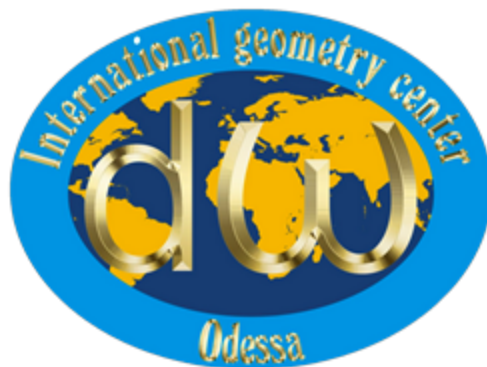

ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)
ISO 26324:2012

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 8, No. 1, 2015





ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)

Благодійний фонд наукових досліджень
"Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 8, No. 1, 2015

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 8, No. 1, 2015

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 8, No. 1, 2015

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2015

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеської національної академії харчових технологій
(№ 9 від 03.03.2015р)

Головний редактор: **Пришляк О.О.**

Заступники головного редактора: **Микитюк І.В., Мілка А.Д.,
Шелєхов О.М.**

Відповідальні редактори: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Відповідальні секретарі: **Мойсеєнок О.П., Федченко Ю.С.**

Редакційна колегія:

Балан В.	Кирилов В.Х.	Сергеєва О.Є.
Банах Т.О.	Максименко С.І.	Федосов С.Н.
Волков В.Е.	Машков О.А.	Фоменко А.Т.
Глушков О.В.	Мікеш Й.	Фоменко В.Т.
Задорожний В.Г.	Мормул П.	Хаддад М.
Зарічний М.М.	Рахула М.О.	Швець В.Т.
Кац І.С.	Сабітов І.Х.	Шуригін В.В.
Кириченко В.Ф.	Савченко О.Г.	

©Благодійний фонд наукових досліджень "Наука", 2015

Главный редактор: **Пришляк А.О.**

Заместители главного редактора: **Микитюк И.В., Милка А.Д., Шелехов А.М.**

Ответственные редакторы: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Ответственные секретари: **Мойсеенок А.П., Федченко Ю.С.**

Редакционная коллегия:

Балан В.	Кириллов В.Х.	Сергеева А.Е.
Банах Т.О.	Максименко С.И.	Федосов С.Н.
Волков В.Э.	Машков О.А.	Фоменко А.Т.
Глушков А.В.	Микеш Й.	Фоменко В.Т.
Задорожный В.Г.	Мормул П.	Хаддад М.
Заричный М.М.	Рахула М.О.	Швец В.Т.
Кац И.С.	Сабитов И.Х.	Шурыгин В.В.
Кириченко В.Ф.	Савченко А.Г.	

Editor-in-Chief: **Prishlyak A. O.**

Deputies Editor-in-Chief: **Mikityuk I. V., Milka A. D.**
Shelekhov A. M.

Managing Editors: **Konovenko N. G., Kuzakon V. M.**

Executive Secretary: **Moiseenok A. P., Fedchenko Ju. S.**

Editorial Board:

Balan V.	Kirillov V.Kh.	Sergeeva A.S.
Banah T.S.	Kirichenko V.F.	Shvets V.T.
Fedosov S.N.	Maksimenko S.I.	Shurygin V.V.
Fomenko A.T.	Mashkov O.A.	Sabitov I.Kh.
Fomenko V.T.	Mikes J.	Volkov V.E.
Glushkov A.V.	Mormul P.	Zadorozhnyi V.G.
Haddad M.	Rahula M.O.	Zarichnyi M.M.
Kats I.S.	Savchenko O.G.	

©Charity Fund for Scientific Research "Science", 2015

Зміст

Памяти Макса Айзиковича Акивиса	7
Пам'яті Володимира Васильовича Шарка	21
И. Ю. Власенко Критерий топологической сопряженности двумерных однородных внутренних отображений	24
В. А. Горькавый, Е. Н. Невмержицкая Псевдосферическая поверхность в \mathbb{R}^4 не допускает двух различных преобразований Бьянки	34
А. А. Кадубовский О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II	47
И. Н. Курбатова 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий	63

И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств	74
М. М. Зарічний, М. М. Романський, О. Г. Савченко Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях	84
A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, V.V. Buyadzhi, E.P. Solyanikova Geometry of Chaos: Advanced computational approach to treating chaotic dynamics of some hydroecological systems	93
G.P. Prepelitsa Chaos-Geometric approach to analysis of chaotic attractor dynamics for the one-ring fibre laser	100

Памяти Макса Айзиковича Акивиса



Один из самых замечательных геометров современности, Макс Айзикович Акивис родился 5 января 1923 года в Новосибирске. Его выдающиеся математические способности обнаружались еще в школе. В 1940 году он поступил на механико-математический факультет МГУ. Эти занятия прервались во время Великой Отечественной войны, когда он в 1942 году был призван в ряды действующей Армии. С 1942 по 1945 гг. он служил артиллеристом, участвовал в освобождении Праги и взятии Берлина. Награждён многочисленными ордена и медалями, в том числе орденом Красной Звезды, медалью «За отвагу» и другими.

После войны Макс Айзикович продолжил обучение на мехмате МГУ. Но закончить обучение вовремя ему не удалось. В 1949 г. во времена печально известной борьбы с космополитизмом, он был исключен с 5-го курса по надуманным "идеологическим причинам", и смог получить диплом МГУ только в 1951 году. Профессор И.М. Гельфанд, который работал в 1940-е годы в МГУ, писал: "М.А. Акивис и Е.Б. Дынкин были моими лучшими студентами в МГУ в 40-е годы. Акивис выбрал дифференциальную геометрию. К сожалению, конец его студенческой карьеры был омрачен условиями жизни в Советском Союзе в то время, и он не смог нормально обучаться в аспирантуре. Но он преодолел все трудности и стал одним из лучших учёных в области классической дифференциальной геометрии".

В 1958 году М.А.Акивис защитил кандидатскую диссертацию, в 1964 – докторскую, в 1965 получил звание профессора. С 1956 по 1960 год он работал в Тульском механическом институте, с 1960 по 1994 – в должности профессора кафедры высшей математики Московского института стали и сплавов.

С 1948 года Акивис опубликовал более 150-ти научных статей, учебников и монографий. Он получил фундаментальные результаты по проективной и конформной дифференциальной геометрии, теории тканей и дифференциально-геометрических структур. Многие из этих результатов стали классическими сразу после выхода из печати – настолько они были глубокими по содержанию, совершенными по форме и по ясности и полноте изложения.

Первые работы М.А.Акивиса посвящены парам T комплексов (трёхпараметрических семейств) прямых в трехмерном проективном пространстве P^3 . Его научный руководитель Сергей Павлович Фиников предложил ему применить понятие гармонического пересечения

линейчатых поверхностей, которое ввел Эли Картан, к теории конгруэнций (двупараметрических семейств) прямых. Макс Айзикович блестяще решил эту проблему: он нашел новые свойства пар T конгруэнций, введённых С.П. Финиковым, и распространил его результаты на пары T комплексов. Он показал, что открытые им пары комплексов при плюккеровом отображении переходят в некоторую конфигурацию пятимерного проективного пространства, состоящую из тангенциально вырожденных двумерных многообразий и трёхмерных подмногообразий, несущих сопряженную сеть. Этим многообразиям он посвятил серию статей, опубликованных в 50-60 годы. Таким образом, он открыл новое поле исследований в проективной дифференциальной геометрии, которое успешно развивается до сих пор.

Результаты, посвящённые парам T комплексов, составили кандидатскую диссертацию Макса Айзиковича, а многие его результаты по проективной дифференциальной геометрии позднее вошли в монографию *Projective differential geometry of submanifolds* (North-Holland, 1993), написанную им совместно с Владиславом Викторовичем Гольдбергом.

Изучая пары T комплексов, М.А.Акивис заметил, что на плюккеровой гиперквадрике, на которой реализуется многообразие прямых проективного пространства, естественным образом возникает конформная геометрия. Это очень простое наблюдение привело к интересным и важным обобщениям. В 1960-е годы Акивис строит теорию подмногообразий конформного пространства. В частности, для подмногообразий произвольной размерности он находит систему тензоров, определяющих это подмногообразие с точностью до конформного преобразования. Эти результаты легли в основу его докторской диссертации и были в дальнейшем развиты им в последующих работах по теории конформных и псевдоконформных структур.

В своих исследованиях М.А.Акивис комбинировал метод внешних форм и подвижного репера Э.Картана и метод продолжений и охватов Германа Федоровича Лаптева с классическими тензорными методами. Широкие математические взгляды Макса Айзиковича вместе с его необыкновенной геометрической интуицией позволили ему получить важные и глубокие результаты в завершённой форме и достигнуть необычайной ясности в их изложении.

В 1959 он переводит с немецкого книгу Вильгельма Бляшке "Введение в геометрию тканей". В это время появляется много работ по алгебраической теории тканей и квазигрупп. Все это сильно впечатляет Макса Айзиковича

и возбуждает его научный интерес. В частности, он замечает, что некоторые важные результаты по алгебраической теории тканей не имеют адекватной интерпретации в рамках классической геометрической теории тканей. Он заключает на этом основании, что необходимо развивать теорию многомерных тканей, которая изучалась в 30-е годы только в трёх работах Геррита Бола и С. С. Черна.

В 1969 М.А.Акивис публикует две статьи по этой тематике: Три-ткани многомерных поверхностей (Труды геометрического семинара, т. 2) и О каноническом разложении уравнений локальной аналитической квазигруппы (Докл. АН СССР, 188 (1969), № 5). В первой статье он детально изучает структурные уравнения многомерной три-ткани, которые были получены в 1936 г. Черном. Акивис вводит важное понятие трансверсальности, которое позволяет определить новые важные классы тканей: трансверсально-геодезические и паратактические. Он находит тензорные характеристики важнейших классов тканей: параллелизуемых, групповых, шестиугольных, трансверсально-геодезических, паратактических; детально изучает связность, естественно возникающую на три-тканях (сейчас она называется связностью Черна). В этот период Акивис полностью погрузился в геометрию тканей, и, вследствие своего необыкновенно глубокого понимания геометрии, получил элегантные и эффективные результаты, сразу ставшие классическими. Во второй из указанных статей Макс Айзикович с помощью изотопических преобразований приводит к каноническому виду ряд Тейлора уравнений локальной аналитической квазигруппы и находит условия, при которых эта квазигруппа допускает однопараметрические подквазигруппы. Идеологически эта работа близка к известной работе Александра Ивановича Мальцева "Аналитические лупы" (1955). Можно сказать, что каноническое разложение, найденное Акивисом, является наиболее широким обобщением ряда Кэмпбела-Хаусдорфа для групп Ли. Существование канонических координат в локальной аналитической лупе было доказано позже в совместной работе Макса Айзиковича и его ученика и соавтора Александра Михайловича Шелехова (Тверской государственный университет).

Обе указанные работы М.А.Акивиса открыли новую эру в развитии теории тканей и локальных аналитических луп и стали основой этих теорий. Идеи, содержащиеся в этих работах, еще не исчерпали себя и продолжают быть источником новых интересных результатов.

Одна из наиболее интересных идей состоит в том, теория многомерных три-тканей и гладких луп аналогична теории групп Ли и является обобщением последней. Поэтому естественно классифицировать эти объекты по степени их близости к группам Ли. Развивая этот подход, Аквис приходит к понятию замкнутой G -структуры порядка k , которое оказывается важным не только для теории тканей, но и для общей теории G -структур. В 1975 г. М.А.Аквис вводит замкнутые G -структуры как G -структуры, определяемые формально вполне интегрируемой системой внешних дифференциальных уравнений. Примерами замкнутых структур являются группы Ли, симметрические пространства и некоторые их обобщения, многие известные классы три-тканей и некоторые другие объекты. Порядок k указывает, насколько замкнутая G -структура близка к группе Ли, для которой $k = 2$.

В этот же период М.А.Аквис формулирует ряд новых проблем и предположений, которые оказывают решающее влияние на дальнейшее развитие теории тканей. Мы укажем только две из них, которые позднее были решены А.Шелеховым: 1) выяснить, является ли замкнутой G -структура, определяемая шестиугольной три-тканью; 2) доказать, что G -структура, определяемая многомерной три-тканью, будет замкнутой G -структурой порядка k тогда и только тогда, когда каноническое разложение координатных луп этой ткани вполне определяется джетом k -того порядка. М.А.Аквис находит инфинитезимальный аналог замкнутой G -структуры. Это так называемая W -алгебра (W от английского web – ткань), обобщающая понятие тройных систем Ли. W -алгебры и их обобщения, W_k -алгебры (введённые Аквисом и Шелеховым в 1985 г.) играют в теории тканей с замкнутой G -структурой такую же роль, как и алгебры Ли в теории групп Ли. Позднее, в 1986, Карл Хофманн и Карл Штрамбах развили теорию абстрактных W -алгебр и назвали их алгебрами Аквиса.

В 1973-74 Макс Айзикович ввел два новых класса три-тканей: изоклинные ткани и их частный случай, грассмановы ткани, которые одновременно являются изоклинно-геодезическими и которые определены на грассмановом многообразии прямых проективного пространства с помощью тройки гиперповерхностей.

Трудно переоценить важность грассмановых тканей для общей теории тканей. Во-первых, грассмановы ткани очень просто описываются геометрически, и, выбирая определяющие их гиперповерхности специальным образом, можно конструировать ткани с наперед заданными

свойствами. Во-вторых, Макс Айзикович доказал, что всякая изоклинная трансверсально-геодезическая три-ткань эквивалентна грассмановой три-ткани, а всякая изоклинная шестиугольная три-ткань эквивалентна такой грассмановой три-ткани, определяющие гиперповерхности которой принадлежат одной и той же гиперкубике (такие ткани позднее были названы алгебраическими). Когда в 1978 С.С.Черн и Филлип А. Гриффитс формулировали проблемы грассманизуемости и алгебраизуемости d -тканей, они не знали, что в 1973-75 эти проблемы были решены М.А.Акивисом и Владиславом Викторовичем Гольдбергом для $d = 3, 4$ и $d = n + 1$. А полное решение этих проблем было дано М.А.Акивисом в его работах 1980 и 1983 годов. Отметим, что в это же время методы теории тканей были использованы для решения важной проблемы алгебраической геометрии: найти необходимое и достаточное условие того, что d подмногообразий размерности r принадлежат одному и тому же алгебраическому подмногообразию размерности r и степени d .

