить дугу лише однієї з межових кривих, що обмежують D . Припустимо, що таких дуг скінченна кількість $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Розглянемо сусідні дуги α_i та α_{i+1} . Згідно Лема 2 існує компонента Θ' така, що $\partial\Theta' \in \alpha_i$ та $\partial\Theta' \in \alpha_{i+1}$. Звідки випливає, що Θ' має тип III, а це суперечить Наслідку 1 Теореми 1. Оскільки не існує жодної пари сусідніх дуг, то така дуга єдина. Тому, $\partial D' = (\alpha_1, \beta_1)$ і таку замкнену область $D' \in \Lambda$ будемо називати областю *Se-типу* (*типу сектор*).

Нехай всі компоненти $\Theta(z)$ внутрішніх точок області D' мають тип III. Доведемо, що межа такої області містить не більше двох дуг, що належать одній або двом різним межовим кривим.

Припустимо, що таких дуг скінченна кількість $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, та розглянемо три дуги α_{i-1} , α_i та α_{i+1} . Припустимо, в межових точках дуги α_i значення c_{i-1} та c_i функції f такі, що $c_{i-1} < c_i$. Згідно Наслідку 1 Лема 2 для решти критичних значень виконуються наступні нерівності: $c_{i-1} < c_{i-2}$ і $c_i > c_{i+1}$. Нехай Θ_s , $s = \overline{1, k}$, компоненти такі, що $\partial\Theta_s \in \alpha_{i-1}$, $\partial\Theta_s \in \alpha_i$, $s = \overline{1, k}$, і для довільного $z \in \Theta_k$ виконується $f(z) = A$. Зрозуміло, що $A \in [c_{i-1}; c_{i-2}]$ і $A \in [c_{i-1}; c_i]$. Тоді, при довільних значеннях X таких, що $A < X < c_i$ існує компонента Θ' така, що $\partial\Theta' \in \alpha_i$, $\partial\Theta' \notin \alpha_{i-1}$ і для всіх $z \in \Theta'$ справедливо $f(z) = X$. Зрозуміло, що A не дорівнює жодному з критичних значень на кінцях дуг. Отже $A < c_{i-2}$. Розглянемо значення $B = \frac{A + \min\{c_i, c_{i-2}\}}{2}$. Оскільки, $A < B < c_{i-2}$, то знайдеться компонента Θ така, що для точки $z \in \Theta$ справедливо $f(z) = B$, $\partial\Theta \in \alpha_{i-1}$ та $\partial\Theta \in \alpha_l$, де $l \neq i$. З іншого боку, оскільки $A < B < c_i$ існує компонента Θ'' така, що $\partial\Theta'' \in \alpha_i$, $\partial\Theta'' \notin \alpha_m$, де $m \neq i - 1$, і для всіх $z \in \Theta''$ справедливо $f(z) = B$. Звідси випливає, що в області D' існує дві різні компоненти, значення функції в точках яких співпадають, а це суперечить Наслідку 2 Теореми 1.

Зі сказаного вище слідує, що $\partial D' = (\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2)$. Таку замкнену область $D' \in \Lambda$ будемо називати областю *St*-типу (*miny смужка*).

Ми показали справедливість наступної теореми.

Теорема 2 *Якщо $D' \in \Lambda$, то D' є областю або *Se*-, або *St*-, або *R-miny*.*

4 Висновки

В даній роботі досліджено властивості псевдогармонічної функції f , що задана на k -зв'язній орієнтованій замкненій області D . Доведено, що замикання кожної зв'язної компоненти із сім'ї $\overline{D \setminus \mathfrak{L}(f)}$, де $\mathfrak{L}(f)$ – множина тих зв'язних компонент ліній рівня критичних та напіврегулярних значень функції f , що містять критичні або межові критичні точки, є областю або типу сегмент, або типу смужка, або типу кільце. Перший тип характеризується тим, що межа області складається з двох зв'язних компонент, які не мають спільних точок з межовими кривими γ_i , $i = \overline{0, k}$, а всі лінії рівня у її внутрішності гомеоморфні колам. Другий та третій типи областей мають одну зв'язну компоненту межі, а всі лінії рівня у їх внутрішності гомеоморфні відрізкам. Різниця між ними полягає у кількості дуг, що належать межовим кривим γ_i , $i = \overline{0, k}$. У випадку області типу смужка, її межа містить дві дуги, що належать або одній і тій же межовій кривій, або різним. Якщо ж область типу сектор, то така дуга одна.

Література

1. W. Kaplan, Topology of level curves of harmonic functions // Transactions of Amer.Math.Society., **63** (1948), 514-522.
2. E. Polulyakh, I. Yurchuk, On the pseudo-harmonic functions defined on a disk. Pracy Inst.Math.Ukr., Volume 80. - Kyiv: Inst.Math.Ukr., 2009. - 151 pp.
3. Y. Tôki, A topological characterization of pseudo-harmonic functions // Osaka Math. Journ., **3** (1951), No.1, 101-122.
4. В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, О.О. Пришляк, Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти. Праці Інст.Мат.НАНУ. Математика та її застосування., Т.97. - К.:Інст.матем.НАНУ, 2013. - 500 с.
5. М. Морс, Топологические методы теории функций комплексного переменного/ под ред. Маркушевич А.И. - М, 1951.
6. Є.Полулях, Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині // УМЖ, **65**, № 7, (2013), 974-995.

І.А. Юрчук

Національний авіаційний університет, Київ, Україна.

E-mail: iyurch@ukr.net

Iryna Iurchuk

Properties of a pseudo-harmonic function on closed domain

Let $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ be a pseudo-harmonic function defined on k -connected oriented closed domain $D \subset \mathbb{C}$ whose boundary consists of closed Jordan curves $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k, 0 \leq k < \infty$. We remind that this class of functions coincides with continuous functions which have a finitely many critical points at the interior of D each of them is saddle point and finitely many local extrema on its boundary.

In this work, it is proved that closure of any component of family which is a difference between D and such connected components of level curves of critical or semiregular values of f which contain critical and boundary critical points is a closed domain having one of three types (a ring, a strip or a sector). For the first, its boundary consists of two connected components that have no common points with ∂D and level curve at any inner point is homeomorphic to circle. As well as the second and third, their boundaries have one connected component and their level curves at any inner point are homeomorphic to a closed segment. There is difference between a number of arcs of boundary curves. If a domain is a strip, then its boundary contains two arcs that belong either one or two different boundary curves γ_i . If a domain is a sector, then its boundary contains one arc of some boundary curves. By author some statements used for main theorem proof are proved.

Keywords. Pseudo-harmonic function, k -connected domain.

Geometry of a Relativistic Quantum Chaos: New approach to dynamics of quantum systems in electromagnetic field and uniformity and charm of a chaos

A.V. Glushkov, V.B. Ternovsky, V.V. Buyadzhi, G.P. Prepelitsa

Abstract Work is devoted to the development of the theoretical foundations of the universal new relativistic chaos-geometric and quantum-dynamic approach that consistently includes a number of new relativistic quantum models and a number of new or improved methods of analysis (correlation integral, fractal analysis, algorithms, average mutual information, false nearest neighbors, Lyapunov exponents, surrogate data, non-linear prediction, spectral methods, etc.) to solve problems of complete modelling relativistic chaotic dynamics in an electromagnetic field. For a number of atomic systems there are firstly discovered availability of a relativistic quantum chaos and obtained the corresponding quantitative data on the chaos characteristics.

Keywords relativistic quantum chaos, quantum systems in field, chaos-geometric and quantum-dynamics approach

Mathematics Subject Classification (2000)55R01-55B13

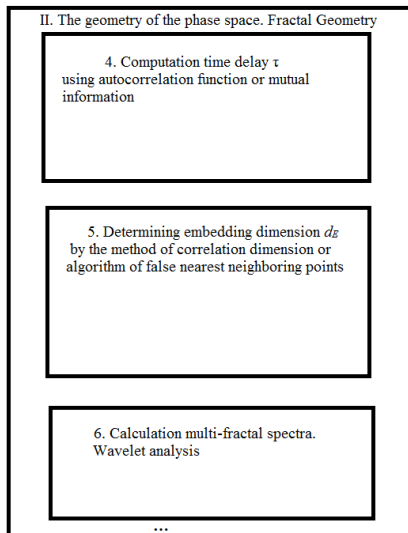
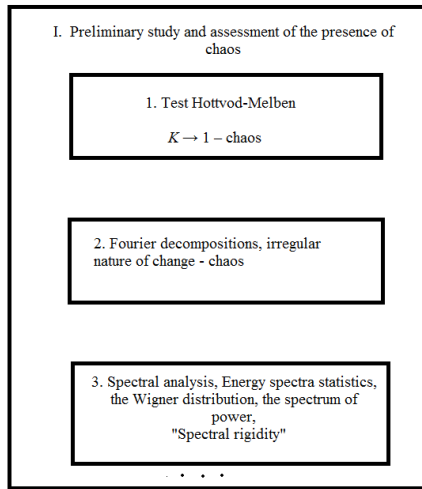
Introduction

At present time one of the extremely important and too complex areas of elements, systems theory is study of regular and chaotic dynamics of nonlinear processes in the different classes of quantum, quantum-generating systems (atomic systems in an external electromagnetic field) [1-14].

It is worth to remind that dynamics of the cited systems in external electromagnetic field has features of the random, stochastic kind and its realization does not require the specific conditions. The importance of mathematical studying a phenomenon of stochasticity or quantum chaos in dynamical systems is provided by a whole number of technical applications, including a necessity of understanding chaotic features in a work of different electronic devices and systems. New field of investigations of the quantum and other systems has been provided by a great progress in a development of a chaos theory methods. In previous our papers [2-4] we have given a review of new methods and algorithms to analysis of different dynamical systems. In this paper we present the theoretical foundations of the new universal relativistic chaos-geometric and quantum-dynamic approach to modelling chaotic dynamics of heavy complex relativistic quantum systems in an external electromagnetic field, opening a new field of relativistic quantum chaos in geometry of a chaos. Chaos-geometric block includes a set of new or partially improved non-linear analysis methods (such as correlation (dimension D) integral, fractal analysis, average mutual information, false nearest neighbours, Lyapunov exponents (LE) and Kolmogorov entropy (KE) , power spectrum analysis, the surrogate data, nonlinear prediction, predicted trajectories, neural network methods etc), quantum-dynamical block – new relativistic approach to systems in a field. For a number of heavy systems there are firstly theoretically discovered availability of a relativistic quantum chaos and obtained the corresponding quantitative data on the chaos characteristics.

2. Chaos-geometric approach to treating a chaos dynamics

As our approach has been presented earlier [1-3], here we are limited only by the key moments. Let us formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is the start time, Δt is the time step, and is n the number of the measurements. Further it is necessary to reconstruct phase space using as well as possible information contained in the $s(n)$. Such a reconstruction results in a certain set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing the scalar measurements. Packard et al. [9] introduced the method of using time-delay coordinates to reconstruct the phase space of an observed dynamical system. The direct use of the lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be determined, results in a coordinate system in which the structure of orbits in phase space can be captured.



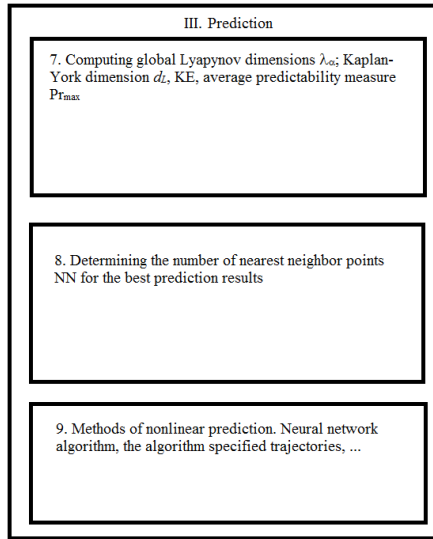


Figure 1. Chaos and neural network-geometric approach to nonlinear analysis and forecast chaotic dynamics processes in complex systems (devices). Then using a collection of time lags to create a vector in d dimensions,

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)], \quad (1)$$

the required coordinates are provided. In a nonlinear system, the $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables that comprise the source of the measurements. The dimension d is called the embedding dimension, d_E .

According to Mane and Takens [12], any time lag will be acceptable is not terribly useful for extracting physics from data. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. Similarly, if τ is too large, then $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. Also, if τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated respectively [3]. It is therefore necessary to choose some intermediate (and more appropriate) position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function

$$C_L(\delta) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [s(m + \delta) - \bar{s}][s(m) - \bar{s}]}{\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [s(m) - \bar{s}]^2}, \quad (2)$$

where $\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N s(m)$ and to look for that time lag where $C_L \delta$ first passes through zero. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and

$s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. However, a linear independence of two variables does not mean that these variables are nonlinearly independent since a nonlinear relationship can differ from linear one. It is therefore preferably to utilize approach with a nonlinear concept of independence, e.g. the average mutual information. Briefly, the concept of mutual information can be described as follows. Let there are two systems, A and B , with measurements a_i and b_k . The amount one learns in bits about a measurement of a_i from measurement of b_k is given by arguments of information theory [3,7]

$$I_{AB}(a_i, b_k) = \log_2 \left(\frac{P_{AB}(a_i, b_k)}{P_A(a_i)P_B(b_k)} \right), \quad (3)$$

where the probability of observing a out of the set of all A is $P_A(a_i)$, and the probability of finding b in a measurement B is $P_B(b_k)$, and the joint probability of the measurement of a and b is $P_{AB}(a_i, b_k)$. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to zero if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$,

$$I_{AB}(\tau) = \sum_{a_i, b_k} P_{AB}(a_i, b_k) I_{AB}(a_i, b_k) \quad (4)$$

To place this definition to a context of observations from a certain physical system, let us think of the sets of measurements $s(n)$ as the A and of the measurements a time lag τ later, $s(n + \tau)$, as B set. The average mutual information between observations at n and $n + \tau$ is then

$$I_{AB}(\tau) = \sum_{a_i, b_k} P_{AB}(a_i, b_k) I_{AB}(a_i, b_k) \quad (5)$$

Now we have to decide what property of $I(\tau)$ we should select, in order to establish which among the various values of τ we should use in making the data vectors $\mathbf{y}(n)$. One could remind that the autocorrelation function and average mutual information can be considered as analogues of the linear redundancy and general redundancy, respectively, which was applied in the test for nonlinearity. The general redundancies detect all dependences in the time series, while the linear redundancies are sensitive only to linear structures. Further, a possible nonlinear nature of process resulting in the vibrations amplitude level variations can be concluded.

The goal of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. In accordance with the embedding theorem, the embedding

dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. However, two problems arise with working in dimensions larger than really required by the data and time-delay embedding [1,7,13,19]. First, many of computations for extracting interesting properties from the data require searches and other operations in R^d whose computational cost rises exponentially with d . Second, but more significant from the physical point of view, in the presence of noise or other high dimensional contamination of the observations, the extra dimensions are not populated by dynamics, already captured by a smaller dimension, but entirely by the contaminating signal. In too large an embedding space one is unnecessarily spending time working around aspects of a bad representation of the observations which are solely filled with noise. It is therefore necessary to determine the dimension d_A . There are several standard approaches to reconstruct the attractor dimension (see, e.g., [3,7-12]), but let us consider in this study two methods only. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. The analysis uses the correlation integral, $C(r)$, to distinguish between chaotic and stochastic systems. To compute the correlation integral, the algorithm of Grassberger and Procaccia [10] is the most commonly used approach. According to this algorithm, the correlation integral is

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N(n-1)} \sum_{\substack{i, j \\ (1 \leq i < j \leq N)}} H(r - \|y_i - y_j\|) \quad (6)$$

where H is the Heaviside step function with $H(u) = 1$ for $u > 0$ and $H(u) = 0$ for $u \leq 0$, r is the radius of sphere centered on \mathbf{y}_i or \mathbf{y}_j , and N is the number of data measurements. If the time series is characterized by an attractor, then the integral $C(r)$ is related to the radius r given by

$$d = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{\log C(r)}{\log r}, \quad (7)$$

where d is correlation exponent. The method of surrogate data [3,7-11] is an approach that makes use of the substitute data generated in accordance to the probabilistic structure underlying the original data. This means that the surrogate data possess some of the properties, such as the mean, the standard deviation, the cumulative distribution function, the power spectrum, etc., but

are otherwise postulated as random, generated according to a specific null hypothesis. Here, the null hypothesis consists of a candidate linear process, and the goal is to reject the hypothesis that the original data have come from a linear stochastic process. One reasonable statistics is obtained as follows. If we denote Q_{orig} as the statistic computed for the original time series and Q_{si} for i th surrogate series generated under the null hypothesis and let μ_s and σ_s denote, respectively, the mean and standard deviation of the distribution of Q_s , then the measure of significance S is given by $S = \frac{|Q_{orig} - \mu_s|}{\sigma_s}$. An S value of ~ 2 cannot be considered very significant, whereas an S value of ~ 10 is highly significant. To detect nonlinearity in the amplitude level data, the one hundred realizations of surrogate data sets were generated according to a null hypothesis in accordance to the probabilistic structure underlying the original data. Often, a significant difference in the estimates of the correlation exponents, between the original and surrogate data sets, can be observed. In the case of the original data, a saturation of the correlation exponent is observed after a certain embedding dimension value (i.e., 6), whereas the correlation exponents computed for the surrogate data sets continue increasing with the increasing embedding dimension. The high significance values of the statistic indicate that the null hypothesis (the data arise from a linear stochastic process) can be rejected and hence the original data might have come from a nonlinear process. It is worth consider another method for determining d_E that comes from asking the basic question addressed in the embedding theorem: when has one eliminated false crossing of the orbit with itself which arose by virtue of having projected the attractor into a too low dimensional space? By examining this question in dimension one, then dimension two, etc. until there are no incorrect or false neighbours remaining, one should be able to establish, from geometrical consideration alone, a value for the necessary embedding dimension. Advanced version is presented in Ref. [3]