В решении проблем грассманизуемости и алгебраизуемости d -тканей понятие почти грассмановой структуры, которая естественным образом возникает на ткани, играет существенную роль. М.А.Акивис определил почти грассманову структуру как расслоение конусов Сегре на многообразии, и это определение использовали в интегральной геометрии И.М.Гельфанд, С.Г.Гиндикин и другие авторы.

Все эти и другие не упомянутые здесь результаты М.А.Акивиса были собраны в обзорных статьях, депонированных рукописях и монографии *Geometry and Algebra of multidimensional three-webs* (Kluwer Academic Publishers, 1992), написанной им вместе с А.М.Шелеховым. Позднее эта книга была переиздана с некоторыми изменениями под названием *Многомерные три-ткани и их приложения* (Тверь, 2010).

В 1993 М.А.Акивис вместе с Борисом Абрамовичем Розенфельдом составили научную биографию Эли Картана (1869 - 1951), которая была опубликована в виде книги Американским математическим обществом. В 2007 эта книга была издана на русском языке.

В 1994 М.А.Акивис уезжает в Израиль, чтобы соединится с дочерью и внуками. Здесь он получает стипендию Шапира, которая присуждается ученым, активно занимающимся научной работой. Он продолжил свои исследования сначала в университете Бен Гуриона в Негеве, а с 1997 года – в Иерусалимском высшем Технологическом колледже (JST). После своего переезда в Израиль М.А.Акивис очень активно сотрудничает со своим

пожизненным соавтором Владиславом Гольдбергом (New Jersey Institute of Technology, США).

В течение 1994-96 годов Аквис и Гольдберг работают над монографией *Conformal differential geometry and its generalizations* (John Wiley Sons, 1996). В этой книге авторы систематически изучают дифференциальную геометрию конформного и псевдоконформного пространств и подмногообразий в этих пространствах; многообразия, снабженные конформной и псевдоконформной структурой; грассманианы и многообразия с грассмановой структурой. Так как грассмановы структуры имеются на многомерных тканях, авторы изучают также с этой точки зрения и ткани. В их книге суммированы исследования авторов по данной тематике за многие годы. Книга имела большой успех, 6 всемирно известных математиков опубликовали на нее блестящие рецензии. Первое издание было распродано полностью. В дополнение к этой монографии в 1993 – 2008 гг. М.А.Аквис опубликовал более 40 работ по различным проблемам дифференциальной геометрии. Ниже мы приводим их краткое содержание.

Конформная дифференциальная геометрия.

- Изучалась вещественная геометрия 4-мерных многообразий с конформной структурой различной сигнатуры. Рассматривались изотропные α - и β -слоения на этих многообразиях и были найдены условия интегрируемости и полуинтегрируемости таких структур. Эти исследования связаны с теорией твисторов Пенроуза и теорией пространств Эйнштейна в общей теории относительности.

- Аквис и Гольдберг развивают и дополняют некоторые результаты, полученные в упомянутой выше монографии. В частности, они доказывают конформную инвариантность изотропных геодезических псевдоконформных пространств и показывают, что линии кривизны четырехмерных многообразий, снабженных конформной структурой лоренцевой сигнатуры, являются изотропными геодезическими. Они связывают эти результаты с классификацией Петрова эйнштейновых пространств.

- Аквис и Гольдберг вводят новый конформный дифференциальный инвариант гиперповерхности в (псевдо)конформном пространстве. Они доказывают, что две гиперповерхности, находящиеся во взаимно однозначном соответствии, конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствие сохраняет этот инвариант.

- В серии статей эти же авторы изучают геометрию светоподобных гиперповерхностей в пространстве де Ситтера и отображение Дарбу канальных поверхностей в конформном пространстве.

- Они изучают конформные и почти грассмановы структуры и их интегрируемость и полуинтегрируемость более детально, чем в монографии.

Теория тканей и локальных дифференцируемых квазигрупп.

- В своей совместной работе Аквис и Шелехов изложили теорию тканей в терминах теории векторных полей и дифференциальных операторов. Этот метод дуален методу внешних форм, и именно он чаще всего используется в теоретической физике, где теория квазигрупп давно широко применяется.

- Хорошо известно, что лупы Бола тесно связаны с теорией симметрических пространств. Геометрически эта связь наиболее визуализирована для римановых метрик постоянной кривизны. Аквис в своих работах выявил связь три-тканей Бола с неевклидовыми геометриями.

- Аквис и Гольдберг написали большой обзор (133 стр.) для сборника Handbook of differential geometry (Elsevier Science B.V., 1999), в котором детально описали работы по теории тканей и локальных дифференцируемых квазигрупп. Эта работа организована таким образом, что может быть использована и как введение в теорию, и как энциклопедия. В ней изложена история исследований по теории тканей, указаны наиболее интересные направления теории и полученные результаты, сформулированы некоторые открытые проблемы. Кроме того, введены или уточнены некоторые понятия.

(1) Вместо термина "абстрактная ткань" авторы предлагают использовать термин "полная ткань", который в определенном смысле противоположен термину "локальная ткань" и который более точен.

(2) Они предложили уточнить термин "алгебраические ткани", различая алгебраизуемость в узком смысле (в смысле Черна и Гриффитса) и в широком смысле. Последнее относится к тканям, которые определены с помощью алгебраических многообразий, но не являются грассманизуемыми, и поэтому не являются алгебраизуемыми в смысле Черна и Гриффитса. В обзоре авторы излагают теорию замкнутых G -структур применительно к теории тканей (такие структуры вполне определяются элементами дифференциальной окрестности некоторого конечного порядка) и подчеркивают связь между алгебраизуемыми тканями и тканями, ассоциированными с почти грассмановой структурой.

- В другом обзоре 2000 года Аквис и Гольдберг обсуждают связь между локальными свойствами эквивалентных классов тканей и свойствами изотопии классов соответствующих координатных луп. Эта связь наиболее выпукло реализуется в виде соответствия между фигурами замыкания на ткани и тождествами в координатных лупах; между специальными классами локальных дифференцируемых луп и соответствующими бинарно-тернарными алгебрами Аквиса; между $(n+1)$ -тканями и локальными n -квазигруппами: между специальными классами 4-тканей и соответствующими алгебраическими условиями.

- В 2001 Аквис и Гольдберг решили известную проблему Валентина Даниловича Белоусова, сконструировав серию примеров неприводимых n -квазигрупп для любого $n > 3$.

- В 2004 они вместе с Валентином Васильевичем Лычагиным нашли условия линеаризуемости для плоских d -тканей при $d > 3$. Это решение известной проблемы Бляшке из его книги Введение в геометрию тканей (перевод которой был сделан Аквисом, см. выше).

- В 2006 г. в одном из наиболее престижных математических журналов, *Bulletin of the American Mathematical Society*, была опубликована совместная статья Аквиса и Гольдберга "Локальные алгебры дифференцируемой квазигруппы", в которой авторы суммируют исследования по теории дифференцируемых квазигрупп и их локальных алгебр, указывают связь этих исследований с некоторыми последними работами по этой тематике.

- В одной из своих последних работ о тканях Веронезе и Лагранжа Аквис и Гольдберг доказали, что непараллелизуемая ткань Веронезе $VW_t(n, r)$ существует только при $n = 3, r = 1$ и при $n = 2, r -$ произвольное; непараллелизуемая ткань Лагранжа $LLW_t(n, r)$ существует только при $n = 2, r -$ произвольное. При этом классы $VW_t(2, r)$ и $LLW_t(2, r)$ совпадают и образованы изоклинными подмногообразиями некоторой изоклинной три-ткани $W(3, 2, r)$.

В 2004 Аквис и Гольдберг продолжили работу над книгой по проективной дифференциальной геометрии. Они написали серию статей по многообразиям с вырожденным гауссовым отображением. Эти исследования были суммированы в монографии *Differential geometry of varieties with degenerate Gauss map* (Springer-Verlag, 2004). Вот наиболее важные результаты в этом направлении.

- Показано, что предположение Гриффитса-Харриса о структуре многообразия с вырожденным гауссовым отображением неполно. Как

доказали (в статьях и в книге) Акивис и Гольдберг, основные типы указанных многообразий включают в себя не только конусы и торсы, но и достаточно широкий класс гиперповерхностей, которые не являются конусами или торсами.

- В своих доказательствах Акивис и Гольдберг систематически использовали фокальные образы (фокальные гиперповерхности и фокальные конусы), ассоциированные с многообразием с вырожденным гауссовым отображением. Это позволило описать геометрию таких многообразий и провести их новую классификацию.

- Изучены сингулярности многообразий с вырожденным гауссовым отображением и найдены некоторые их новые свойства, в частности,

- 1) доказано, что гиперповерхности Сакстедера (Sacksteder) и Бургейна (Bourgain) совпадают;

- 2) найдены аффинные аналоги "цилиндрических теорем" Хартмана-Ниренберга;

- 3) установлена связь между гладкими кривыми проективной плоскости над двумерными алгебрами и многообразиями с вырожденным гауссовым отображением;

- 4) описаны новые классы многообразий с вырожденным гауссовым отображением (скрученные конусы).

- В статьях и книге Акивис и Гольдберг рассмотрели очень много примеров, часть которых (такие, как скрученные конусы и некоторые алгебраические поверхности в P^4) открыты ими впервые, другие (такие, как кубический симметроид в P^5 и его проекция в P^4) были известны ранее, но авторы рассмотрели их с новой точки зрения.

Было рассмотрено приложение многообразий с вырожденным гауссовым отображением к теории светоподобных поверхностей в пространстве де Ситтера; связь теории многообразий с вырожденным гауссовым отображением с теорией конгруэнций и псевдоконгруэнций использовалась для конструирования индуцированной связности на подмногообразиях проективных пространств и других пространств, снабженных проективной структурой; установлена связь между теорией многообразий с вырожденным гауссовым отображением с теорией гладких кривых на проективной плоскости над полной матричной алгеброй порядка 2, над алгебрами комплексных, дуальных и двойных чисел.

В 1993 - 2007 годах Акивис и Гольдберг представляли перечисленные выше результаты на многочисленных конференциях: 7 международная

конференция по геометрии (Израиль, 1995); Объединенное заседание Американского математического общества и израильского математического союза (УМІ, Израиль, 1995); 6, 7 и 10 Международные конференции по дифференциальной геометрии и ее приложениям (Чешская Республика, 1995, 1998, 2007); международная геометрическая конференция (Венгрия, 1996); Ежегодная встреча УМІ (Израиль, 1997); 3 Международная конференция по геометрии (Болгария, 1997); Международный Конгресс по геометрии в честь Паскуале Калапсо (Италия, 1998); Mile High конференция по квазигруппам, лупам и неассоциативным системам (Денверский университет, США, 2005); 7 и 9 Международные конференции по геометрии (Израиль, 1999, 2007); Международная конференция по геометрии "Одесса-2007". Работая в Московском институте стали и сплавов, Макс Айзикович прочитал много различных специальных курсов. В течение всего этого периода он вел научный семинар по теории тканей, на котором российскими и зарубежными математиками докладывались наиболее важные результаты, полученные в теории тканей и в смежных областях. Работая в ЖСТ в 1997-2004 гг., он прочел много новых спецкурсов и вел семинар для студентов и преподавателей ЖСТ. Учебник Тензорное исчисление, написанный М.А.Акивисом и В.В.Гольдбергом в 1969 г., был переиздан в России в 1972 и в 2003 гг. Перевод первых четырех глав этой книги был издан в США в 1972 г. (Prentice Hall) и переиздан в 1977 г. (Dover Publications). В 2003 вся книга была полностью переведена на английский Гольдбергом и издана в World Scientific. Эта книга стала настольным учебником и энциклопедией для многих инженеров, получила международное признание и цитируется во многих работах.

Используя идеи и результаты Макса Айзиковича, его ученики и коллеги решили ряд крупных проблем в теории тканей; вот лишь некоторые из них. Его друг и соавтор В.В.Гольдберг создал теорию $(n + 1)$ -тканей и решил ряд сложнейших задач, относящихся к проблеме ранга ткани. Вместе с Валентином Васильевичем Лычагиным они нашли условия линеаризации криволинейной три-ткани в терминах дифференциальных инвариантов ткани, решив так называемую "проблему анаморфозы", возникшую еще на рубеже 19-20 веков. А.Д. Иванов описал все четырехмерные ткани Бола. В.И.Бычек, В.Б.Лазарева, В.К.Драгунов и А.А.Уткин описали координатные три-ткани на поверхностях в пространствах с тем или иным кубическим абсолютном. В.В.Тимошенко описал три-ткани над коммутативными ассоциативными

алгебрами; В.П.Боцу – все четырехмерные шестиугольные три-ткани; С.А.Герасименко – многомерные $(n + 1)$ -ткани Бола; М.А.Андикян – три-ткани на касательных расслоениях. Н.В.Гвоздович описал инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей, Г.А.Клековкин изучил геометрию четырехмерных три-тканей, В.К. Восканян – геометрию криволинейных $(n + 1)$ -тканей на n -мерном многообразии. С.Н.Богданов изучал римановы метрики и симплектические структуры, ассоциированные с многомерными три-тканями. Л.М.Пиджакова рассмотрела ткани с постоянно ковариантным тензором кривизны, А.А.Дуюнова – ткани, определяемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В.Б.Лазарева и А.М.Шелехов описали все регулярные три-ткани из пучков окружностей (проблема В.Бляшке, 1950 г.). Шелехов положительно решил проблему Гронвола, сформулированную еще в 1912 г.: всякий локальный диффеоморфизм, переводящий прямолинейную нерегулярную три-ткань в такую же, является проективным преобразованием. Г.А.Толстихина рассмотрела идемпотентные квазигруппы, связанные с три-тканями. Она же существенно продвинула теорию тканей, образованных слоениями разных размерностей, основы которой были заложены в работах Аквиса и Гольдберга.

Макс Айзикович был необыкновенно великодушным и доброжелательным человеком. Его огромная эрудиция, внимательность и деликатное отношение к ученикам и коллегам, готовность обсуждать любые математические проблемы делали общение и сотрудничество с ним приятным и продуктивным; люди всех возрастов тянулись к нему. Он был блестящий учитель, подготовивший множество дипломников и аспирантов. Под его руководством 28 аспирантов защитили кандидатские диссертации, четверо – докторские. Он по-отечески заботился о своих аспирантах. Для них он был образцом достоинства, честности, упорства и прививал им любовь к науке. С волнением и восхищением мы наблюдали, как под его руководством молодые люди становились классными специалистами, которые самоотверженно любили прекрасную науку – геометрию.