The LE are the dynamical invariants of the nonlinear system. In a general case, the orbits of chaotic attractors are unpredictable, but there is the limited predictability of chaotic physical system, which is defined by the global and local LE. A negative exponent indicates a local average rate of contraction while a positive value indicates a local average rate of expansion. In the chaos theory, the spectrum of LE is considered a measure of the effect of perturbing the initial conditions of a dynamical system. In fact, if one manages to derive the whole spectrum of the LE, other invariants of the system, i.e. KE and attractor's dimension can be found. The KE, K , measures the average rate at which infor-

mation about the state is lost with time. An estimate of this measure is the sum of the positive LE. The inverse of the KE is equal to an average predictability. Estimate of dimension of the attractor is provided by the Kaplan and Yorke conjecture:

$$d_L = j + \frac{\sum_{\alpha=1}^j \lambda_{\alpha}}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (8)$$

where j is such that $\sum_{\alpha=1}^j \lambda_{\alpha} > 0$ and $\sum_{\alpha=1}^{j+1} \lambda_{\alpha} < 0$, and the LE λ_{α} are taken in descending order. There are a few approaches to computing the LE. One of them computes the whole spectrum and is based on the Jacobi matrix of system [3]. In the case where only observations are given and the system function is unknown, the matrix has to be estimated from the data. To calculate the spectrum of the LE from the amplitude level data, one could determine the time delay τ and embed the data in the four-dimensional space. In this point it is very important to determine the Kaplan-Yorke dimension and compare it with the correlation dimension, defined by the Grassberger-Procaccia algorithm. The estimations of the KE and average predictability can further show a limit, up to which the amplitude level data can be on average predicted.

3. Relativistic quantum chaos in atomic dynamics in a DC electric and electromagnetic fields

Further we present a new relativistic quantum approach to modeling the chaotic dynamics of atomic systems in a dc electric and ac electromagnetic fields, based on the theory of quasi-stationary quasienergy states, optimized operator perturbation theory, method of model-potential, a complex rotation coordinates algorithm method. The universal chaos-geometric block will be used further to treat the chaotic ionization characteristics for a number of heavy atomic systems.

Let us remind that in the case of the electromagnetic field atomic Hamiltonian is usually as follows:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V_{at}(r) + zF_0 \cos(\omega t) \quad (9)$$

The field is periodic, of course one should use the Floquet theorem; then the eigen Floquet states $\Psi_{E_j}(r, t) >$ and quasienergies E_j are defined as the eigen functions and eigen values of the Floquet Hamiltonian $H_F = H - i\partial_t$. In the general form with using the method of complex coordinates the problem reduces to the solution of stationary Schrödinger equation, which is as follows in the model potential approximation:

$$(-1/2 \cdot \nabla^2 + V_{at}(r) + \omega L_z + F_0 z)\Psi_E(r) = E\Psi_E(r) \quad (10)$$

i.e. to the stationary eigen value and eigen vectors task for some matrix A (with the consideration of several Floquet zones): $(A - -E_j B)E_j \geq 0$. As a decomposition basis, system of the Sturm functions of the operator perturbation theory basis is used.

In our new theory we start from the Dirac Hamiltonian (in relativistic units):

$$H = \alpha p + \beta - \alpha Z/r_i + \sqrt{\alpha} F z, \quad (11)$$

Here a field strength intensity is expressed in the relativistic units ($F_{rel} = \alpha^{5/2} F_{at.un.}$; α is the fine structure constant). One could see that a relativistic wave function in the Hilbert space is a bi-spinor. Using the formal transformation of co-ordinates $r \rightarrow r \exp(i\theta)$ in the Hamiltonian

(??), one could get:

$$H(\theta) = (\alpha c p - Z/r) \exp(-i\theta) + \beta - \sqrt{\alpha} F z \exp(i\theta), \quad (12)$$

In comparison with an analogous non-relativistic theory, here there is arisen a technical problem. In formulae (11) there is term β , which can not be simply transformed. One of the solving receptions is a limitation of a sub-space of the Hamiltonian eigen-functions by states of the definite symmetry (momentum J and parity P). Thus states can be described by the following functions:

$$\Psi_{PJ}^M = 1/r \begin{pmatrix} f(r) \Upsilon_{lJ}^M(n, \sigma) \\ g(r) \Upsilon_{l'J}^M(n, \sigma) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Here $l(l')$ and spin $P \dots$ in the coupling scheme give a state with the total momentum J and its projection $M_J = M$. Action of the Hamiltonian (11) on the functions (13) with definite J results in:

$$\begin{aligned} \widehat{H}(\theta) \Psi_{PJ}^M &= \alpha_r \left(\widehat{p}_r - \frac{i\omega(J+1/2)}{r} \right) \beta \exp(-i\theta) \Psi_{PJ}^M + \\ &+ \left(\beta - \frac{\alpha Z}{r} \exp(-i\theta) - \sqrt{\alpha} F z \exp(-i\theta) \right) \Psi_{PJ}^M \end{aligned} \quad (14)$$

where $\alpha_r = \begin{pmatrix} 0 \dots \sigma n \\ \sigma n \dots 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \dots 0 \\ 0 \dots -1 \end{pmatrix}$, $p_r = -i(1/r)(d/dr)r$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, σ - the Pauli matrices; parameter $\omega = -1$, if $l = J - 1/2$ and $\omega = 1$, if $l = J + 1/2$.

To further diagonalizuvaty Hamiltonian selecting the correct basis functions in subspace, including selecting the following functions (sleterovskoho vodnye-podibnoho or type):

$$\Psi_{PJ}^{a,M} = 1/r \begin{pmatrix} F(r) \Upsilon_{lJ}^M(n, \sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15a)$$

$$\Psi_{PJ}^{b,M} = 1/r \begin{pmatrix} 0 \\ iG(r)Y_{l,J}^M(n, \sigma) \end{pmatrix} \quad (15b)$$

It is easy to see that the matrix elements (14) will be no-zeroth only between the states with the same M_J . In fact this moment is a single limitation of the whole approach.

Transformation of co-ordinates in the Pauli Hamiltonian (in comparison with the Schrodinger equation Hamiltonian it contents additional potential term of a magnetic dipole in an external field) can be performed by the analogous way. However, procedure in this case is significantly simplified.

As illustration, below we present some results of our numerical modelling ionization dynamics for Rydberg atoms Rb, Cs, Fr (Rb: $n = 50-80$; Cs, Fr : $n = 60-80$) in a microwave field ($F = (1.2-3.2) \cdot 10^{-9} a.u.$; $\omega/2\pi = 8.87, 36GHz$). In particular, in Table 1 we present our new relativistic theory data on dependence of the Rb ionization probability P upon the F, interaction time “atom-field”. For comparison there are listed the non-relativistic theoretical data by Krug-Buchleitner [15]; Th2 – Glushkov,Prepelitsa etal [3].

Table 1. Dependence of ionization probability P for Rb ($l_0 = 0, m_0 = 0, n_0 = 60-66$) on n_0, F (at.units), (other parameters: $t = 327.2\pi/\omega$; frequency $\omega_c = \omega/2\pi = 36GHz, 8.87GHz$): Th1- numerical simulation of the Schrödinger equation by Krug-Buchleitner [15]; Th2 – Glushkov,Prepelitsa etal [3]; Th3 – this work

	Th.1	Th.2	Th.3	Th.1	Th.2	Th.2
n_0	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $\omega_c = 36$	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $\omega_c = 36$	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $\omega_c = 36$	$F = 2.8 \cdot 10^{-9}$ $\omega_c = 8.87$	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $\omega_c = 8.87$	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $\omega_c = 8.87$
60	0,25	0,252	0,27	0,20	0,21	0,24
63	0,36	0,358	0,38	0,30	0,31	0,33
64*	-	-	0,36	-	-	0,31
65	0,34	0,347	0,37	0,28	0,29	0,32
66	0,36	0,371	0,39	0,34	0,35	0,38

Comparison of theoretical results with experimental data by Munich group for Rb: ($n_0 > 60, F = (1.2-3.2) \cdot 10^{-9} a.u., \omega/2\pi = 8.87GHz$) [15,16] shows that all listed data are in a reasonable agreement with experiment, however, the best accuracy is provided by relativistic theory. In table 2 we firstly present new data on dependence of the Fr ionization probability P upon the F, interaction

time “atom-field” (the same parameters as in table 1). Unfortunately, here there are no any alternative theoretical or experimental results.

Table 2. Dependence of ionization probability P for Fr ($l_0 = 0, m_0 = 0, n_0 = 76 - 80$) on n_0, F (the same parameters as in table 1): this work

	this work	this work	this work	this work
n_0	$F = 2.8 \cdot 10^{-9}$ $\omega/2\pi = 36$	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $\omega/2\pi = 36$	$F = 2.8 \cdot 10^{-9}$ $8.87GHz$	$F = 3.1 \cdot 10^{-9}$ $8.87GHz$
77	0,47	0,50	0,43	0,46
80	0,58	0,61	0,54	0,56
83*	0,56	0,60	0,51	0,53
86	0,67	0,69	0,62	0,66

In whole, our modeling relativistic dynamics of ionization Rb, Cs, Fr Rydberg states in the microwave field for main quantum numbers $n_0 (n_0 \sim n^*)$ there are the local violations of probability smooth growth associated with the complex Floquet spectrum, link between the quasi-stationary states and a continuum, the growing influence of multiphoton resonances. The picture becomes by more complicated due to the single-photon near-resonance transitions with quasi-random detuning from resonance and quantum phase shift due to scattering Rydberg electron on the atomic core. It is in agreement with alternative comments in [3,15]. In conclusion we have used the chaos-geometric approach (ch. 2) to estimate parameters of relativistic chaotic dynamics for the Rydberg atoms Rb, Cs, Fr in microwave field: correlation dimension, LE, KE. In Table 3 there are listed the numerical LE values, Kolmogorov entropy K_{entr} , for three atomic systems Positivity first two LE showers certainly evidence of chaotic dynamics for studied systems in a microwave field.

Table 3. Numerical data for Hottvod-Melben parameter K , Lyapunov exponents λ_i , Kolmogorov entropy K_{entr} (our data)

Regim	$P_{\text{нб}}$	λ_1	λ_2	K_{entr}
Chaos (Rb)	0.85	0.21	0.06	0.27
Chaos (Cs)	0.87	0.22	0.09	0.31
Chaos (Fr)	0.89	0.25	0.11	0.36

We have constructed the quantitative diagram of effects of the quantum fluctuations, stabilization, destabilization, delocalization and performance of the Kolmogorov-Arnold-Mozer theorem in relativistic atomic dynamics. We have found that the regime of the chaotic ionization for the Li, Rb in a microwave field at $\omega_o = \omega n_o^3 > 0.29(Rb), 0.25(Cs), 0.16(Fr)$ switches to dynamic stabilization one. In whole using the new relativistic chaos-geometric and quantum-dynamical

approaches there have been results, which confirm an universality and charm of relativistic chaotic phenomena.

References

1. Gutzwiller M., *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*.-N.-Y.:Springer-Verlag, 1990.-720p.
2. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Buyadzhi V.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., *Chaogeometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics during perception process// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering (Gdansk,EU).*-2014.-Vol.21.-P.143-150.
3. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P.*Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape//In: Coherence and Ultrashort Pulsed Emission, Ed. Duarte F. J. (Intech, Vienna).*-2011.-P.159-186.
4. Glushkov A.V., Prepelitsa G.P., Lepikh Ya.I., Buyadzhi V.V., Ternovsky V.B., Zaichko P.A., *Chaotic dynamics of non-linear processes in atomic and molecular systems in electromagnetic field and semiconductor and fiber laser devices: new approaches, uniformity and charm of chaos// Sensor Electronics and Microsystems Techn.*-2014.-Vol.11,N4.-P.43-57.
5. Ternovsky V.B., *Geometry and Dynamics of a Chaos: Modelling non-linear processes in relativistic backward-wave tubes chain// International Scientific Journal "Proceedings of International Geometry Center".*- 2014.-Vol.7,N3.-P.77-82.
6. Gallager R.G., *Information theory and reliable communication*, Wiley, New York.-1986.
7. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using geometrical construction//Phys.Rev.A.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.*
8. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., *Geometry from time series// Phys.Rev.Lett.-1988.-Vol.45.-P.712-716.*
9. Grassberger P., Procaccia I., *Measuring the strangeness of strange attractors// Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189-208.*
10. Fraser A., Swinney H., *Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134-1140.*
11. Takens F., *Detecting strange attractors in turbulence. In: Dynamical systems and turbulence, ed. Rand D., Young L.- (Springer, Berlin-New York).*-1981.-P.366-381.
12. Zimmerman M., Littman M., Kash M., Kleppner D., Stark and Zeemane structure of Rydberg states of alkali-metal atoms// *Phys.Rev.A.-1979.-V.20,N6.-P.2251-2275.*
13. Gasati G., Guarneri I., Mantica G., *Classical Stabilization of periodically kicked hydrogen atoms// Phys.Rev.A.-1994.-V.50(??).-P.5018-5024.*
14. Glushkov A.V., Ivanov L.N., *DC Strong-Field Stark-Effect: consistent quantum-mechanical approach // J.Phys.B:At.Mol.Opt.Phys.-1993.-V.26.-P.L379-388.*
15. Krug A., Buchleitner A., *Microwave ionization alkali-metal Rydberg states in a realistic numerical experiment//Phys. Rev. A.-2002.-Vol.66.-P.053416 (10p.);*
16. Gallagher T., Mahon C., Dexter J., Pillet P., *Ionization of sodium and lithium Rydberg atoms by 10-MHz to 15-GHz electric fields//Phys. Rev. A.-1991.- Vol.44.-P. 1859-1872.*

A.V. Glushkov, V.B. Ternovsky, V.V. Buyadzhi, G.P. Prepelitsa

Odessa State Environmental University, 15, L' vovskaya str., Odessa, 65016, Ukraine

E-mail: dirac13@mail.ru

Quantum Geometry: Application of an advanced energy approach in scattering theory to multi-charged ions

Andrey A. Svinarenko

Abstract Within quantum geometry it is presented an advanced energy approach in scattering theory and its application to calculation of cross-sections for some complex atomic systems. The improved numerical data for electron-collisional excitation cross-sections are presented for barium.

Keywords Scattering theory · An advanced energy-amplitude approach · Eigen functions and energy eigen values

Mathematics Subject Classification (2000) 55R05 · 53B05

1 Introduction

At present time a great progress can be noted in development of a quantum geometry and quantum mechanics [1]–[12], that is mainly provided due to the carrying out more correct and effective mathematical methods of solving eigen function and eigen values tasks for multi-body complex quantum systems in relativistic approximation and new algorithms of accounting for the complex exchange-correlation effects. Nevertheless in many calculations there is a serious problem of the gauge invariance, connected with using non-optimized one-electron representation. In fact it means uncorrect accounting for the complex exchange-correlation effects (such as polarization and screening effects, a continuum pressure etc.). In this paper, which goes on our studying [4]–[10], we present an advanced energy approach in scattering theory and its application to calculation of cross-sections for some complex atomic systems. It is based on the

relativistic many-body perturbation theory (PT) and more correct numerical accounting for the complex polarization, screening effects and continuum pressure. The improved numerical data for electron-collisional excitation cross-sections are presented for sodium-like barium.

2 Formal energy approach in scattering theory

We start from the formal energy approach presented in ref.[1]. The new original moment of our scheme is in using more corrected in comparison with [3], [10] gauge invariant procedure for generating the atomic functions basis's (optimized basis's) The latter includes solution of the whole differential equations systems for Dirac-like bi-spinor equations [10].

As an example, we consider the collisional de-excitation of the Ne-like ion: $((2j_{iv})^{-1}3j_{ie}[J_i M_i], \varepsilon_{in}) \rightarrow (\Phi_o, \varepsilon_{sc})$. Here Φ_o is the state of the ion with closed shells (ground state of the Ne-like ion); J_i is the total angular moment of the initial target state; indices iv , ie are related to the initial states of vacancy and electron; indices ε_{in} and ε_{sc} are the incident and scattered energies, respectively to the incident and scattered electrons.

Further it is convenient to use the second quantization representation. In particular, the initial state of the system "atom plus free electron" can be written as

$$|I\rangle = a_{in}^+ \sum_{m_{iv}, m_{ie}} a_{ie}^+ a_{iv} \Phi_o C_{m_{ie}, m_{iv}}^{J_i, M_i} \quad (1)$$

Here $C_{m_{ie}, m_{iv}}^{J_i, M_i}$ is the Clebsh-Gordan coefficient.

Final state is:

$$|F\rangle = a_{sc}^+ \Phi_o, \quad (2)$$

where $|I\rangle$ represents three-quasiparticle (3QP) state, and $|F\rangle$ represents the one-quasiparticle (1QP) state.

The justification of the energy approach in the scattering problem is in details described in ref. [2]. For the state (1) the scattered part of energy shift $\text{Im} \Delta E$ appears first in the second order of the atomic perturbation theory (fourth order of the QED perturbation theory) in the form of integral over the scattered electron energy ε_{sc} [2]:

$$\int d\varepsilon_{sc} G(\varepsilon_{iv}, \varepsilon_{ie}, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{sc}) / (\varepsilon_{sc} - \varepsilon_{iv} - \varepsilon_{ie} - \varepsilon_{in} - i0) \quad (3)$$

with

$$\text{Im} \Delta E = \pi G(\varepsilon_{iv}, \varepsilon_{ie}, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{sc}). \quad (4)$$

Here G is a definite squared combination of the two-electron matrix elements of the interelectron interaction. The value

$$\sigma = -2\text{Im}\Delta E \quad (5)$$

represents the collisional cross-section if the incident electron eigen-function is normalized by the unit flow condition and the scattered electron eigen-function is normalized by the energy δ function.