Мы использовали в этой заметке некоторые тексты из юбилейных статей, посвященных Максиму Айзиковичу:

1. Макс Айзикович Аквис. Успехи математических наук, 48 (1993), № 3, 213-216.
2. А.Т. Фоменко, В.В. Гольдберг, В.Ф. Кириченко, В.В. Рыжков, А.М. Шелехов. Maks Aizikovich Akivis (к 70-летию и 50-летию научной

деятельности). *Webs and Quasigroups*, 1993, Tver, Tver State University, 4–8 (Англ.).

3. А.Т. Фоменко, Я. Фридман, В.В. Гольдберг, В.Ф. Кириченко, А.М. Шелехов. Maks Aizikovich Akivis (к 75-летию и 55-летию научной деятельности). *Webs and Quasigroups*, 1993, Tver, Tver State University, 7–11 (Англ.).

4. А.Т. Фоменко, В.В. Гольдберг, В.Ф. Кириченко, В.В. Лычагин, А.М. Шелехов. Maks A. Akivis (к 85-летию и 65-летию научной деятельности). Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе-2008", Одесса, 2008, 7–16 (Англ.).

5. А.Т. Фоменко, В.В. Гольдберг, В.Ф. Кириченко, В.В. Лычагин, А.М. Шелехов. Макс Айзикович Аквис (к 90-летию и 70-летию научной деятельности). От международного геометрического центра. Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе-2013", Одесса, 2008, 6–8.

В третьей из этих статей имеется список трудов М.А. Аквиса по 1999 год и список диссертаций, защищенных под его руководством. В написании юбилейных статей наиболее активное участие принимал В.В. Гольдберг, скончавшийся в 2011 году.

Приводим последние работы Макса Айзиковича, которые, возможно, еще не известны читателю.

1. Проективный аналог преобразований Егорова. *Фундаментальная и прикладная математика*, 16:1 (2010), 3-12.

2. Замкнутые G -структуры, определяемые три-тканями. Теория относительности, гравитация и геометрия. Труды международной конф. "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation", 1-6 ноября 2010, Казань. Казанский ун-т, 2010, с. 267-273 (совместно с А.М. Шелеховым). (Англ. перевод: Closed G -structures defined by three-webs. *Kazan Gos. Univ., Uchen. Zap., Ser. Fiz-Mat. Nauki*, 2011, v. 153, book 3, pp. 22-28.)

3. Метод Картана-Лаптева в теории многомерных три-тканей // *Фундамент. и прикл. матем.*, 2010, 16:1, 13–38 (совместно с А.М. Шелеховым). (Англ. перевод: Cartan-Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. *J. of Math. Sciences*, Sept. 2011, v. 177. n. 4, pp. 522-540.)

Все мы, прямо или косвенно, – ученики Макса Айзиковича. Память о нем, нашем друге и учителе, навсегда останется в наших сердцах.

А.Т. Фоменко, Московский государственный университет

В.Ф. Кириченко, Московский педагогический государственный университет

А.Г. Кушнер, ин-т проблем управления РАН

В.В. Лычагин, Университет Тромсе, Норвегия

А.М. Шелехов, Тверской государственный университет

Пам'яті Володимира Васильовича Шарка



7 жовтня 2014 р. у віці 65 років пішов із життя видатний математик і талановитий вчитель Володимир Васильович Шарко.

Він народився 25 вересня 1949 р. у с.м. Отиня, тепер Отинія Коломийського району Івано-Франківської обл. в сім'ї службовців. В 1959 р. батьки переїхали до м. Станиславів (нині Івано-Франківськ). Під їх впливом захоплення математикою формувалися у Володимира Васильовича з раннього дитинства. Велику роль у цьому зіграло те, що його батько, Василь Іванович Шарко, до другої світової війни був вчителем математики в старших класах середньої школи в м. Ізюм (Харківська обл.).

Після закінчення середньої школи №5 в м. Івано-Франківську він вступив до Київського державного університету ім. Тараса Шевченка. В 1973 році після завершення навчання на механіко-математичному факультеті був прийнятий до аспірантури Інституту математики Академії Наук УРСР. Його науковим керівником був професор Юрій Юрійович Трохимчук. В 1976 році в Інституті математики АН УРСР захистив кандидатську дисертацію, а в 1987 р. у Математичному інституті ім. В.А. Стеклова АН СРСР – докторську дисертацію за спеціальністю геометрія і топологія.

З 1976 р. життя Володимира Васильовича було нерозривно зв'язане з Інститутом математики НАН України. В 2001 році в Інституті математики був створений відділ топології і В.В. Шарко був обраний завідувачем цього відділу, а в 2007 р. він був призначений на посаду заступника директора з наукової роботи Інституту математики.

В. В. Шарко був провідним спеціалістом в області топології та її застосувань. Його перу належать біля 100 наукових робіт серед яких дві монографії з топології. 20 його учнів захистили кандидатські дисертації, троє з них також стали докторами наук.

В свої перших роботах В. В. Шарко суттєво розвинув теорію Морса побудувавши нові інваріанти ланцюгових комплексів і застосувавши їх до вивчення алгебраїчної природи неоднозв'язних многовидів. Зокрема він отримав необхідні та достатні умови існування мінімальних ланцюгових комплексів в гомотопічному типі, а також описав компоненти зв'язності просторів точних функцій Морса на неоднозв'язних многовидах.

Подальші інтереси Володимира Васильовича відносились до теорії динамічних систем. В спільних працях з академіком РАН А. Т. Фоменко ним було знайдено оцінки для числа замкнених орбіт гамільтонових систем на многовидах. Крім того В. В. Шарко детально дослідив структуру гладких функцій та векторних полів з ізольованими особливостями на поверхнях і

отримав умови їх топологічної еквівалентності, а також отримав незалежне доведення класифікації компонент зв'язності просторів функцій Морса на компактних поверхнях.

В останні роки основну увагу він приділяв застосуванню методів некомутативної геометрії до алгебраїчної топології та якісної теорії векторних полів на многовидах. Зокрема, В. В. Шарко побудував нові L^2 -інваріанти гільбертових комплексів і з їх допомогою отримав точні значення мінімально можливого числа замкнених орбіт відповідного індексу у цього класу векторних полів, а також довів, що ці числа є гомотопічними інваріантами многовиду.

За свої видатні наукові досягнення В.В. Шарко був нагороджений премією ім. Миколи Остроградського (1980 р.), преміями Крилова і Лаврентьєва Національної Академії Наук України (в 2005 р. та 2010 р., відповідно), Державною премією України у галузі науки і технології (2006 р.). 6 травня 2006 року на Загальних зборах Національної Академії Наук України В.В. Шарко був обраний членом-кореспондентом НАН України.

Володимир Васильович був дуже енергійною людиною і зробив багато для розвитку математики в Україні та за її межами. З 1987 року він працював професором Київського Національного Університету ім. Тараса Шевченка. Він також був заступником академіка-секретаря секції математики Національної Академії Наук України, членом Київського та Американського математичних товариств, заступником головного редактора Українського математичного журналу, членом редакційної колегії "Методів функціонального аналізу і застосувань", праць Міжнародного геометричного центру, а також Математичного бюлетеня Наукового товариства Шевченка.

Навіть в останній день життя він керував засіданням спеціалізованої вченої ради, на якому відбувся захист двох кандидатських дисертацій.

Пам'ять про Володимира Васильовича буде завжди жити в серцях всіх, хто його знав і любив.

Редакційна колегія,
Київське математичне товариство,
Колектив Інституту математики НАН України

Критерий топологической сопряженности двумерных однородных внутренних отображений

Игорь Юрьевич Власенко

Аннотация В настоящее время в задаче описания топологического строения и топологической классификации получено много результатов, относящихся к различным классам обратимых отображений — гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В то же время необратимые автоморфизмы, по сравнению с обратимыми, сравнительно не изучены. Отображения, отличные от голоморфных, и некоторых других специальных классов необратимых отображений, таких, как одномерные отображения отрезка, как правило, представляют собой “terra incognita” для задач топологической классификации. Голоморфные отображения одной комплексной переменной являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Однако и для них классификация даже полиномов второго порядка $z^2 + c$ является непростой задачей.

В данной работе описаны некоторые топологические свойства и дан критерий топологической сопряженности для некоторого класса разветвленных накрытий двумерной сферы, который является естественным обобщением класса внутренних отображений, у которых координатные функции являются однородными многочленами произвольной степени двух действительных переменных.

Ключевые слова внутренние отображения, классы топологической сопряженности, однородные отображения, цилиндр

УДК 517.938.5

Отображения из одного пространства в другое топологически классифицируются как классы топологической эквивалентности, т. е. замены координат гомеоморфизмами в образе и прообразе. В случае, когда отображение отображает пространство в себя, существуют и другие, более детальные способы классификации, дополнительно подразделяющие классы топологической эквивалентности, это классификация с точностью до левого или правого действия гомеоморфизмом и классификация с точностью до топологической сопряженности (т. е. описания свойств, инвариантных относительно сопряженности гомеоморфизмом¹).

Для классификации с точностью до топологической сопряженности получено много результатов, относящихся к различным классам обратимых отображений — гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В то же время необратимые автоморфизмы, по сравнению с обратимыми, сравнительно не изучены. Отображения, отличные от голоморфных, и некоторых других специальных классов необратимых отображений, таких, как одномерные отображения отрезка, как правило, представляют собой “terra incognita” для задач топологической классификации.

Голоморфные отображения одной комплексной переменной являются на сегодняшний день одним из самых изученных классов необратимых внутренних отображений. Однако и для них классификация даже полиномов второго порядка $z^2 + c$ является непростой задачей (см. [2]).

В этой работе для некоторого класса разветвленных накрытий двумерной сферы $\hat{\mathbb{C}}$ (и при этом неразветвленных накрытий вложенного цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \subset \hat{\mathbb{C}}$), который является естественным обобщением класса внутренних отображений, у которых координатные функции являются однородными многочленами произвольной степени двух действительных переменных, были изучены некоторые топологические инварианты сопряженности, описаны их свойства и дан критерий топологической сопряженности.

Предварительные сведения.

Внутренним отображением будем называть непрерывный открытый (образ любого открытого множества открыт) конечнократный (у каждой точки число прообразов конечно) эпиморфизм. Подробнее о внутренних отображениях см. [6].

¹ f и g топологически сопряжены, если \exists гомеоморфизм $h: fh = hg$. Подробнее см. [4].

Отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ назовем однородным порядка k , если $\forall t \geq 0$
 $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n f(t^k \bar{x}) = t^k f(\bar{x})$.

Пусть $\hat{\mathbb{C}}$ — двумерная сфера, являющаяся замыканием двумерного цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ точками $\bar{0}$ и ∞ , и $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — его внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\bar{0}$ и ∞ .

Заметим, что не всякое однородное отображение является внутренним. Например, однородное порядка 2 отображение $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ складывает блинчиком окрестность точки $\bar{0}$ и внутренним не является.

Обозначим через $O_f^+(x)$ положительную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x , т. е. множество $\{f^n(x) \mid n < 0\}$. Широкой траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.

Так как f — конечнократный эпиморфизм, то естественно эти траектории воспринимать как наборы из отдельных точек.

В отличие от гомеоморфизмов, для которых траектория точки в точности состоит из ее положительной и отрицательной полутраекторий, у внутренних отображений широкая траектория точки имеет и другие точки. Введем еще одно естественное подмножество широкой траектории точки, которое не нигде не пересекается с ее положительной и отрицательной полутраекториями, кроме как в самой точке.

Определение 1 *Нейтральным сечением траектории точки x назовем множество $\{f^{-n}(f^n(x)) \mid n \geq 0\}$. Обозначим ее через $O_f^\perp(x)$.*

Как легко видеть из определения, если среди образов x нет периодической точки, а f имеет в точках орбиты больше одного прообраза, то широкая траектория точки x распадается на бесконечное число нейтральных сечений, причем каждое нейтральное сечение состоит из бесконечного числа точек.

Определение 2 *Точка x называется блуждающей точкой f , если найдется такая ее окрестность U , что $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.*

Общие определения суперблуждающих и равномерно суперблуждающих даны в [3]. Для краткости изложения дадим здесь упрощенное определение, используя тот факт, что в построенных примерах блуждающее множество двусвязно и гомеоморфно цилиндру, а сужение рассматриваемых отображений на этот цилиндр является локальным гомеоморфизмом.

Определение 3 Точка x называется нейтрально блуждающей точкой f , если найдется такая ее связная окрестность U , что $\forall n \geq 0$ открытое множество $f^{-n}(f^n(U))$ распадается на компоненты связности такие, что сужение f на каждую компоненту связности является гомеоморфизмом и каждая компонента связности содержит в точности одну точку из множества $\{f^{-n}(f^n(x))\}$.

Определение 4 Точка x называется суперблуждающей точкой f , если она блуждающая и нейтрально блуждающая.

Обозначим через Ω множество неблуждающих (не являющихся блуждающими) точек. Обозначим через Ω^\perp множество нейтрально неблуждающих (не являющихся нейтрально блуждающими) точек. Заметим, что это замкнутые множества.

Определение 5 Блуждающая точка x называется регулярной, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x) - \delta$ -окрестность точки x , и $\exists N > 0$ такое, что $\forall k > N$ и $\forall k < -N$ $f^k(\delta(x)) \subset \epsilon(\Omega)$, где $\epsilon(\Omega) - \epsilon$ -окрестность множества Ω , $f^k(\delta(x)) -$ образ $\delta(x)$ при отображении f^k .

Множество регулярных точек открыто.

Критерий топологической сопряженности двумерных однородных внутренних отображений.

Напомним, что $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — внутреннее и однородное порядка $k > 1$ необратимое (степени > 1) отображение, не имеющее в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ особых точек, с точками ветвления $\bar{0}$ и ∞ .

Лемма 1 $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, $\forall t > 0$, нейтральные сечения $O^\perp(\bar{x})$ и $O^\perp(t\bar{x})$ подобны с центром подобия в $\bar{0}$.

Доказательство Достаточно показать, что $\forall t > 0 \forall \bar{y} \in O^\perp(\bar{x}) \ t\bar{y} \in O^\perp(t\bar{x})$,

Рассмотрим $\bar{y} \in O^\perp(\bar{x})$. По определению, $\exists n \geq 0 \ \bar{y} \in f^{-n}(f^n(\bar{x}))$. Обозначим $\bar{z} = f^n(\bar{x})$. Но в то же время $\bar{z} = f^n(\bar{y})$. Из-за однородности, $f^n(t\bar{x}) = t^{kn} f^n(\bar{x}) = t^{kn} \bar{z}$. Но по той же причине $f^n(t\bar{y}) = t^{kn} f^n(\bar{y}) = t^{kn} \bar{z}$. Из этого следует, что $f^n(t\bar{y}) = f^n(t\bar{x})$ и, следовательно, $t\bar{y} \in f^{-n}(f^n(t\bar{x}))$ и $t\bar{y} \in O^\perp(t\bar{x})$. Лемма доказана.

Лемма 2 У отображения f точки $\bar{0}$ и ∞ обладают открытыми бассейнами притяжения.

Доказательство Рассмотрим образ диска D_r , ограниченного окружностью S_r вокруг центра координат радиуса r под действием отображения f . Точка $\bar{0}$ — неподвижная, принадлежит внутренности диска D_r , а отображение f — внутреннее. Поэтому ее образ точка $\bar{0}$ тоже лежит во внутренности образа диска D_r . Граница образа диска D_r лежит в образе окружности S_r .

Рассмотрим образ окружности S_1 . Обозначим $d_1^{min} = \min \rho(O, f(S_1))$, $d_1^{max} = \max \rho(O, f(S_1))$, где ρ — евклидова метрика. Тогда $d_1^{max} \geq d_1^{min} > 0$, так как $f(S_1)$ — компактная кривая, не проходящая через точку $\bar{0}$.

Для $f(S_r)$ в силу подобия

$$d_r^{min} = \min \rho(O, f(S_r)) = r^k d_1^{min},$$

$$d_r^{max} = \max \rho(O, f(S_r)) = r^k d_1^{max}.$$

Тогда для $r < 1/d_1^{max}$ $d_r^{max} < r$, а для $r > 1/d_1^{min}$ $d_r^{min} > r$, что и дает утверждение леммы.

Лемма 3 *На каждом луче, исходящем из центра координат, лежит ровно одна точка, не принадлежащая бассейнам притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ .*

Доказательство Рассмотрим произвольный луч, исходящий из центра координат. бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ — открытые множества, луч — линейно связное множество, поэтому множество точек луча, не входящих в бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , не пусто.

Предположим, что в этом множестве найдется две различных точки p_1 и $p_2 \neq p_1$. Поскольку эти точки находятся на одном луче, то их координаты пропорциональны: $p_2 = tp_1$, $t > 0$, $t \neq 1$. Рассмотрим $f^n(p_1)$, $n > 0$. Так как p_1 не входит в бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , то норма $\|f^n(p_1)\|$ ограничена: $\exists C_1, C_2 > 0: C_2 > \|f^n(p_1)\| > C_1$.

Рассмотрим $f^n(p_2)$, $n > 0$. $\|f^n(p_2)\| = \|t^{kn} f^n(p_1)\| = t^{kn} \|f^n(p_1)\|$. Тогда $t^{kn} C_2 > \|f^n(p_2)\| > t^{kn} C_1$. Но, поскольку $t \neq 1$, отсюда следует, что в зависимости от того, что величина t больше или меньше 1, $f^n(p_2)$ стремится к $\bar{0}$ либо к ∞ при $n \rightarrow \infty$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4 *множество точек, не принадлежащих бассейнам притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , образует гомеоморфную окружности жорданову кривую, разделяющую бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ .*

Доказательство Обозначим множество точек, не принадлежащих бассейнам притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ через γ_1 . Бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞

по определению представляют собой открытые непересекающиеся множества. Соответственно, множество γ_1 , замкнуто, является перегородкой между этими бассейнами притяжения в \mathbb{R}^2 , и, как следует из доказательства леммы 2, ограничено. Следовательно, множество γ_1 — компакт.

Согласно лемме 3, на каждом луче, исходящем из центра координат, лежит ровно одна точка, не принадлежащая бассейнам притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ . Следовательно, точки из γ_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с лучами, исходящими из центра координат. Покажем, что эта биекция непрерывна, так как близкие точки находятся на близких лучах. Для этого зададим непрерывное отображение $p: \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow S^1$ формулой (в комплексных координатах) $p(z) = \frac{z}{|z|}$. Тогда его сужение $q = p|_{\gamma_1}: \gamma_1 \rightarrow S^1$ по определению непрерывно и является искомой биекцией.

Заметим, что множество лучей, исходящих из центра координат, гомеоморфно окружности и является компактом. Но непрерывная биекция компактов является гомеоморфизмом (см. например, [1]). Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма 5 *Жорданова кривая γ_1 , разделяющая бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , нейтрально инвариантна (т. е. с каждой своей точкой содержит ее нейтральное сечение).*

Доказательство Произвольный аттрактор в объединении со своим бассейном притяжения можно записать в виде $\cup_n f^{-n}(U)$, где U — строго притягивающая окрестность аттрактора ($\overline{f(U)} \subset U$). Из такой записи очевидно, что любой аттрактор в объединении со своим бассейном притяжения является нейтрально инвариантным множеством.

Поскольку γ_1 является дополнением к двум нейтрально инвариантным множествам, то она сама также является нейтрально инвариантным множеством.

Возьмем некоторый луч, выходящий из центра координат. Обозначим точку пересечения этого луча и γ_1 через p_1 . Тогда точки луча можно представить как $p_t = tp_1$, $t > 0$. Используя t как коэффициент подобия, построим набор кривых γ_t , $t > 0$, являющихся гомотетиями кривой γ_1 относительно начала координат. По построению это некоторое слоение цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Из лемм 1 и 4 следует, что это слоение нейтрально инвариантно.

Обозначим через S_ϕ гомеоморфное окружности множество лучей, исходящих из начала координат, где расстояние между двумя лучами равно

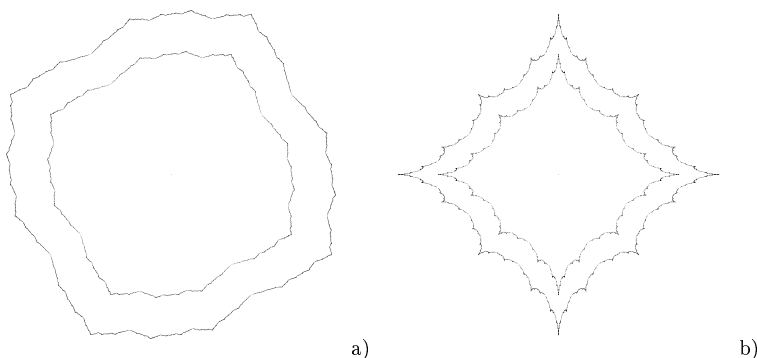


Рис. 1 γ_1 и $\gamma_{0.75}$ для $(x^2 + 0.5xy - y^2, -2xy)$ (a) и $(x^2 - y^2, -4xy)$ (b).

углу между ними, измеренному против часовой стрелки. Тогда f индуцирует на S_ϕ необратимое внутреннее отображение f_ϕ без особых точек, т. е. накрытие.

В [3] описан полный топологический инвариант накрытий окружности, и дан критерий их топологической сопряженности: два накрытия окружности одной и той же степени топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их там определенные топологические инварианты эквивалентны.

Теорема 1 (Критерий топологической сопряженности) Пусть f и g — внутренние и однородные порядка $k > 1$ необратимые отображения, не имеющие в цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ особых точек, с точками ветвления $\bar{0}$ и ∞ , и $f_\phi, g_\phi: S_\phi \rightarrow S_\phi$ — индуцированные ими внутренние отображения множества S_ϕ . f и g топологически сопряжены $\iff f_\phi$ и g_ϕ топологически сопряжены.

Доказательство Заметим, что $f_\phi: S^1 \rightarrow S^1$ можно задать формулой $f_\phi = q \circ f \circ q^{-1}$, где q — гомеоморфизм из доказательства леммы 4. Отсюда следует, что если f и g топологически сопряжены, то f_ϕ и g_ϕ топологически сопряжены. Покажем, что верно и обратное.

По жордановой кривой $\gamma_1(f)$ на цилиндре $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ строится слоение $\gamma_t(f)$, $t > 0$, на гомотетичные образы кривой $\gamma_1(f)$ относительно начала координат. Аналогично строится слоение $\gamma_t(g)$.

Заметим, что отображение-гомотетия с кривой $\gamma_p(f)$ на $\gamma_q(f)$ — это в точности покоординатное умножение на скаляр $\frac{q}{p}$. Это же отображение является и гомотетией с кривой $\gamma_p(g)$ на $\gamma_q(g)$. Обозначим покоординатное умножение на скаляр $\frac{q}{p}$ через $H^{p,q}$. Заметим, что $H^{p,q} \circ H^{q,p} = \text{Id}$ (соотношение 1).

Поскольку f_ϕ и g_ϕ топологически сопряжены, найдется гомеоморфизм $h_\phi: S_\phi \rightarrow S_\phi$, такой, что $h_\phi g_\phi = f_\phi h_\phi$. Лучи из множества S_ϕ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками жордановой кривой $\gamma_1(f)$, разделяющей бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ отображения f , и во взаимно однозначном соответствии с точками жордановой кривой $\gamma_1(g)$, разделяющей бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ отображения g . Тогда h_ϕ индуцирует гомеоморфизм этих жордановых кривых $h_1: \gamma_1(f) \rightarrow \gamma_1(g)$, такой, что в сужении на них имеем $h_1 g = f h_1$ (соотношение 2).

Продолжим этот гомеоморфизм на цилиндр $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$. Определим $h_p: \gamma_p(f) \rightarrow \gamma_p(g)$ как $h_p = H^{1,p} \circ h_1 \circ H^{p,1}$. Определим $h: \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ следующим образом: если $\bar{x} \in \gamma_p(f)$, то $h(\bar{x}) = h_p(\bar{x})$. Это определение корректно, так как при разных t кривые $\gamma_t(f)$ не пересекаются. Полученное отображение h взаимно однозначно и непрерывно по построению, и по непрерывности продолжается на точки $\bar{0}$ и ∞ : $h(\bar{0}) = \bar{0}$ и $h(\infty) = \infty$. Заметим, что по теореме Тихонова непрерывная биекция между компактами является гомеоморфизмом. Таким образом, так построенное отображение $h: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ является гомеоморфизмом $\hat{\mathbb{C}}$.

Проверим, что h — искомый сопрягающий гомеоморфизм. Достаточно проверить на $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Пусть $\bar{x} \in \gamma_p(f)$. Тогда $\exists \bar{x}_1 \in \gamma_1(f): \bar{x} = p\bar{x}_1 = H^{1,p}(\bar{x}_1)$. Заметим, что h коммутирует с гомотетиями $H^{p,q}$ по построению, а f и g коммутируют с $H^{p,q}$, поскольку они однородные, а $H^{p,q}$ — умножение на скаляр. Используя эту коммутативность, а также соотношения (1) и (2) выше, получим $h(f(\bar{x})) = h_p(f(\bar{x})) = h_p(f(H^{1,p}(\bar{x}_1))) = h_p(H^{1,p}(f(\bar{x}_1))) = H^{1,p}(h_1(H^{p,1}(H^{1,p}(f(\bar{x}_1)))))) = H^{1,p}(h_1(f(\bar{x}_1))) = H^{1,p}(g(h_1(\bar{x}_1))) = g(H^{1,p}(h_1(H^{p,1}(\bar{x})))) = g(h_p(\bar{x})) = g(h(\bar{x}))$.

Таким образом, $h(f(\bar{x})) = g(h(\bar{x}))$ и f и g топологически сопряжены с помощью h . Теорема доказана.

Топологические свойства двумерных однородных внутренних отображений.

Рассмотрим внутреннее отображение $f_\phi: S_\phi \rightarrow S_\phi$. Для f_ϕ возникает следующая дихотомия: либо $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, либо $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$. Пусть d — степень отображений f и f_ϕ . Согласно результатам из [3], в этом случае f_ϕ топологически сопряжено стандартному растягивающему отображению $E_d = d \cdot \varphi \pmod{2\pi}$, у которого нейтральное сечение каждой точки всюду плотно в S_ϕ .

Используя [3] и теорему и леммы выше, сразу получим следующее.

Следствие 1 *Если у индуцированного отображением f на S_ϕ внутреннего отображения f_ϕ выполнено $\Omega^\perp(f_\phi) = S_\phi$, то*

1. жорданова кривая, которая разделяет бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , состоит из нейтрально неблуждающих неблуждающих точек;
2. замыкания нейтральных сечений точек цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ являются замкнутыми жордановыми кривыми, которые образуют естественное слоение цилиндра $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$;
3. точки, притягивающиеся к $\bar{0}$ и ∞ , являются нейтрально неблуждающими блуждающими точками;
4. бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ обладают фундаментальными окрестностями II рода (определение 4.91 из [3]);
5. Пусть отображение f сохраняет ориентацию. Тогда отображение f топологически сопряжено голоморфному отображению z^d ;
6. Пусть отображение f обращает ориентацию. Тогда отображение f топологически сопряжено антиголоморфному отображению \bar{z}^d .

Рассмотрим оставшийся случай, когда $\Omega^\perp(f_\phi) \neq S_\phi$. Жорданова кривая, которая разделяет бассейны притяжения точек $\bar{0}$ и ∞ , в этом случае может содержать и блуждающие точки, которые, однако, по определению не будут регулярными. Также, в этом случае у отображения f появятся суперблуждающие точки: согласно лемме 1, точки, притягивающиеся к $\bar{0}$ и ∞ , являются нейтрально неблуждающими блуждающими точками, если их луч принадлежит $\Omega^\perp(f_\phi)$, и суперблуждающими в другом случае.

Список литературы

1. Александров, П. С.: Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977, 368 стр.
2. Cabrera, C.: On the classification of laminations associated to quadratic polynomials. J. Geom. Anal. 18, no. 1, 29–67 (2008).
3. Власенко И. Ю.: Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 101. Інститут математики НАН України. Київ, 2014, 225 стр.
4. Кузаконь, В. М., Кириченко, В. Ф., Пришляк, О. О.: Гладкі многовиди: геометричні та топологічні аспекти. Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Том 97, Інститут математики НАН України, Київ, 2013, 500 стр.
5. Стоилов, С.: О топологических принципах теории аналитических функций. М., Мир, 1964, 228 стр.
6. Трохимчук, Ю. Ю.: Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. Інститут математики НАН України. Київ, 2008, 538 стр.

Игорь Юрьевич Власенко

Институт математики НАНУ, Киев, Украина

E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Igor Yu. Vlasenko

On the topological conjugacy of two-dimensional homogeneous inner mappings

For a class of branched coverings of the two-dimensional sphere the criterion of

the topological conjugacy is given and some properties are listed. The class is a generalization of a class of inner mappings having homogeneous polynomials as their coordinate functions.