The collisional strength $\Omega(I \rightarrow F)$ is connected with the collisional cross section σ by expression [2]:

$$\sigma(I \rightarrow F) = \Omega(I \rightarrow F)\pi / ((2J_i + 1)\varepsilon_{in} ((\alpha Z)^2\varepsilon_{in} + 2)) . \quad (6)$$

Here and below the Coulomb units are used; 1 C.u. $\approx 27.054Z^2$ eV, for energy; 1 C.u. $\approx 0.529 \cdot 10^{-8}/Z$ cm, for length; 1 C.u. $\approx 2.419 \cdot 10^{-17}/Z^2$ sec for time.

The collisional de-excitation cross section is defined as follows [2]:

$$\sigma(IK \rightarrow 0) = -\pi \sum_{j_{in}, j_{sc}} (2j_{sc} + 1) \left(\sum_{j_{ie}, j_{iv}} \langle 0 | j_{in}, j_{sc} | j_{ie}, j_{iv}, J_i \rangle B_{ie, iv}^{IK} \right)^2 . \quad (7)$$

Here $B_{ie, iv}^{IK}$ is a real matrix of eigen-vectors coefficients, which is obtained after diagonalization of the secular energy matrix. The amplitude like combination in the above expression has the following form:

$$\begin{aligned} \langle j_{in}, j_{sc} | j_{ie}, j_{iv}, J_i \rangle = & \text{sqrt}(2j_{ie} + 1)(2j_{iv} + 1)(-1)^{j_{ie}+1/2} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda+J_i} \times \\ & \times \left(\delta_{\lambda, J_i} / (2J_i + 1) Q_{\lambda}(sc, ie; iv, in) + \begin{pmatrix} j_{in} & j_{sc} & J_i \\ j_{ie} & j_{iv} & \lambda \end{pmatrix} Q_{\lambda}(ie, in; iv, sc) \right) . \quad (8) \end{aligned}$$

Here values Q_{λ}^{Qul} and Q_{λ}^{Br} are defined by the standard Coulomb and Breit expressions [2]. For the collisional excitations from the ground state (inverse process) one must consider $a_{in}^{+} \Phi_o$ as the initial state and

$$|F\rangle = a_{sc}^{+} \sum_{m_{fe}, m_{fv}} a_{fe}^{+} a_{fv} \Phi_o \tilde{C}_{m_{fe}, m_{fv}}^{J_f, M_f} \quad (9)$$

as a final state. The cross-section is as follows:

$$\sigma(0 \rightarrow IF) = 2\pi(2J_f + 1) \sum_{j_{in}, j_{sc}} (2j_{sc} + 1) \left(\sum_{j_{fe}, j_{fv}} B_{fe, fv}^{FK} \langle j_{fe}, j_{fv}, J_f | j_{in}, j_{sc} | 0 \rangle \right)^2 \quad (10)$$

Table 1 Comparison of measured and calculated electron-collisional excitation cross-sections (σ) for Ne-like barium for two values of incident electron energy 5.69 keV and 8.20 keV (Units are 10^{-21} cm²).

Level	J	Measured Marrs et al. [2]	Calculated Ivanov et al. [4] $E_{el} = 5.69$ keV	Calculated Zhang et al. [2]	Calculated Glushkov et al [7]	Calculated present paper
$2p_{3/2}3d_{5/2}$	1	3.98 ± 0.56	3.20	3.44	3.25	3.62
$2p_{1/2}3d_{3/2}$	1	2.12 ± 0.30	1.78	2.42	1.84	2.06
			$E_{el} = 8.20$ keV			
$2p_{3/2}3d_{5/2}$	1	3.30 ± 0.46	2.87	2.99	2.93	3.25
$2p_{1/2}3d_{3/2}$	1	1.82 ± 0.25	1.64	2.10	1.64	1.81

with

$$\langle j_{fe}, j_{fv}, J_f | j_{in}, j_{sc} 0 | \rangle = \text{sqrt}(2j_{fe} + 1)(2j_{fv} + 1)(-1)^{j_{fe}+1/2} \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda+J_f} \times \\ \times \left(\delta_{\lambda, J_f} (1/(2J_f + 1)) Q_{\lambda}(sc, ie; iv, in) \begin{pmatrix} j_{in} & j_{sc} & J_f \\ j_{fe} & j_{fv} & \lambda \end{pmatrix} Q_{\lambda}(fe, sc; fv, in) \right) \quad (11)$$

The different normalization conditions are used for the incident and for the scattered electron wave functions. Upon the normalization multipliers one gets symmetrical expressions for the excitation and de-excitation, saving the weight multiplier $(2J_f + 1)$ in (17). To calculate all necessary matrix elements one must use the basis's of the one-particle relativistic functions. In next section we briefly consider our idea to generalize an approach and give some conclusions.

3 Some examples and conclusions

We applied our approach to estimate of the electron collisional excitation cross-sections, strengths and rate coefficients for electron-collisional excitation for Ne- and Ar-like ions. To test our theory we compare our calculations on collisional cross-sections for Ne-like iron with known calculations [2], [12]. Table 1 compares the experimental results with our calculations and with those of three other theoretical works [2], [5], [7].

It should be noted that the experimental information about the electron-collisional cross-sections for high-charged Ne-like ions is very scarce and is extracted from indirect observations. In any case implementation of such new elements as indicated above, allows to meet more fine agreement between theoretical relativistic energy-approach data and empirical results.

Acknowledgement. The author would like to thank Prof. A.Glushkov for useful advices and critical comments.

References

1. Grant, I.: *Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules* –Oxford (2008), 650p
2. Glushkov, A. : *Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems* – Odessa, Astroprint (2008), 700p.
3. Glushkov, A., Ivanov, L.: Radiation decay of atomic states: Atomic residue and gauge non-invariant contributions – *Phys. Lett.A.*, **170** (1992), P.33-37.
4. Ivanov, L.N., Ivanova, E.P., Knight, L.: Energy Approach to consistent QED theory for calculation of electron-collision strengths– *Phys.Rev.A.*, **48** (1993), P.4365-4374.
5. Glushkov, A.V., Ivanova, E.P., Ivanov, L.N.: *Generalized energy approach in a theory of decaying atomic state – Autoionization phenomena in atoms* – Moscow, Moscow State University (1986), P.58-160.
6. Glushkov, A., Khetselius, O., Prepelitsa G., Svinarenko, A.: Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape – *Coherence and Ultrashort Pulsed Emission*, Ed. Duarte F. J. – Vienna, Intech (2011), P.159-186.
7. Glushkov, A., Malinovskaya, S., Loboda, A., et al: Diagnostics of the collisionally pumped plasma and search of the optimal plasma parameters of x-ray lasing – *Jpurnal of Physics: C Ser. (IOP, UK)*, **11** (2005), P.188-198.
8. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: Relativistic theory of cooperative muon-gamma-nuclear processes: Negative muon capture and metastable nucleus discharge – *Advances in the Theory of Quantum Systems in Chemistry and Physics. Series: Frontiers in Theoretical Physics and Chemistry*, Eds. P.Hoggan, E.Brandas, G. Delgado-Barrio, P.Piecuch – Berlin, Springer, **22** (2011), P.51-70.
9. Glushkov, A., Khetselius, O., Svinarenko, A.: QED approach to atoms in a laser field: Multi-photon resonances and above threshold ionization – *Frontiers in Quantum Systems in Chemistry and Physics*, Eds. S.Wilson, P.Grout, J. Maruani, G. Delgado-Barrio, P.Piecuch – Berlin, Springer, **18** (2008), P.541-558.
10. Svinarenko, A.: Quantum Geometry: Energy-amplitude approach to multiphoton resonances and above threshold ionization – *Proc. of Int. Geometry Center.*, **6** (2013), N3, P.54-59.
11. Svinarenko, A.: Quantum Geometry: An advanced energy approach in scattering theory – *Proc. of Int.Geometry Center.*, **7** (2014), N1, P.30-34.
12. Glushkov, A., Svinarenko, A., Khetselius, O. et al : *Relativistic Quantum Chemistry: Advanced Approach to Construction of the Green's Function of the Dirac Equation with Complex Energy and Mean-Field Nuclear Potential* – *Frontiers in Quantum Methods and Applications in Chemistry and Physics* – Berlin, Springer, **29** (2015), P.197-218.

Andrey A. Svinarenko

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine.

E-mail: quantsvi@mail.ru

Chaos-Geometric approach to analysis of chaotic dynamics of quantum-generator systems

A.V. Glushkov, O.Yu. Khetselius, T.A. Florko, G.P. Prepelitsa

Abstract Within chaos-geometric approach it has been carried out modelling and analysis of nonlinear processes dynamics in quantum-generator system (time series of laser intensities). The approach combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc.

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, quantum-generator system

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

This paper goes on our work on development an advamsed version of non-lienar analysis tool and its application to studying dynamics of nonlinear processes in complex chaotic systems. Earlier [1]–[8] we have developed a new, chaos-geometrical combined approach to treating of chaotic dynamics of complex systems and forecasting its temporal evolution. Here we use this approach to carry out an analysis of nonlinear processes dynamics in quantum-generator system (on example of laser system). The approach combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc. Let us rimend that during the last two decades, many studies in various fields of science have appeared, in which chaos theory was applied to a great number of dynamical systems, including those are originated from nature [5]–[16]. The outcomes of such studies are very encouraging, as they reported very good predictions using such an approach for different systems.