Псевдосферическая поверхность в \mathbb{R}^4 не допускает двух различных преобразований Бьянки

В. А. Горькавый Е. Н. Невмержицкая

Аннотация Доказано, что если псевдосферическая поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 , не лежащая ни в каком $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, допускает преобразование Бьянки, то это преобразование Бьянки единственно.

Ключевые слова Псевдосферическая поверхность, преобразование Бьянки, орициклические координаты, сопряженная сеть

УДК 514

1 Введение

Данная работа посвящена проблематике обобщения классической теории двумерных преобразований Бьянки-Беклунда псевдосферических поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 на случай двумерных поверхностей в многомерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. Указанная тематика была инициирована работами Ю.А. Аминова и А. Сыма [1]-[2], а затем получила развитие в работах авторов, см., например, [6]-[11], и обзор [12]. Проведенные исследования показали, что, с одной стороны, часть классических результатов успешно переносится на случай поверхностей в \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, тогда как, с другой стороны, некоторые результаты уже перестают быть верными, чем и объясняется интерес к этому направлению.

С аналитической точки зрения, псевдосферические поверхности в \mathbb{R}^3 и их геометрические преобразования Бьянки-Беклунда интерпретируются

в терминах решений уравнения синус-Гордона и их специальных преобразований, также называемых преобразованиями Бьянки-Беклунда, см. [13]. Поэтому обобщение рассматриваемой теории на случай псевдосферических поверхностей в \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, при соответствующей аналитической интерпретации, может привести к нахождению аналогов уравнения синус-Гордона, что вызывает дополнительный интерес с точки зрения современной теории интегрируемых систем.

В развиваемом нами подходе обобщение понятия преобразования Бьянки для двумерных поверхностей в \mathbb{R}^4 носит геометрический характер и опирается на следующее определение, дословно воспроизводящее соответствующее определение из классической теории для поверхностей в \mathbb{R}^3 [13], [14].

Определение 1. Диффеоморфизм поверхностей $\psi : F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ в \mathbb{R}^4 называется *преобразованием Бьянки-Беклунда*, если он удовлетворяет трем свойствам:

(B_1) прямые в \mathbb{R}^4 , соединяющие соответствующие точки на F^2 и \tilde{F}^2 , касаются обеих поверхностей;

(B_2) расстояние между соответствующими точками на F^2 и \tilde{F}^2 постоянно и равно l_0 ;

(B_3) касательные плоскости поверхностей F^2 и \tilde{F}^2 в соответствующих точках ортогональны.¹

Ранее было установлено, что, как и в классическом трехмерном случае, если две поверхности в \mathbb{R}^4 соединены преобразованием Бьянки, то тогда обе поверхности являются псевдосферическими, т.е. имеют постоянные отрицательные гауссовы кривизны $K = \tilde{K} = -1/l_0^2$ [6]. Кроме того, преобразование Бьянки псевдосферических поверхностей в \mathbb{R}^4 , как и в \mathbb{R}^3 , допускает простое описание с применением орициклических координат [7], ср. [1], [3].

С другой стороны, между поведением поверхностей в \mathbb{R}^3 и в \mathbb{R}^4 , с точки зрения преобразований Бьянки, имеется и существенное различие. Так, каждая псевдосферическая поверхность в \mathbb{R}^3 допускает непрерывное однопараметрическое семейство различных преобразований Бьянки. В то же время псевдосферические поверхности в \mathbb{R}^4 в ситуации общего положения вообще не допускают преобразований Бьянки [1], [6]-[7]. Псевдосферические поверхности в \mathbb{R}^4 , допускающие преобразования Бьянки и не лежащие в $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, образуют очень специальный класс псевдосферических поверхностей в \mathbb{R}^4 –

¹ В более общем случае, когда речь идет о преобразовании Беклунда, условие ортогональности в (B_3) заменяется на условие постоянства угла $\omega \in (0, \pi/2]$ между касательными плоскостями поверхностей F^2 и \tilde{F}^2 в соответствующих по диффеоморфизму $\psi : F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$ точках.

в [7] дано полное описание таких поверхностей и их преобразований Бьянки в терминах решений некоторой специальной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Непосредственно в данной работе мы рассматриваем вопрос о том, сколько именно различных преобразований Бьянки может допускать произвольная псевдосферическая поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 . Основным результатом является

Теорема 1 Пусть F^2 – регулярная класса C^k , $k \geq 6$, поверхность в \mathbb{R}^4 , не лежащая ни в каком $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Тогда F^2 допускает не более одного преобразования Бьянки.

Из доказанного утверждения вытекает корректность понятия пара псевдосферических поверхностей в \mathbb{R}^4 , связанных инволютивным преобразованием Бьянки. Аналогичная ситуация имеет место, например, для пар изотермических поверхностей в \mathbb{R}^3 , связанных преобразованием Кристоффеля. Аналитическое объяснение подобного феномена для изотермических поверхностей было предложено в рамках современной теории интегрируемых систем [5]. Было бы интересным реализовать аналогичный подход, с применением интегрируемых систем, и для картановых псевдосферических поверхностей в \mathbb{R}^4 .

Далее мы представим доказательство приведенного утверждения, рассмотрение носит локальный характер.

2 Преобразование Бьянки и внутренняя геометрия

Пусть F^2 – регулярная поверхность в \mathbb{R}^4 , заданная радиус-вектором $r = r(u, v)$. Обозначим через $g = \langle dr, dr \rangle = g_{ij} du^i du^j$ первую фундаментальную форму поверхности, Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля, n_1 и n_2 – ортонормированный базис нормалей на F^2 , $L^\sigma = \langle d^2r, n_\sigma \rangle = L_{ij}^\sigma du^i du^j$ – соответствующие вторые фундаментальные формы, $\mu_1 = \langle \partial_u n_1, n_2 \rangle$ и $\mu_2 = \langle \partial_v n_1, n_2 \rangle$ – коэффициенты кручения.

В силу теоремы Аллендорфера о снижении коразмерности, поверхность с ненулевой кривизной в \mathbb{R}^4 принадлежит некоторому $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ тогда, и только тогда, когда ее точечная коразмерность не превосходит 1. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что точечная коразмерность поверхности равна 2, т.е.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_{11}^1 & L_{12}^1 & L_{22}^1 \\ L_{11}^2 & L_{12}^2 & L_{22}^2 \end{pmatrix} \equiv 2, \quad (1)$$

это в точности означает, что F^2 не лежит ни в каком $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

Если поверхность F^2 допускает преобразование $\psi : F^2 \rightarrow \tilde{F}^2$, удовлетворяющее условию (B_1) , то тогда F^2 является либо линейчатой, либо картановой, см. [6]-[7], [13]. Линейчатые поверхности в \mathbb{R}^4 были рассмотрены в [8], никакая из таких поверхностей не допускает преобразований, удовлетворяющих вместе с (B_1) и условиям (B_2) - (B_3) . Поэтому поверхность F^2 обязана быть картановой, т.е., по определению, имеет точечную коразмерность $\nu \equiv 2$ и несет на себе сопряженную сеть. Обратим внимание, что упомянутая сопряженная сеть на F^2 определена однозначно², поскольку сопряженность координатных линий сети подразумевает их одновременную сопряженность относительно обеих вторых фундаментальных форм L^1 и L^2 , линейно независимых в силу условия (1).

Не уменьшая общности, можно считать, что локальные координаты (u, v) на F^2 специализированы таким образом, что координатные линии $u = const$ и $v = const$ как раз и образуют сопряженную сеть. Это означает, что в рассматриваемой параметризации обе вторые фундаментальные формы являются диагональными

$$L_{12}^1 \equiv 0, \quad L_{12}^2 \equiv 0. \quad (2)$$

Отметим, что параметризация $r(u, v)$ поверхности F^2 сопряженными координатами (u, v) является, вообще говоря, уже гладкой класса C^{k-1} . При этом остается свобода в выборе шкалирующей замены координат $\hat{u} = f(u)$, $\hat{v} = h(v)$, очевидно сохраняющей сопряженную сеть координатных линий.

Для поверхности F^2 построим преобразования $\psi_1 : F^2 \rightarrow \tilde{F}_1^2$ и $\psi_{-1} : F^2 \rightarrow \tilde{F}_{-1}^2$, задаваемые формулами

$$\tilde{r} = r - \frac{1}{\Gamma_{12}^2} \partial_u r \quad (3)$$

и

$$\tilde{r} = r - \frac{1}{\Gamma_{12}^1} \partial_v r. \quad (4)$$

соответственно. Следуя классической терминологии, преобразования ψ_1 и ψ_{-1} называются *первым преобразованием Лапласа* и *минус первым преобразованием Лапласа* поверхности F^2 . Оба этих преобразования удовлетворяют условию двойного касания (B_1) , что проверяется дифференцированием

² Этим поверхности в \mathbb{R}^4 существенно отличаются от поверхностей в \mathbb{R}^3 , поскольку каждая поверхность в \mathbb{R}^3 несет на себе множество различных сопряженных сетей.

(3)-(4) с применением формул Вейнгартена и с учетом условия сопряженности координатных линий (2). Более того, если какое-либо преобразование рассматриваемой поверхности F^2 удовлетворяет условию (B_1) , то тогда это преобразование описывается либо в виде (3), либо в виде (4), см. [13], [6]-[7].

Рассмотрим пару поверхностей F^2 , \tilde{F}_1^2 и связывающее их преобразование ψ_1 , заданное формулой (3). Как отмечалось, указанное преобразование удовлетворяет условию (B_1) , проанализируем выполнимость условий (B_2) и (B_3) . Для расстояния l между соответствующими точками F^2 и \tilde{F}_1^2 получаем из (3) следующее элементарное выражение:

$$l^2 = \frac{g_{11}}{(\tilde{\gamma}_{12}^2)^2}. \quad (5)$$

Так же легко показать, что для угла ω между $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$ имеет место формула³

$$\cos \omega = \frac{\Gamma_{11}^2}{\sqrt{(\Gamma_{11}^2)^2 + \frac{g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \sum_{\sigma} (L_{11}^{\sigma})^2}} \quad (6)$$

Поэтому условие (B_2) записывается в виде

$$l_0^2 (\Gamma_{12}^2)^2 = g_{11}. \quad (7)$$

а условие (B_3) – в виде

$$\Gamma_{11}^2 \equiv 0. \quad (8)$$

Аналогично, рассматривая преобразование ψ_{-1} , заданное формулой (4), получаем, что условия (B_2) - (B_3) для ψ_{-1} принимают вид

$$l_0^2 (\Gamma_{12}^1)^2 = g_{22}, \quad (9)$$

$$\Gamma_{22}^1 \equiv 0. \quad (10)$$

Подводя итог, можем сделать следующий промежуточный вывод. Если рассматриваемая картанова поверхность F^2 в \mathbb{R}^4 , параметризованная сопряженными координатами, удовлетворяет обе пары условий (7)-(8) и (9)-(10),

³ Взаимное расположение пары двумерных подпространств в \mathbb{R}^4 определяется двумя углами – стационарными значениями углов между векторами из одного и другого подпространств [3], [4]. Поскольку, благодаря выполнению условия двойного касания B_1 , плоскости $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$ пересекаются по прямой, соединяющей точки P и \tilde{P} , один из двух стационарных углов между этими плоскостями равен нулю, а второй стационарный угол – это и есть ω , он определяется как угол между векторами в $T_P F^2$ и $T_{\tilde{P}} \tilde{F}_1^2$, ортогональными к прямой $P\tilde{P}$.

то тогда F^2 допускает в точности два различных преобразования Бьянки, и эти преобразования задаются в виде (3)-(4). Если выполнена только одна из пар условий (7)-(8) или (9)-(10), то F^2 допускает в точности одно преобразование Бьянки, и это преобразование задается в виде (3) или (4) соответственно. Если же не выполнена ни одна из пар условий (7)-(8) и (9)-(10), то тогда F^2 не допускает преобразований Бьянки.

Условия (7)-(10) имеют внутренне-геометрический смысл и накладывают определенные ограничения на сопряженную сеть координатных линий u , v на F^2 и, как следствие, на саму поверхность F^2 .

Лемма 1 *Поверхность $F^2 \subset \mathbb{R}^4$ удовлетворяет условиям (7)-(10) тогда, и только тогда, когда, с точностью до шкалирующего преобразования сопряженных координат $\hat{u} = f(u)$, $\hat{v} = h(v)$, метрика поверхности F^2 имеет вид*

$$ds^2 = \frac{l_0^2}{u^2 v^2 (uv + 2)^2} (v^2 (du)^2 - 2uv(uv + 1) dudv + u^2 (dv)^2). \quad (11)$$

Доказательство Условие (8) в терминах коэффициентов g_{ij} имеет вид:

$$g_{11} \cdot \partial_u g_{12} - \frac{1}{2} g_{11} \cdot \partial_v g_{11} - \frac{1}{2} g_{12} \cdot \partial_u g_{11} = 0,$$

то есть,

$$\partial_u \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} = \partial_v \sqrt{g_{11}}.$$

Как следствие, существует функция $\varphi(u, v)$ такая, что $\sqrt{g_{11}} = \partial_u \varphi$ и $\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} = \partial_v \varphi$, т.е.

$$g_{11} = (\partial_u \varphi)^2, \quad g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi. \quad (12)$$

Условие (7) в терминах g_{ij} записывается в виде

$$-\frac{1}{2} g_{12} \cdot \partial_v g_{11} + \frac{1}{2} g_{11} \cdot \partial_u g_{22} = (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) \sqrt{g_{11}} \frac{1}{l_0}. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (13), получаем:

$$\frac{1}{2} \partial_u g_{22} - \partial_{uv} \varphi \partial_v \varphi = (g_{22} - (\partial_v \varphi)^2) \partial_u \varphi \frac{1}{l_0},$$

то есть,

$$\partial_u (g_{22} - (\partial_v \varphi)^2) = 2(g_{22} - (\partial_v \varphi)^2) \partial_u \varphi \frac{1}{l_0}.$$

Полученное равенство имеет место тогда и только тогда, когда существует функция $f(v)$ такая, что

$$g_{22} = (\partial_v \varphi)^2 + e^{2\frac{\varphi}{l_0^2}} f^2(v).$$

Мы можем избавиться от $f(v)$, сделав шкалирующее преобразование $v \rightarrow \tilde{v}$ такое, что $d\tilde{v} = \pm f(v)dv$. Поэтому, не уменьшая общности, можем сразу положить $f(v) = 1$.

Как следствие, метрика рассматриваемой картановой поверхности F^2 будет иметь вид

$$g_{11} = (\partial_u \varphi)^2, \quad g_{12} = \partial_u \varphi \partial_v \varphi, \quad g_{22} = (\partial_u \varphi)^2 + e^{2\frac{\varphi}{l_0^2}}, \quad (14)$$

т.е. получаем метрику плоскости Лобачевского $ds^2 = (d\varphi)^2 + e^{2\frac{\varphi}{l_0^2}} (dv)^2$ кривизны $K \equiv -\frac{1}{l_0^2}$ в орициклических координатах: координатные линии $v = const$ являются параллельными геодезическими, а их ортогональные траектории $\varphi = const$ являются орициклами.

Подставляя в (9)-(10) найденные выше выражения (14) для g_{ij} , получаем следующие уравнения для функции $\varphi(u, v)$:

$$l_0^2 (\partial_{uv} \varphi)^2 - 2l_0 \partial_{uv} \varphi \partial_u \varphi \partial_v \varphi - (\partial_u \varphi)^2 e^{2\frac{\varphi}{l_0^2}} = 0, \quad (15)$$

$$l_0 \partial_{vv} \varphi - 2(\partial_v \varphi)^2 - e^{2\frac{\varphi}{l_0^2}} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) можно переписать в виде

$$\partial_{vv} e^{-2\frac{\varphi}{l_0^2}} + 2\frac{1}{l_0^2} = 0,$$

а его решением будет функция

$$\varphi = -\frac{l_0}{2} \ln \left(\frac{h_1(u) - (v + h_2(u))^2}{l_0^2} \right), \quad (17)$$

где $h_1(u) > 0$ и $h_2(u)$ – произвольные функции. Подставим полученное выражение для φ в оставшееся уравнение (15):

$$(h_1')^2 - 4(h_2')^2 h_1 = 0.$$

Решение можно записать в виде $h_1 = (h_2 + C)^2$, где C – константа интегрирования, от которой можно избавиться с помощью замены $v \rightarrow v - C$. Подставляя $h_1 = (h_2)^2$ в (17), находим:

$$\varphi = -\frac{l_0}{2} \ln \left(\frac{h_2(u)^2 - (v + h_2(u))^2}{l_0^2} \right). \quad (18)$$

Возвращаясь к формулам (14), получаем следующие выражения для коэффициентов метрики рассматриваемой поверхности F^2 :

$$g_{11} = l_0^2 \frac{(h_2')^2}{(v + 2h_2)^2}, \quad g_{12} = l_0^2 \frac{h_2'(v + h_2)}{(v + 2h_2)^2}, \quad g_{22} = l_0^2 \frac{h_2^2}{v^2(v + 2h_2)^2}.$$

Легко заметить, что функция $h_2(u)$ отвечает свободе в выборе шкалирующего преобразования $u = u(\tilde{u})$, сохраняющего сопряженность координат u и v . Удобно положить $h_2 = 1/u$. Тогда коэффициенты g_{ij} примут следующий симметричный вид, который и указан в формулировке леммы:

$$g_{11} = \frac{l_0^2}{u^2(v + 2)^2}, \quad g_{12} = -\frac{l_0^2(uv + 1)}{uv(v + 2)^2}, \quad g_{22} = \frac{l_0^2}{v^2(uv + 2)^2}. \quad (19)$$

Обратно, если коэффициенты g_{ij} первой фундаментальной формы поверхности F^2 заданы выражениями (19), то тогда непосредственным вычислением символов Кристоффеля можно убедиться в выполнении условий (7)-(10). Лемма доказана.

Заметим, что из представленного доказательства вытекает следующее очевидное

Следствие 1 *Поверхность $F^2 \subset \mathbb{R}^4$ удовлетворяет (7)-(10) тогда, и только тогда, когда F^2 имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну $K \equiv -\frac{1}{l_0^2}$, а семейства координатных линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ сопряженной сети на F^2 представлены семействами параллельных геодезических на F^2 .*

Обратим внимание, что в ходе доказательства Леммы 1 мы воспользовались упомянутой ранее свободой в выборе шкалирующего преобразования сопряженных координат на F^2 . При этом параметризация поверхности сопряженными координатами после такого шкалирования будет уже, вообще говоря, гладкой класса C^{k-2} .

3 Фундаментальные уравнения теории поверхностей

Предположим теперь, что поверхность F^2 допускает два различных преобразования Бьянки. Как отмечалось выше, это эквивалентно тому, что F^2 допускает параметризацию сопряженными координатами так, что выполнены условия (7)-(10). В силу Леммы 1 это означает, что поверхность F^2 может быть параметризована сопряженными координатами (u, v) так, что ее метрика примет вид (11).

Детерминант матрицы коэффициентов первой квадратичной формы поверхности F^2 равен

$$\det g = -\frac{l_0^4}{uv(uv+2)^3}, \quad (20)$$

поэтому область определения Ω сопряженных координат (u, v) принадлежит одно из двух следующих областей, переводящихся друг в друга преобразованием $u \rightarrow -u, v \rightarrow -v$:

$$\Omega_1 = \{(u, v) \in R^2 | u > 0, v < 0, uv + 2 > 0\},$$

$$\Omega_2 = \{(u, v) \in R^2 | u < 0, v > 0, uv + 2 > 0\}.$$

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что $\Omega \subset \Omega_1$.

Запишем фундаментальные уравнения для поверхности F^2 в указанной параметризации с учетом (1), (2), (11):

уравнение Гаусса

$$L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2 = \frac{l_0^2}{uv(uv+2)^3}, \quad (21)$$

уравнения Кодацци

$$v(uv+2)(L_{11}^2 \mu_2 - \partial_v L_{11}^1) + L_{11}^1 = 0, \quad (22)$$

$$v(uv+2)(L_{11}^1 \mu_2 + \partial_v L_{11}^2) - L_{11}^2 = 0, \quad (23)$$

$$u(uv+2)(L_{22}^2 \mu_1 - \partial_u L_{22}^1) + L_{22}^1 = 0, \quad (24)$$

$$u(uv+2)(L_{22}^1 \mu_1 + \partial_u L_{22}^2) + L_{22}^2 = 0, \quad (25)$$

уравнение Риччи

$$l_0^2 (\partial_v \mu_1 - \partial_u \mu_2) + (uv+1)(uv+2)(L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2) = 0. \quad (26)$$

Если сложить уравнение (22), умноженное на $-L_{11}^1$, с уравнением (23), умноженным на L_{11}^2 , то получим

$$\partial_v ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2) = \frac{2}{v(uv+2)} ((L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2), \quad (27)$$

откуда следует, что имеет место представление

$$(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 = -l_0^2 \frac{v}{uv+2} (p_1(u))^2, \quad (28)$$

где $p_1(u)$ – произвольная положительная функция, гладкая класса C^{k-4} . Аналогичным образом из уравнений (24)-(25) вытекает, что

$$(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 = l_0^2 \frac{u}{uv+2} (p_2(v))^2, \quad (29)$$

где $p_2(v)$ – произвольная положительная функция, гладкая класса C^{k-4} . Как следствие равенств (28)-(29), мы можем записать следующее представление для коэффициентов вторых квадратичных форм поверхности F^2 :

$$L_{11}^1 = l_0 \frac{\sqrt{-v}}{\sqrt{uv+2}} p_1 \cos \alpha, \quad L_{11}^2 = l_0 \frac{\sqrt{-v}}{\sqrt{uv+2}} p_1 \sin \alpha; \quad (30)$$

$$L_{22}^1 = l_0 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{uv+2}} p_2 \cos \beta, \quad L_{22}^2 = l_0 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{uv+2}} p_2 \sin \beta, \quad (31)$$

где $\alpha(u, v)$ и $\beta(u, v)$ – произвольные функции, гладкие класса C^{k-4} . В виду формул (30)-(31), уравнения Кодацци сведутся к двум уравнениям

$$\mu_1 = -\partial_u \beta, \quad \mu_2 = -\partial_v \alpha, \quad (32)$$

которые мы можем рассматривать как выражения для определения коэффициентов кручения μ_1 и μ_2 .

В результате остаются уравнение Гаусса и уравнение Риччи, которые можно записать, используя функцию $\omega = \alpha - \beta$, в следующем виде:

$$\cos \omega = -\frac{1}{p_1 p_2 (uv+2)^2 (\sqrt{u})^3 (\sqrt{-v})^3}, \quad (33)$$

$$\partial_{uv} \omega - p_1 p_2 \sqrt{u} \sqrt{-v} (uv+1) \sin \omega = 0. \quad (34)$$

Лемма 2 У системы (33)-(34) не существует гладкого класса C^2 решения $\omega(u, v)$, $p_1(u) > 0$, $p_2(v) > 0$.

Доказательство Выражая $\omega(u, v)$ из (33) и подставляя в (34), после ряда громоздких вычислений получаем следующее дифференциальное уравнение для функций $q_1(u) = (p_1(u))^2$, $q_2(v) = (p_2(v))^2$:

$$\begin{aligned} & \frac{dq_1}{du} \frac{dq_2}{dv} u^3 v^3 (uv+2)^6 + \\ & + \frac{dq_1}{du} q_2 u^3 v^2 (7uv+6)(uv+2)^5 + \frac{dq_2}{dv} q_1 u^2 v^3 (7uv+6)(uv+2)^5 + \\ & + q_1 q_2 u^2 v^2 (49u^2 v^2 + 68uv + 36)(uv+2)^4 - 16 = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Дифференцируя (35) отдельно по u и по v , получим два уравнения

$$\frac{d^2 q_1}{du^2} u^3 v^2 (uv + 2)^5 \left(\frac{dq_2}{dv} v (uv + 2) + (7uv + 6)q_2 \right) + \dots = 0, \quad (36)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dv^2} u^2 v^3 (uv + 2)^5 \left(\frac{dq_1}{du} u (uv + 2) + (7uv + 6)q_1 \right) + \dots = 0, \quad (37)$$

где троеточиями обозначены полиномы от $u, v, q_1, q_2, \frac{dq_1}{du}, \frac{dq_2}{dv}$.

Дифференцируя (35) по u и затем по v , получим уравнение вида

$$A \frac{d^2 q_1}{du^2} \frac{d^2 q_2}{dv^2} + B \frac{d^2 q_1}{du^2} + C \frac{d^2 q_2}{dv^2} + D = 0, \quad (38)$$

где A, B, C, D – полиномы от $u, v, q_1, q_2, \frac{dq_1}{du}, \frac{dq_2}{dv}$.

Если

$$\frac{dq_2}{dv} v (uv + 2) + (7uv + 6)q_2 \neq 0, \quad \frac{dq_1}{du} u (uv + 2) + (7uv + 6)q_1 \neq 0$$

в какой-то точке из Ω , то в окрестности этой точки мы можем найти $\frac{d^2 q_1}{du^2}$ и $\frac{d^2 q_2}{dv^2}$ из (36)-(37), а затем подставить найденные выражения в (38). Оказывается, что это приводит к соотношению

$$\left(\frac{dq_2}{dv} v (uv + 2) + (7uv + 6)q_2 \right) \left(\frac{dq_1}{du} u (uv + 2) + (7uv + 6)q_1 \right) = 0, \quad (39)$$

что противоречит предположению. Поэтому хотя бы один из множителей в (39) обязан обращаться в ноль тождественно в Ω .

Предположим, например, что

$$\frac{dq_2}{dv} v (uv + 2) + q_2 (7uv + 6) \equiv 0.$$

Записывая это соотношение как линейный полином по u и приравнивая к нулю коэффициенты этого полинома, получаем:

$$\frac{dq_2}{dv} v^2 + 7vq_2 \equiv 0,$$

$$\frac{dq_2}{dv} 2v + 6q_2 \equiv 0.$$

Как следствие, $q_2 \equiv 0$, что противоречит требованию $q_2 > 0$. Лемма доказана.

Таким образом, мы получаем, что если рассматриваемая поверхность F^2 допускает два различных преобразования Бьянки, то ей обязательно отвечает гладкое класса C^2 решение $\omega(u, v)$, $p_1(u) > 0$, $p_2(v) > 0$ системы (33)-(34). С другой стороны, в виду Леммы 2, такого решения у системы (33)-(34) не существует. Полученное противоречие и завершает доказательство Теоремы.

Список литературы

1. Aminov Yu.A., Sym A., *On Bianchi and Backlund transformations of two-dimensional surfaces in E^4* , Math. Phys., An., Geom., 3, 75-89, (2000)
2. Aminov Yu.A., Sym A., *On Bianchi and Backlund transformations of two dimensional surfaces in four dimensional Euclidean space*, Backlund and Darboux transformations, The geometry of solitons, AARMS-CRM Workshop, Halifax, NS, 1999, Canada, June 4-9, (publ. by) Amer. Math. Soc., 91-93 (2001)
3. Aminov Yu.A., *Geometry of Submanifolds*, Gordon and Breach Science Publ., Amsterdam, (2001)
4. Борисенко А.А., Николаевский Ю.А., *Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий*, Успехи математических наук, 46:2, 41-83, (1991)
5. Cieslinski J., Goldstein P., Sym A., *Isothermic surfaces in E^3 as soliton surfaces*, Phys. Lett., A 205, 1, 37-43, (1995).
6. Gorkavyy V., *On pseudo-spherical congruencies in E^4* , Математическая физика, анализ, геометрия, 10:4, 498-504, (2003)
7. Горькавый В.А., *Конгруэнции Бьянки двумерных поверхностей в E^4* , Математический сборник, 196:10, 79-102, (2005)
8. Gorkavyy V.O., Nevmerzhytska O.M., *Ruled surfaces as pseudo-spherical congruencies*, Журнал математической физики, анализа, геометрии, 5:3, 359-374, (2009)
9. Горькавый В.А., Невмержицкая Е.Н., *Аналог преобразования Бьянки для двумерных поверхностей в пространстве $S^3 \times R^1$* , Математические заметки, 89:6, 833-845, (2011)
10. Gorkavyy V., Nevmerzhytska O., *Pseudo-spherical submanifolds with degenerate Bianchi transformation*, Results in Mathematics, 60:1, 103-116, (2011)
11. Gorkavyy V., *An example of Bianchi transformation in E^4* , Журнал математической физики, анализа, геометрии, 8:3, 240-247, (2012)
12. Горькавый В.А., *Обобщение преобразования Бьянки-Бэклунда псевдосферически поверхностей*, Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, т.126 (2014), с.191-218
13. Tenenblat K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Pitman Monographs and Surveys in Pure Appl. Math., V.93, Longman Sci. Techn., Harlow, Essex; Wiley, New York, (1998)
14. Tenenblat K., Terng C.-L., *Backlund's theorem for n-dimensional submanifolds of R^{2n-1}* , Annals of Mathematics, 111, 477-490, (1980)

В. А. Горькавый

ФТИНТ им.Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина

E-mail: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Е. Н. Невмержицкая

ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

E-mail: ennev@ukr.net

Vasyl Gorkavyu, Olena Nevmerzhitska

A pseudo-spherical surface in \mathbb{R}^4 does not admit two different Bianchi transformations

It is proved that if a pseudo-spherical surface in four-dimensional Euclidean space \mathbb{R}^4 , which does not belong to $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, admits a Bianchi transformation, then this Bianchi transformation is unique.