2. Advanced chaos-geometrical approach to quantum-generator dynamics: Data

In this studying we study dynamics of quantum-generator system on example of external cavity semiconductor laser of the hydrological systems, in particular, variations of the laser intensity, by using the non-linear prediction approaches and chaos theory method (in versions) [1]–[8]. The time series of the laser intensity are described and listed in [9].

As the fundamental aspects of chaos-geometric approach have been in details presented earlier, here we are limited only by key moments. Following to [1]–[9], further we formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

Let us remind that following to [1]–[8], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between

any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. Earlier it was suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

In [5]–[6] it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

As input data we have used measured data for the temporal dependences of the intensity of the laser [9]: i) - time series, showing the random walk between the ground state and state of third harmonics of the laser system; ii) - the time series for the system in a state of a global chaotic attractor.

In table 1 we list the values of the autocorrelation function C_L and the first minimum of mutual information I_{min1} for the laser intensity.

Table 1. Time lags (hours) subject to different values of C_L , and first minima of average mutual information, I_{min1} , for the laser emission intensity.

	Series 1	Series 2	Series 3	Series 4
$C_L=0.1$	67	82	112	124
$C_L=0.5$	10	12	9	21
I_{min1}	12	14	18	28

The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ , but in [10]–[12] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values in Table 1. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using Grassberger-Procaccia method [12]. Here the outcome is explained not only inappropriate values of τ but also shortcomings of correlation dimension method. If algorithm [4] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ . If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 6$.

The fundamental problem of theory of any dynamical system is in predicting the evolutionary dynamics of a chaotic system. Let us remind following to [14]–[16] that the cited predictability can be estimated by the Kolmogorov entropy, which is proportional to a sum of positive LE. As usually, the spectrum of LE is one of dynamical invariants for non-linear system with chaotic behaviour. The limited predictability of the chaos is quantified by the local and global LE, which can be determined from measurements. The LE are related to the eigenvalues of the linearized dynamics across the attractor. Negative values show stable behaviour while positive values show local unstable behaviour. For chaotic systems, being both stable and unstable, LE indicate the complexity of the dynamics. The largest positive value determines some average prediction limit. Since the LE are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and hence the choice of trajectory, and they do comprise an invariant measure of the attractor. An estimate of this measure is a sum of the positive LE. The estimate of the attractor dimension is provided by the conjecture d_L and the LE are taken in descending order. The dimension d_L gives values close to the dimension estimates discussed earlier and is preferable when estimating high dimensions. To compute LE, we use a method with linear fitted map, although the maps with higher order polynomials can be used too. Non-linear model of chaotic processes is based on the concept of compact geometric attractor on which observations evolve. Since an orbit is continually folded back on itself by dissipative forces and the non-linear part of dynamics, some orbit points [4]–[6] $\mathbf{y}^r(k)$, $r = 1, 2, \dots, N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k . One can then choose some interpolation functions, which account for whole neighbourhoods of phase space and how they evolve from near $\mathbf{y}(k)$ to whole set of points near $\mathbf{y}(k+1)$. The implementation of this concept is to build parameterized non-linear functions $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ which take $\mathbf{y}(k)$ into $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ and use various criteria to determine parameters \mathbf{a} . Since one has the notion of local neighbourhoods, one can build up one's model of the process neighbourhood by neighbourhood and, by piecing together these local models, produce a global non-linear model that capture much of the structure in an attractor itself. Table 2 shows the correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the laser intensities.

Table 2. The Time lag (τ), correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L) for time series of the laser intensity (chaos and hyperchaos regimes).

	Chaos	Hyperchaos
τ	6	10
(d_2)	2.2	7.4
(d_E)	4	8
d_L	2.16	7.18

The sum of the positive LE determines the Kolmogorov entropy, which is inversely proportional to the limit of predictability (Pr_{max}). Let us remind since the conversion rate of the sphere into an ellipsoid along different axes is determined by the LE, it is clear that the smaller the amount of positive dimensions, the more stable is a dynamic system. Consequently, it increases the predictability of it. As the numerical calculation shows the presence of the two (from six) positive λ_i (one LE pair for chaos regime: 0.151 and 0.0001; for hyperchaos : 0.517 and 0.192) suggests the system broadens in the line of two axes and converges along four axes that in the six-dimensional space. The time series of laser intensity in the chaos regime have the highest predictability than other time series, for example, in the hyperchaos one.

3. Conclusions

In this paper we considered an advanced chaos-geometrical approach to numerical modelling and analysis of nonlinear processes dynamics in quantum-generator system on example of the semiconductor laser system. The approach combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc. We have investigated a chaotic behaviour in the time series of the laser intensity in two regimes of chaos and hyperchaos and computed the key numerical parameters of chaotic dynamics.

References

1. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
2. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-6(??)-6-12.
3. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V., Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.

4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284–7292.
5. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Buyadzhi V.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., Chaogeometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics during perception process// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering (Gdansk,EU, World Sci.).-2014.-Vol.21.-P.143–150.
6. Glushkov A.V., Prepelitsa G.P., Lepikh Ya.I., Buyadzhi V.V., Ternovsky V.B., Zaichko P.A., Chaotic dynamics of non-linear processes in atomic and molecular systems in electromagnetic field and semiconductor and fiber laser devices: new approaches, uniformity and charm of chaos// Sensor Electronics and Microsystems Techn.-2014.-Vol.11,N4.-P.43–57.
7. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems – Theory and Applications. – Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.- LIF111 (6p).
8. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. of Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N3.-P.6-14.
9. Fischer I., Hess O., Elsaber W., Gobel E.: High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser//Phys Rev Lett.-1994.-Vol.73.-P.2188–2192.
10. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403–3411.
11. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712–716.
12. Grassberger P., Procaccia I., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189–208.
13. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134–1140.
14. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366–381
15. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230–242
16. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082–1085

A.V. Glushkov, O.Yu. Khetselius, T.A. Florco, G.P. Prepelitsa

Mathematics Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: dirac13@mail.ru

Інваріантні міри на системах багатогранників

Герасін Олексій Іванович

Анотація В статті автор розглядає багатогранні обобщенно випуклі множини. Властивості обобщенно випуклих множин використовуються при обчисленні інваріантних мір на сукупності багатогранників. Представлений метод і отримані результати обчислень дають можливість знаходити інваріантні міри при розв'язанні прямої і оберненої задачі томографії.

Ключові слова Інваріантна міра, багатогранники, обобщенно випуклі множини, теорема Крофтона, міра гіперплощин, задача томографії.

УДК 519.6

1 Вступ

Більшість мінералів має кристалічну будову у вигляді різних багатогранників. Дуже плідним методом вивчення геометричної будови природних об'єктів, кристалів органічних та неорганічних речовин є метод рентгеноструктурного аналізу. Він заснований на тому, що всяка речовина володіє здатністю розсіювати падаюче на нього випромінювання, зокрема рентгенівське. При цьому розсіювання рентгенівських променів кристалами знаходиться в певній відповідності з розташуванням атомів в кристалі. Останній час розвивалась область математики, що займається розробкою математичних методів і алгоритмів відновлення внутрішньої структури об'єкту за проєкційними даними. Зокрема, рішеннями прямої і зворотної задачі томографії. Цим проблемам і присвячена дана робота.

1.1 Аналіз останніх досліджень і публікацій

В класичній задачі Бюффона про голку вже неявно була присутня ідея введення мір в просторі прямих на площині. Пізніше "природним розподілом" прямої g визначили міру, відносно якої конгруентні між собою геометричні події отримують рівні міри.

Потім було показано єдність диференціальних елементів, які інваріантні відносно групи всіх трансляцій і поворотів на площині (Пуанкаре, 1912 р.) і просторі (Пойа, 1917 р.).

Задачу про інваріантні міри на системах опуклих множин на площині поставив, але не вирішив англійський математик Сільвестр [11]. Повністю задача була розв'язана Амбарцумяном [1], але для множин, що не знаходяться на площині у загальному положенні (тобто жодні три вершини голки не належать до одної прямої). Пізніше ця умова була знята і зроблено узагальнення теореми Крофтона на багатовимірний випадок [4,5].

В процесі досліджень, пов'язаних з даною роботою виявилось, що природним апаратом для рішення задач пов'язаних з інваріантними мірами, є $(n - 1)$ -опуклі множини, які запропонував у 1987 році Зелінський [8]. Властивості $(n - 1)$ -опуклих множин досить досліджені [2,3].

1.2 Мета статі

Вимога "множини, що не знаходяться у просторі у загальному положенні" передбачає, таке розташування багатогранників в тривимірному просторі, що не існує жодній прямій, в просторі, яка перетинала б межі трьох і більш багатогранників. Т. е. апіорі, методика, що використовується [1] та [9], не придатна для модулювання кристалічних решіток. Дослідити методику обчислень 2-мір за допомогою узагальнення теореми Крофтона на системі двох багатогранників, використав властивості 2-опуклих багатогранників і спеціальних F -множин. Це дає змогу, отримані результати узагальнити на множини, що складається з багатьох компонент-багатогранників, довільно розташованих.

2 Виклад основного матеріалу

Визначення основних понять, що використовуються в роботі, можна знайти в [2 - 5]. Нам знадобиться поняття $(n - 1)$ -опуклої множини [8] та опуклої оболонки [9].

Означення 1 Множина $A \subset R^n$ має назву $(n-1)$ -опукла, якщо через будь-яку точку $x \in R^n \setminus A$, можна провести гіперплощину H , що не перетинає A .

Означення 2 Опуклий перетин усіх опуклих множин, що містять задану множину $A \subset R^n$, називають опуклою оболонкою множини A і означають

$$\widehat{A} = \text{conv}(A) = \bigcap_{K \supset A} K,$$

де K є опукла множина.

Так само можна визначити поняття $(n-1)$ -опуклої оболонки.

Маємо визначення F -множин (Face of set).

Означення 3 Нехай A , множина, що складається з двох не порожніх опуклих компонент A_1 і A_2 тоді для опуклої оболонки \widehat{A} множини має місце рівність (див. в [2])

$$\widehat{A} = \text{conv}(A_1 \cup A_2) = \bigcup_{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2}} x_1 x_2.$$

Для кожного відрізка $x_1 x_2$ визначимо точки $f_1 \in \overline{A_1}$ і $f_2 \in \overline{A_2}$ найбільш близько розташовані до точок $x_1 \in \overline{A_1}$ і $x_2 \in \overline{A_2}$ відповідно. Визначимо множини F_i , $i = 1, 2$, як сукупність точок, побудованих для всіляких відрізків $x_1 x_2$.

Очевидно, що $F_1 \subset \partial A_1$ та $F_2 \subset \partial A_2$. В [2,3] показані властивості множин F_i , $i = 1, 2$ для $(n-1)$ -опуклих множин.

Означення 4 Нехай μ^2 , σ -скінченна міра у просторі площин, інваріантна відносно групи всіх трансляцій і поворотів у R^3 . З [1] звісно, що

$$\mu^2(K) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} l(\rho_{\vartheta\varphi} K) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta, \quad (1)$$

де $K \subset R^3$ - компактна опукла множина, $\mu_2(K)$ - міра площин, які перетинають множину, $l(\rho_{\vartheta\varphi} K)$ - довжина ортогональної проекції K на пряму, що проходить через $(0,0,0)$ у напрямку $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.

Означення 5 Для багатогранника $M \subset R^3$ є формула міри множини всіх площин, що перетинають M .

$$\mu^2(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) l_i, \quad (2)$$

де l_i довжина i -го ребра, α_i – двогранний кут між гранями, які утворюють i -е ребро.

Міру площин у тривимірному просторі будемо називати 2-міра, або μ^2 .

Мінковським визначена сума випуклих множин $A \oplus B$ [9].

Означення 6 Нехай A і B – непусти опуклі множини у R^3 , радіус-вектори точок $a \in A$ і $b \in B$ співвіднесені до початку координат 0. Тоді (залежну від вибору 0) множину

$$A \oplus B = \{z \in R^n | z = a + b, a \in A, b \in B\}$$

будемо називати сумою A і B .

Позначимо через K^S множину, симетричну опуклій множині відносно центра ваги множини [5].

Означення 7 Нехай $B \subset R^n$ – множина, яка складається з двох обмежених опуклих множин B_1 і B_2 , O_1 і O_2 – центри ваги тіл B_1 і B_2 , відповідно і нехай $B_2^N = t(B_2 \oplus B_1^S)$ ($i = 1, 2$), де t – трансляція множин $(B_2 \oplus B_1^S)$, при якій центр тяжіння його співпадає з центром тяжіння множини B_2 . Позначимо через B_2^D множину $\text{conv}(0 \cup B_2^N)$, а $\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <)$ міру гіперплощин, що розділяють множини B_i ($i = 1, 2$) [5].

Далі маємо узагальнення теореми Крофтона на багатовимірний простір.

Теорема 1 Нехай $B \subset R^n$ – множина, яка складається з двох обмежених опуклих множин B_1 і B_2 . Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють множини B_1 і B_2 , дорівнює:

$$\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <) = \mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N). \quad (3)$$

Доказ надано [5].

У [10] стор. 194–197 вказані інтеграли середньої кривизни $M(K)$ деяких опуклих множин. Існує наступне співвідношення між інтегралами середньої кривизни та $\mu^2(K)$ мірою множини всіх площин, що перетинають множину K .

$$\mu^2(K) = \frac{M(K)}{2\pi}.$$

Маємо наступні $\mu^2(K)$ опуклих багатогранників $K \subset R^3$.

Приклад 1.

а) Для тетраедра з довжиною ребра a та радіусом описаної сфери R :

$$\mu^2(K) = \frac{\sqrt{6}R \arccos(-\frac{1}{3})}{\pi} = \frac{3a \arccos(-\frac{1}{3})}{2\pi}.$$

б) Для куба з довжиною ребра a :

$$\mu^2(K) = \frac{3a}{2}.$$

в) Для плоскої опуклої множини K з периметром P , яку розглядаємо як опуклу множину у R^3 , маємо:

$$\mu^2(K) = \frac{P}{4}.$$

Пропозиція 1 Міра множини всіх площин, що перетинають пряму піраміду висотою $H = \lambda a$, $\lambda \geq 0$, основа якої правильний трикутник зі стороною a , дорівнює:

$$\mu^2(P) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3} \arccos \frac{(1-6\lambda^2)}{(1+12\lambda^2)} + a \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{1+12\lambda^2}} \right) \right)$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Доведення 1 Позначимо висоту піраміди $H = \lambda a$, $\lambda \geq 0$, для тетраедру $\lambda_{\text{ТЕТ}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Використавши формули аналітичної геометрії, знайдемо вершини прямої піраміди :

$$P_0 = (0, 0, 0), P_1 = (\lambda a, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}),$$

$$P_2 = (\lambda a, -\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}), P_3 = (\lambda a, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}).$$

Для обчислень кута між гранями знайдемо вектори, що виходять з вершини P_0 :

$$V_0 = (\lambda a, 0, 0), V_1 = (\lambda a, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}),$$

$$V_2 = (\lambda a, -\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}), V_3 = (\lambda a, \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{6}), .$$

Потім знайдемо вектор нормалі до площини, що проходить крізь точки P_0, P_1, P_2 :

$$n_{21} = [V_2 \times V_1] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda a & -\frac{a}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{6} \\ \lambda a & 0 & \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}i - \frac{\lambda a^2\sqrt{3}}{2}j + \frac{\lambda a^2}{2}k$$

Та вектор нормалі до площини, що проходить крізь точки P_0, P_1, P_2 :

$$n_{13} = [V_1 \times V_3] = -\frac{a^2\sqrt{3}}{6}i + \frac{\lambda a^2\sqrt{3}}{2}j + \frac{\lambda a^2}{2}k$$

Обчислимо косинус кута між цими векторами за допомогою формули косинуса.

Скалярний добуток

$$(n_{21} \cdot n_{13}) = \frac{a^4}{12} - \frac{\lambda^2 a^4}{2}.$$

Кут між нормаллями

$$\angle(n_{12}, n_{13}) = \arccos \frac{(n_{12} \cdot n_{13})}{|n_{21}| \cdot |n_{12}|}, = \arccos \frac{(1 - 6\lambda^2)}{(1 + 12\lambda^2)}$$

Тепер обчислимо кут між боковою гранню та основою, для цього обчислимо косинус кута між векторами $V_0 = (\lambda a, 0, 0)$ та $n_{21} = [V_2 \times V_1]$:

$$\angle(V_0, n_{21}) = \arccos \frac{(V_0 \cdot n_{21})}{|V_0| \cdot |n_{21}|} = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + 12\lambda^2}} \right)$$

Довжина бокової грані дорівнює $\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3}$. В основі квадрат зі стороною . З формули для багатогранника маємо:

$$\begin{aligned} \mu^2(P) &= \\ &= \frac{3}{4\pi} \left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3} \arccos \frac{(1 - 6\lambda^2)}{(1 + 12\lambda^2)} + a \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + 12\lambda^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Для тетраедру $\lambda_{TET} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, кут має значення $\arccos(-\frac{1}{3})$. Див. приклад 1, а.

Пропозиція 2 Нехай $B \subset R^3$ - множина, яка складається з двох обмежених опуклих множин B_1 – правильний трикутник зі стороною a і B_2 - трикутник перетворений з трикутника B_1 , за допомогою центральної симетрії та паралельним зсувом по осі OY на відстань $H = \lambda a$. $\lambda \geq 0$. Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють тіла B_1 і B_2 дорівнює:

$$\begin{aligned} \mu^2(> P_1, P_2 <) &= \\ &= \frac{3}{4\pi} \left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3} \arccos \frac{(1 - 6\lambda^2)}{(1 + 12\lambda^2)} + a \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + 12\lambda^2}} \right) - \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

Доведення 2 З пропозиції 1:

$$\begin{aligned} & \mu^2(P_2^D) = \\ & = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3} \arccos \frac{(1-6\lambda^2)}{(1+12\lambda^2)} + a \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{1+12\lambda^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Множина P_2^D правильний трикутник зі стороною $2a$, тому

$$\mu^2(P_2^N) = \frac{3a}{2}$$

З теореми 1, маємо $\mu^2(> P_1, P_2 <) =$ дорівнює

$$\begin{aligned} & \mu^{n-1}(P_2^D) - \mu^{n-1}(P_2^N) = \\ & = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{a\sqrt{3(1+3\lambda^2)}}{3} \arccos \frac{(1-6\lambda^2)}{(1+12\lambda^2)} + a \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{1+12\lambda^2}} \right) - \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Зауваження 1 Пропозиція 2 дає змогу обчислити інваріантні міри для двох багатогранників, F -множини [4] яких складаються з правильних трикутників. Потім, можливо узагальнення результатів на сукупності кінцевого числа багатогранників.