О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II

Александр Анатольевич Кадубовский

Аннотация В работе рассматривается класс гладких функций с тремя критическими значениями на двумерной сфере S^2 , у которых кроме M локальных максимумов и m локальных минимумов только одна критическая точка типа седло. Для функций из указанного класса представлен полный топологический инвариант, с помощью которого для произвольных натуральных M и m установлены явные формулы для подсчета числа топологически неэквивалентных (в двух различных аспектах) таких функций.

Ключевые слова smooth function, saddle critical point, surface, topological classification, 2-color chord diagram, non-crossing partition, Narayana number.

УДК 517.938.5 + 519.514.17

*Посвящается памяти
моего научного руководителя
Владимира Васильевича Шарко*

Введение

Представленная статья является логическим завершением цикла авторских работ [14]–[17], посвященных получению явных формул для подсчета точного числа топологически неэквивалентных (в двух различных аспектах) гладких функций определенного класса на двумерной сфере S^2 .

Пусть $(N, \partial N)$ – гладкая поверхность с краем ∂N (∂N может быть). Обозначим через $C^\infty(N)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на N с краем $\partial N = \partial_- N \cup \partial_+ N$, все критические точки которых изолированы и лежат во внутренности N на одной линии уровня, а на компонентах связности края $\partial_- N$ ($\partial_+ N$) они принимают одинаковое значение a (b).

Функции f и g из $C^\infty(N)$ называют *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизмы $h : N \rightarrow N$ и $l : R^1 \rightarrow R^1$ (l сохраняет ориентацию), такие что $g = l \circ f \circ h^{-1}$. Если h сохраняет ориентацию, функции f и g будем называть *O-топологически эквивалентными*. В дальнейшем также будем полагать, что N – замкнутая ориентируемая поверхность.

Пусть $f \in C^\infty(N)$, а $x_0 \in N$ – ее изолированная критическая точка, не являющаяся локальным экстремумом. Если топологический тип линий уровня при переходе через x_0 меняется (не меняется), то такую точку x_0 (следуя [18], [11]) называют существенно (соответственно несущественной) критической точкой.

Хорошо известно [5], что в некоторой окрестности своей существенно критической точки x_0 функция f топологически эквивалентна функции $f_n(x; y) = \operatorname{Re}(x + iy)^n + c_n$, причем $n \geq 2$ (непрерывной заменой координат приводится к виду $f_n = \operatorname{Re}z^n + c_n$). Более того, локально, функции классифицируются целым числом – индексом Пуанкаре. Напомним, что индексом Пуанкаре $\operatorname{ind}^f(x_0)$ критической точки x_0 функции f называют индекс Пуанкаре ее поля градиента $\operatorname{grad} f$ для некоторой римановой метрики. Также известно, что для функции $f = \operatorname{Re}z^n$ индекс Пуанкаре равен $\operatorname{ind}^f(0) = 1 - n$, а для каждой критической точки на поверхности $\operatorname{ind}^f(x_0) \leq 1$ [5].

Число k существенно критических точек x_j функции f вместе со значениями n_j (показателями в представлениях f в виде $f_j = \operatorname{Re}z^{n_j} + c_{n_j}$ в окрестностях x_j) называют топологическим сингулярным типом функции f .

В работе В.В. Шарко [18] изучен вопрос топологической эквивалентности функций из класса $C^\infty(N)$. Ним установлено, что существует лишь конечное число топологически неэквивалентных функций с фиксированным сингулярным типом, равное числу неизоморфных цветных спин-графов, расширения которых гомеоморфны поверхности N . Однако неизвестно сколько таких классов эквивалентности. В общем случае эта задача оказалась очень сложной и остается нерешенной к этому времени проблемой.

1 Постановка задачи

Если же ограничиться рассмотрением класса функций $C_{M,m}(N_g)$ с тремя критическими значениями на замкнутой ориентируемой поверхности N_g (рода $g \geq 0$), у которых кроме M локальных максимумов и m локальных минимумов **только одна** существенно критическая точка x_0 (в дальнейшем – вырожденная критическая точка типа седло), то упомянутая выше задача несколько упрощается.

А именно, как следует из работы [4], для функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ топологическим инвариантом является индекс Пуанкаре единственной критической точки x_0 типа седло, который равен

$$\text{ind}^f(x_0) = 2 - 2g - M - m.$$

Полным топологическим инвариантом для функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ является, так называемая, 2-цветная O -диаграмма с

$$n = 2g - 1 + M + m$$

хордами, которая содержит M черных (белых) и m белых (черных) циклов. Кроме того, в работах автора [11], [12] полностью решена задача о подсчете числа O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{1,1}(N_g)$, $g \geq 1$.

Однако, в общем случае (для произвольных натуральных M , m и $g \geq 0$), подсчет числа топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ также оказался достаточно сложной комбинаторной задачей. Даже для функций на двумерной сфере S^2 вопрос оставался открытым.

Формулы (в явном виде) для подсчета числа O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(S^2)$ ранее были известны только для начальных M и произвольных $n \geq M$ (или, что тоже, для начальных M и натуральных $m = n + 1 - M$), а именно:

для $M = 1, 2, 3, 4$ и $\forall n \geq M$ формулы были получены в работе [14];

для $M = 5, 6$ и $\forall n \geq M$ – в работе [15];

для $M = 7, 8$ и $\forall n \geq M$ – в работе [16];

для $M = 9$ и $\forall n \geq M$ – в работе [17].

Модернизации полного топологического инварианта для функций из класса $C_{M,m}(S^2)$, возможным его интерпретациям, а также получению формул для подсчета точного числа O -топологически (топологически) неэквивалентных таких функций для произвольных $M, m \in \mathbb{N}$ и посвящена данная статья.

2 2-цветные хордовые диаграммы: основные понятия и определения

Напомним (напр. [3]), что хордовой диаграммой порядка n или, коротко, n -диаграммой называют конфигурацию на плоскости, состоящую из окружности, $2n$ точек на ней (являющихся вершинами правильного $2n$ -угольника) и n хорд, соединяющих указанные точки. Хордовые диаграммы называют изоморфными, если одну можно получить из другой в результате поворота. Диаграммы называют эквивалентными, если их можно совместить в результате поворота, зеркальной симметрии, или же их композиции.

Определение 1 Окружность с $2n$ точками на ней (являющихся вершинами правильного $2n$ -угольника), дуги которой поочередно раскрашены в два цвета (черный и белый) и фиксированной нумерацией указанных вершин (числами от 1 до $2n$ по часовой стрелке) будем называть 2-цветным $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-цветной n -диаграммой будем называть хордовую n -диаграмму, построенную на основе 2-цветного $2n$ -шаблона.

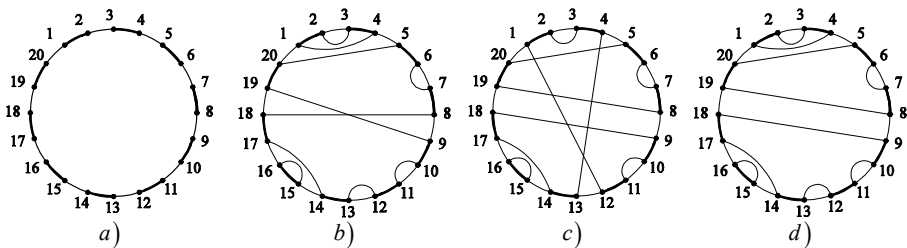


Рис. 1

- a) 2-цветный 20-шаблон;
- b) N -диаграмма (с 10 хордами), у которой 7 белых и 3 черных циклов;
- c) O -диаграмма (с 10 хордами), у которой 6 белых и 3 черных циклов;
- d) планарная O -диаграмма (с 10 хордами), у которой 7 белых и 4 черных циклов

Определение 2 2-цветную n -диаграмму, которая не содержит (содержит) хорд, соединяющих вершины с номерами одинаковой четности, будем называть O -диаграммой (N -диаграммой) — рис. 1 b), c). Множество 2-цветных O -диаграмм с n хордами обозначим через \mathfrak{S}_n^O .

Определение 3 b -циклом (w -циклом) диаграммы из класса \mathfrak{S}_n^O будем называть чередующуюся последовательность хорд и черных (соответственно белых) дуг, которые образуют гомеоморфный образ (ориентированной) окружности — рис. 1 b) — d).

Пусть λ – число черных и белых циклов диаграммы из \mathfrak{S}_n^O . Тогда родом диаграммы следует считать (напр. [3], [13]) целое число g , определяемое соотношением

$$g = \frac{n - \lambda + 1}{2}. \quad (1)$$

Определение 4 *Диаграмму из класса \mathfrak{S}_n^O , род которой равен нулю, будем называть диаграммой минимального рода или, коротко, планарной диаграммой – рис. 1 d). Подмножество планарных диаграмм из класса \mathfrak{S}_n^O , которые содержат точно k ($1 \leq k \leq n$) черных (или, что тоже, $n - k + 1$ белых) циклов обозначим $\mathfrak{S}_{k,n}$.*

Хорошо известно (напр. из [3], [2]), что n -диаграмма (по сути из \mathfrak{S}_n^O) является планарной тогда и только тогда, когда она не содержит пересекающихся хорд.

Определение 5 *Как и в случае (нераскрашенных) хордовых n -диаграмм, 2-цветные диаграммы будем называть*

изоморфными, *если их можно совместить в результате поворота (по часовой стрелке) около общего центра;*

эквивалентными, *если их можно совместить в результате зеркальной симметрии и/или поворота около общего центра.*

Известно (напр. из [3], [11]), что n -диаграмму (в том числе из \mathfrak{S}_n^O) можно отождествить с ее «склежкой» – подстановкой-инволюцией α , столбцы которой – суть номера вершин, инцидентных одной хорде. Так, например, диаграмме на рис. 1 d) соответствует подстановка

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 20 & 7 & 6 & 19 & 18 & 11 & 10 & 13 & 12 & 17 & 16 & 15 & 14 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Более того, как следует из работ [3], [11], циклическая группа C_{2n}^* порядка n , порожденная перестановкой

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n - 2 & 2n - 1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

действует на множестве склеек диаграмм из \mathfrak{S}_n^O как **сопряжение**, а именно:

диаграммы $D_1(\alpha_1)$ и $D_2(\alpha_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует $\gamma \in C_{2n}^*$ такая, что $\alpha_1 = \gamma^{-1} \circ \alpha_2 \circ \gamma$.

С действием диэдральной группы на различных классах хордовых n -диаграмм (на классах соответствующих склеек) можно ознакомиться, например, в работах [3], [13], [2].

3 Исчисление топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на 2-сфере

Как было отмечено ранее, для функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ полным топологическим инвариантом является 2-цветная O -диаграмма с $n = 2g - 1 + M + m$ хордами, которая содержит M черных (белых) и m белых (черных) циклов.

Обозначим через $\mathfrak{S}_{M,m}^n$ класс 2-цветных диаграмм указанного типа.

Тогда, как следует из работ [4] и [11], имеют место утверждения

Теорема А Число O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ равно числу неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{M,m}^n$.

Теорема В Число топологически неэквивалентных функций из класса $C_{M,m}(N_g)$ равно числу неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{M,m}^n$.

Очевидно, что для функций из класса $C_{M,m}(S^2)$ (на двумерной сфере S^2) полным топологическим инвариантом является 2-цветная O -диаграмма с $n = M + m - 1$ хордами, которая содержит точно M черных (белых) и m белых (черных) циклов. С учетом формулы (1), род такой диаграммы равен нулю. Поэтому функциям из класса $C_{M,m}(S^2)$ соответствуют именно планарные 2-цветные O -диаграммы.

Таким образом, если через $C_{k,n-k+1}(S^2)$ обозначить класс гладких функций на 2-сфере, у которых кроме k локальных максимумов и $n - k + 1$ локальных минимумов только одна вырожденная критическая точка типа седло (индекс Пуанкаре которой равен $1 - n$), то имеют место утверждения

Предложение 1 Число O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ равно числу неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Предложение 2 Число топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ равно числу неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Пример 1 Среди неизоморфных диаграмм, приведенных на рис. 2:

1 из класса $\mathfrak{S}_{1,4}$, 2 из класса $\mathfrak{S}_{2,4}$, 2 из класса $\mathfrak{S}_{3,4}$, 1 из класса $\mathfrak{S}_{4,4}$.

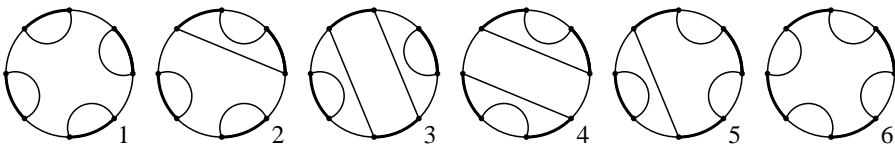


Рис. 2 все неизоморфные (неэквивалентные) 2-цветные планарные диаграммы $n = 4$

Таким образом, существует 2 топологически неэквивалентные функции из класса $C_{2,3}(S^2)$, 2 – из класса $C_{3,2}(S^2)$, 1 из $C_{1,4}(S^2)$ и 1 из $C_{4,1}(S^2)$.

4 Диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ и «non-crossing partition»

Определение 6 Разбиением $\pi_{k,n}$ множества $[n] = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ (partition of $[n]$ with k blocks) называют совокупность k непустых, попарно не пересекающихся подмножеств $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ множества $[n]$, объединение которых есть $[n]$. Подмножества π_i принято называть блоками $\pi_{k,n}$.

Разбиение $\pi_{k,n}$ зачастую представляют в виде $\pi = \pi_1/\pi_2/\dots/\pi_k$. Причем, принято считать, что внутри каждого блока элементы расположены в порядке возрастания, а сами блоки расположены в порядке возрастания их минимальных элементов (напр. [7]).

Определение 7 Разбиение называют «без самопересечений» (non-crossing partition) или же, коротко, планарным, если не существует элементов $a < b < c < d$ таких, что a и c содержатся в одном, b и d в другом блоке. Множество всех таких разбиений обозначим как $NCP(n)$, а подмножество разбиений, содержащих точно k блоков, — через $NCP_{k,n}$.