Пропозиція 3 Множини B_1 і B_2 - два квадрати зі стороною a , що створені паралельним зсувом на відстань $H = \lambda a$, $\lambda \geq 0$:

$$B_1 = \{(x, y, z) : x = 0; -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\}$$

$$B_2 = \{(x, y, z) : x = H; -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\}.$$

Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють множини B_1 і B_2 дорівнює:

$$\mu^2(> B_1, B_2 <) = \mu^2(B_2^D) - \mu^2(B_2^N)$$

$$\mu^2(B_2^D) - \mu^2(B_2^N) = \frac{1}{\pi} \left(\arccos \left(\frac{1}{1+4\lambda^2} \right) \cdot a\sqrt{2+\lambda^2} + 2a(\pi - \arctg(\lambda)) \right) - 2a$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Доведення 3 Згідно з теоремою 1, маємо:

$$B_2^N = \{(x, y, z) : x = H; -a \leq y \leq a; -a \leq z \leq a\}$$

B_2^D - піраміда з вершиною у точці $(0, 0, 0)$ і основою - квадратом, з стороною $2a$. Бокові ребра піраміди мають довжину:

$$|L| = \sqrt{2a^2 + H^2} = a\sqrt{2 + \lambda^2}.$$

Використавши формули аналітичної геометрії, аналогічно прикладу 1, знайдемо вершини прямої піраміди. Потім обчислимо вектори нормалі до граней і відповідні двогранні кути. Маємо:

$$\mu^2(B_2^D) = \frac{1}{\pi} \left(\arccos\left(\frac{a^2}{a^2 + 4H^2}\right) \cdot \sqrt{2a^2 + H^2} + 2a \left(\pi - \arctg\left(\frac{H}{a}\right) \right) \right)$$

Тобто

$$\mu^2(B_2^D) = \frac{1}{\pi} \left(\arccos\left(\frac{1}{1^2 + 4\lambda^2}\right) \cdot a\sqrt{2 + \lambda^2} + 2a \left(\pi - \arctg(\lambda) \right) \right)$$

Використавши формулу прикладу 1, випадок в), маємо

$$\mu^2(> K_1, K_2 <) = \frac{1}{\pi} \left(\arccos\left(\frac{1}{1^2 + 4\lambda^2}\right) \cdot a\sqrt{2 + \lambda^2} + 2a \left(\pi - \arctg(\lambda) - 2 \right) \right)$$

де $\lambda = \frac{H}{a}$.

Пропозиція 4 Нехай $K \subset R^3$ - множина, яка складається з двох K_1 і K_2 кубів, що створені паралельним зсувом на відстань:

$$K_1 = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq 0; -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\}$$

$$K_2 = \{(x, y, z) : H \leq x \leq H + a; -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}\}.$$

Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють тіла K_1 і K_2 дорівнює:

$$\mu^2(> K_1, K_2 <) = \frac{3a}{\pi} \left(\arccos\left(\frac{1}{1^2 + 4\lambda^2}\right) \cdot a\sqrt{2 + \lambda^2} + 6 \left(\pi - \arctg(\lambda) - 2 \right) \right)$$

Доведення 4 Відмітимо, що для тіл K_1 і K_2 F -множини є два квадрати B_1 і B_2 , відповідно (Пропозиція 3). З цього слідує формула.

За допомогою пропозиції 4 ми маємо провести наступні обчислення.

Пропозиція 5 Нехай $K \subset R^3$ - множина, яка складається з 8 кубів K_i , $i = 1, 8$, зі стороною a , що створені паралельним зсувом і центри яких, знаходяться у вершинах кубу зі стороною $a + b$, $0 < b < a$. Тоді міра множини всіх гіперплощин, що перетинають множину K і не перетинають, тобто розділяють куби K_i , $i = 1, 8$. Дорівнює

$$\begin{aligned} \mu^2(> K_i, i = 1, 8 <) = \\ = \frac{6(\lambda + a + b)}{\pi} \left(\arccos\left(\frac{1}{1 + 4\lambda^2}\right) \cdot \sqrt{2 + \lambda^2} + 6(\pi - \arctg(\lambda) - 2) \right) \end{aligned}$$

$$\text{де } \lambda = \frac{b}{a+b}.$$

Доведення 5 Відстань між кубами, що знаходяться на ребрі куба дорівнює b , $0 < b < a$. Поскільки $b < a$, існує три множини A_1, A_2, A_3 площин, що розділяють куби на системи по чотири куба. Ці множини мають назву атоми [9]. Знайдемо опуклу оболонку, для кожної системи з чотирьох кубів. Це зводить доведення до випадку прикладу 2, квадрати B_1 і B_2 мають сторону, що дорівнює $a+b$, а відстань між ними b . У вираз теорему 4 підставляємо відповідні значення a та λ . Помножуючи його на кількість атомів, тобто 3, маємо формулу пропозиції 4.

3 Висновки

В статі використано узагальнення теорему Крофтона на тривимірний випадок. Використовуючи властивості узагальнено опуклих множин, обчислені інваріантні 2-міри для двох багатогранників, F -множини яких складаються з правильних трикутників, або квадратів. Деякі інші випадки опуклих множин, F -множини яких мають у складі коло, фрагменти кулі див. [7]. Доведені теореми для двох багатогранників дозволяють узагальнити результати на сукупності кінцевого числа багатогранників. Пропонований метод та одержаний результат обчислень, дають змогу знаходити інваріантні міри сукупності багатогранників, що може бути використано при рішенні прямої і зворотної задачі томографії.

Література

1. Амбарцумян Р. И., Мекке Л., Штоян Л. *Введение в стохастическую геометрию*. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
2. Герасин А. И. *Об (n-1)-выпуклых множествах*. Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР, 1988. – С. 8-14.

3. Герасин А. И. *Обозримость (n-1)-выпуклых множеств*. Комплексный анализ, алгебра и топология: Сб. Науч. Тр. Киев: Ин-тут математики АН УССР, 1990. – С. 20-28.
4. Герасин А. И. *О мерах на (n-1)-выпуклых множествах*.-Киев,1994,-28 с.-(Препр.АН Украины. Ин-т математики: 94.1)
5. Герасин А. И. *Об инвариантных мерах*.-1994.-6с.-(Препр. АН Украины. Ин-т математики: 94.3)
6. Герасін О. І. *Про інваріантні міри у тривимірному просторі*, Науковий вісник АМУ. Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології управління. Серія «Техніка». Збірник наукових праць, С. 32–37 (2008)
7. Герасін О. І. *Про геометричні ймовірності С*. Вісник університету «Україна» Теоретичне та науково-методичне видання № 6, 2008 С. 93-96.
8. Зелинский Ю. Б. *Многозначные отображения в анализе*. – Киев: Наук. Думка, 1993.- 264 с.
9. Лехтвейс К. *Выпуклые множества*. – М.: Наука 1965. – 336 с.
10. Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*.- М.:Наука,1983.-360 с.
11. Silvestr J. J. *On a funicular solution of Buffon's "Problem of the needle" in its most general form* / Acta Math.-1890. – 14 . – P. 185-205.

Герасін Олексій Іванович

ІІДО НУХТ, Київ, Україна

E-mail: agerasin@ukr.net

Alex I. Gerasin

Invariant measures on set of polyhedrons.

In this article the author consider the polyhedral generalize convex sets. Properties generalize convex sets are used for the calculation of invariant measures on set of polyhedrons. Offered method and got results of calculations, enable to find invariant measures at the decision of direct and reverse task of tomography.

Keywords: Invariant measure, generalize convex body, polyhedral sets, Crofton theorem, measure of hyperplanes, task of tomography.

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук

(перелік № 1-05/3 від 14.04.2010 Бюлетень ВАК України. 2010. №
4)

Наклад 300 примірників. Зам. №

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,

кафедра вищої математики,

вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net

website: <http://geometry-center.com>

ISSN 2072-9812 (print). ISSN 2409-8906 (Online).

ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.

2014. ТОМ 7. №4. 1-94

Журнал індексується в WorldCat;



Журнал індексується в Bielefeld Academic Search Engine (BASE);



Журнал індексується в Research Bible;



Журнал індексується в Google Scholar;



Журналу присвоєно Міжнародний номер наукових періодичних видань ISSN для друкованих видань ISSN print 2072-9812, а також для онлайн версії журналу ISSN online 2409-8906



Журнал сертифікований за стандартом якості ISO 26324:2012