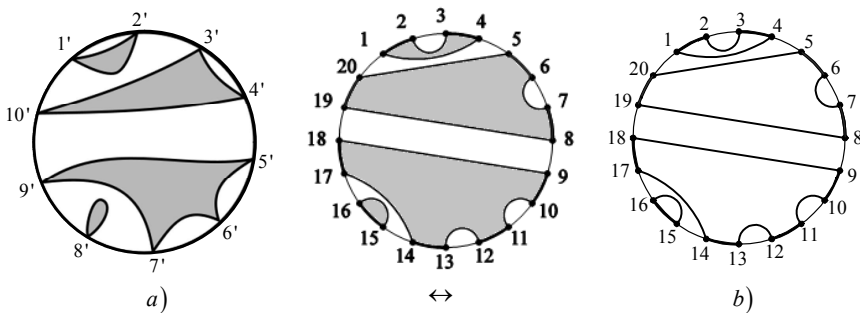


Рис. 3 а) представление планарного разбиения $\pi = (1, 2)(3, 4, 10)(5, 6, 7, 9)(8)$ в виде круговой диаграммы с 10 вершинами; б) 2-цветная O -диаграмма рода 0 (построенная на 2-цветном $2n$ -шаблоне, $n = 10$), соответствующая разбиению π

В виду биективности, которая очевидным образом возникает между разбиениями из множества $NCP_{k,n}$ и диаграммами из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, 2-цветную планарную диаграмму и соответствующее ей разбиение в дальнейшем будем отождествлять.

Более того, число неизоморфных (а также неэквивалентных) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ равно числу неизоморфных (соответственно неэквивалентных) круговых диаграмм, отвечающих разбиениям из множества $NCP_{k,n}$. Причем в понятие изоморфности (эквивалентности) последних вкладывается такой же смысл как и для 2-цветных диаграмм (напр. [2]).

5 Перечисление диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$

Введем следующие обозначения:

$P(n; k)$ – число диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, то есть $P(n; k) = |\mathfrak{S}_{k,n}| = |NCP_{k,n}|$;

$P^*(n; k)$ – число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$;

$P^{**}(n; k)$ – число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$.

Известно, например из [8], что $|NCP_{k,n}|$ равна числу Нараяна $N(n; k)$ («Narayana number»), которое определяется по формуле

$$N(n; k) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1}. \quad (2)$$

Так как $\forall n \in N$ справедливо равенство $N(n; 1) = N(n; n) = 1$, то

$$P^*(n; 1) = P^*(n; n) = 1, \quad (3)$$

$$P^{**}(n; 1) = P^{**}(n; n) = 1. \quad (4)$$

Более того, так как

$$N(n; k) = \frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} = \frac{1}{n} C_n^{n-k+1} \cdot C_n^{n-k} = N(n; n-k+1), \quad (5)$$

то для натуральных $n \geq k \geq 2$ имеют место и соотношения

$$P^*(n; k) = P^*(n; n-k+1), \quad (6)$$

$$P^{**}(n; k) = P^{**}(n; n-k+1). \quad (7)$$

5.1 Число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$

Лемма 1 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число неизоморфных (неэквивалентных относительно действия циклической группы порядка n) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^*(n; k) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} C_n^k \cdot C_n^{k-1} + \sum_{j|(n;k), j \neq 1} \varphi(j) \left(\frac{n-k}{j} + 1 \right) \frac{1}{\frac{n}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}-1} + \sum_{j|(n;k-1), j \neq 1} \varphi(j) \left(\frac{k-1}{j} + 1 \right) \frac{1}{\frac{n}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}+1} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}} \right), \quad (8)$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера (количество натуральных чисел, не превосходящих q и взаимно простых с ним); $(s; t)$ – наибольший общий делитель чисел s и t ; а суммирование во втором и третьем слагаемых ведется по всем делителям (исключая 1-цу) чисел $(n; k)$ и $(n; k-1)$ соответственно.

Замечание 1 Учитывая (5), соотношение (8) можно представить в виде

$$P^*(n; k) = \frac{1}{n} \left(N(n; k) + \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \left(\frac{n-k}{j} + 1 \right) \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{n-k}{j} + 1\right) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \left(\frac{k-1}{j} + 1 \right) \cdot N\left(\frac{n}{j}; \frac{k-1}{j} + 1\right) \right). \quad (9)$$

Доказательство Все диаграммы из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, которые инвариантны относительно поворота на некоторый угол $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$, $j \neq 1$ («самосовмещаются» при повороте около центра шаблона на угол ω_j в направлении движения часовой стрелки) разобьем на диаграммы двух типов.

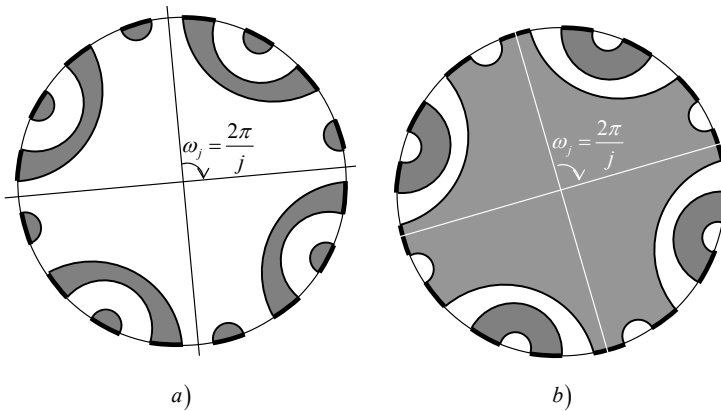


Рис. 4 а) планарная 16-диаграмма I типа; б) планарная 16-диаграмма II типа

I типа – те, которые не содержат черного цикла («черного полигона»), инвариантного относительно поворота на некоторый угол. Очевидно, что в этом случае число j должно быть общим делителем чисел n и k – рис. 1 а).

II типа – те, которые содержат черный цикл («черный полигон»), инвариантный относительно поворота на некоторый угол. Очевидно, что в этом случае число j должно быть общим делителем чисел n и $k - 1$ – рис. 1 б).

Тогда, применяя лемму Бернсайда, величину $P^*(n; k)$ можно представить в виде

$$P^*(n; k) = \frac{1}{n} \left(N(n; k) + \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; k; j) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; k; j) \right), \quad (10)$$

где $\rho_1(n; k; j)$, $\rho_2(n; k; j)$ — число диаграмм I и II типа соответственно, которые инвариантны относительно поворота на угол ω_j ($j \neq 1$).

Так как $N(n; k) = N(n; n - k + 1)$, $P^*(n; k) = P^*(n; n - k + 1)$, то с учетом того факта, что для произвольных натуральных $a > b$ справедливо равенство $(a; b) = (a; a - b)$, имеем

$$n \cdot P^*(n; k) = N(n; k) + \left(\sum_{j|(n;k), j \neq 1} \phi(j) \rho_1(n; k; j) + \sum_{j|(n;k-1), j \neq 1} \phi(j) \rho_2(n; k; j) \right) = \quad (11)$$

$$= n \cdot P^*(n; n - k + 1) = N(n; n - k + 1) + \left(\sum_{\substack{j|(n;n-k+1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; n - k + 1; j) + \sum_{\substack{j|(n;n-k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; n - k + 1; j) \right) = \\ = N(n; k) + \left(\sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; n - k + 1; j) + \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; n - k + 1; j) \right) \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) получаем равенство

$$\sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; k; j) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; k; j) = \\ = \sum_{\substack{j|(n;k), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_2(n; n - k + 1; j) + \sum_{\substack{j|(n;k-1), \\ j \neq 1}} \varphi(j) \rho_1(n; n - k + 1; j), \quad (13)$$

которое позволяет выдвинуть гипотезу о том, что при (допустимых) фиксированных n, k, j величины $\rho_1(n; k; j)$ и $\rho_2(n; n - k + 1; j)$, а также $\rho_2(n; k; j)$ и $\rho_1(n; n - k + 1; j)$ совпадают.

Убедимся в справедливости выдвинутой гипотезы.

С учетом введенной терминологии и обозначений, величина $\rho_1(n; k; j)$ определяет число всех тех диаграмм (из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$), которые инвариантны относительно поворота на угол $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$ и не содержат черного цикла («черного полигона»), инвариантного относительно поворота на угол ω_j . Но тогда каждая такая диаграмма (с k черными и $n - k + 1$ белыми циклами) содержит белый цикл («белый полигон»), инвариантный относительно поворота на угол ω_j .

Если черные дуги перекрасить в белый цвет, а белые дуги — в черный цвет, то каждая из упомянутых выше диаграмм будет

- инвариантной относительно поворота на такой же угол ω_j ;
- содержать $n - k + 1$ черных циклов, среди которых один черный цикл («черный полигон»), инвариантный относительно поворота на угол ω_j .

Тогда очевидно, что при фиксированных n, k, j выполняется равенство

$$\rho_1(n; k; j) = \rho_2(n; n - k + 1; j), \quad (14)$$

а, с учетом (13), — и равенство

$$\rho_2(n; k; j) = \rho_1(n; n - k + 1; j). \quad (15)$$

Таким образом, если $\rho_1(n; k; j)$ обозначить как $\rho(n; k; j)$, то, с учетом (14) и (15), имеет место равенство

$$\rho_2(n; k; j) = \rho(n; n - k + 1; j). \quad (16)$$

И поэтому доказательство леммы сводится к доказательству того факта, что число $\rho_1(n; k; j)$ (всех) диаграмм I типа, инвариантных относительно поворота на угол ω_j (неподвижных относительно действия соответствующего элемента циклической группы), можно вычислить по формуле

$$\rho_1(n; k; j) = \left(\frac{n - k}{j} + 1 \right) \frac{1}{n} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j} - 1}. \quad (17)$$

В работе [10] (Theorem 7.2) установлено, что при $j \geq 2$ число $[N(n; k')]$ разбиений из класса $NCP_{k,n}$, которые имеют ранг k' (в наших терминах $k = n - k'$ блоков) и являются инвариантными относительно поворота на угол $\omega_j = \frac{2\pi}{j}$, можно вычислить по формуле

$$[N(n; k')] = \frac{n - k'}{n} \cdot \left(C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k'}{j}} \right)^2. \quad (18)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_1(n; k; j) &= [N(n; n - k)] = \frac{n - (n - k)}{n} \cdot \left(C_{\frac{n}{j}}^{\frac{n - k}{j}} \right)^2 = \frac{k}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{n - k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{n - k}{j}} = \\ &= \frac{k}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} = \frac{k}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot \frac{\frac{n - k}{j} + 1}{\frac{k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j} - 1} = \left(\frac{n - k}{j} + 1 \right) \cdot \frac{1}{n} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j} - 1}. \end{aligned}$$

Следствие 1 Для произвольного простого n число неизоморфных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить посредством соотношений

$$P^*(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} C_n^k C_n^{k-1} + \frac{n-1}{n}, & k = 1; n \\ \frac{1}{n^2} C_n^k C_n^{k-1}, & k \neq 1; n. \end{cases} \quad (19)$$

Замечание 2 Следует отметить, что начальные значения величины $P^*(n, k)$ для натуральных $1 \leq k \leq n \leq 9$ совпадают с членами последовательности A209805 («Triangle read by rows: $T(n, k)$ is the number of k -block noncrossing partitions of n -set up to rotations») [10], полученных автором (Tilman Piesk, March 10 2012) программным путем.

Кроме того, с учетом результатов работы [2], имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^n P^*(n, k) = p_n^* = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} C_{2n}^n + \sum_{\substack{1 \leq i < n, \\ i|n}} \varphi \left(\frac{n}{i} \right) C_{2i}^i \right), \quad (20)$$

где p_n^* — число неизоморфных разбиений из класса $NCP(n)$, или, что то же, — число неизоморфных 2-цветных планарных n -диаграмм.

5.2 Число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$

Применяя лемму Бернсайда, число неэквивалентных диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^{**}(n, k) = \frac{1}{2} \left(P^*(n, k) + \frac{1}{n} \cdot P_{n,k}^{sim} \right), \quad (21)$$

где $P_{n,k}^{sim}$ — число тех диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$, которые являются симметричными относительно хотя бы одной из n различных осей симметрии 2-цветного $2n$ -шаблона. Причем

$$P_{n,k}^{sim} = \begin{cases} n \cdot p_0(n, k), & n = 2m \pm 1 \\ \frac{n}{2} \cdot (p_1(n, k) + p_2(n, k)), & n = 2m, \end{cases}$$

где $p_0(n, k)$ — число диаграмм из $\mathfrak{S}_{k,n}$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии, проходящей через середины диаметрально-противоположных черной и белой дуг 2-цветного $2n$ -шаблона;

$p_1(n, k)$ ($p_2(n, k)$) — число диаграмм из $\mathfrak{S}_{k,n}$, симметричных относительно фиксированной оси симметрии, проходящей через середины диаметрально-противоположных черных (соответственно белых) дуг $2n$ -шаблона.

Хорошо известно (напр. из [8]), что существует биективное соответствие между элементами множества $NCP_{k,n}$ (а потому и $\mathfrak{S}_{k,n}$) и элементами множества, известными как «Dyck n -paths with exactly k peaks». Как следует из работ [1] и [2], величина $T(n, k) = \frac{1}{n} \cdot P_{n,k}^{sim}$ совпадает с числом объектов, именуемых как «symmetric Dyck paths of semi-length n with k peaks»

(последовательность A088855 в [10]). Более того, в работе [1] (Example 37) показано, что

$$T(n, k) = C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \cdot C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}, \quad (22)$$

где $[q]$ — целая часть числа q (определяемая как наибольшее целое, меньшее или равное q); $\lceil q \rceil$ — функция «потолок», определяемая как наименьшее целое, большее или равное q .

С учетом соотношений (21) и (22), имеет место

Лемма 2 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число неэквивалентных (относительно действия диэдральной группы порядка $2n$) диаграмм из класса $\mathfrak{S}_{k,n}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$P^{**}(n, k) = \frac{1}{2} \left(P^*(n, k) + C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \cdot C_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \right), \quad (23)$$

где $\lfloor q \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq q\}$, $\lceil q \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq q\}$, а $P^*(n, k)$ определяется по формуле (8).

Заметим, что начальные значения величины $P^{**}(n, k)$ совпадают с членами последовательности A209612 [10].

Результаты и выводы

На основании Предложений 1 и 2, Леммы 1 и Леммы 2 имеют место основные результаты работы

Теорема 1 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число O -топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ можно вычислить с помощью формулы (8).

Теорема 2 Для натуральных $n \geq k \geq 2$ число топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ можно вычислить с помощью формулы (23).

Начальные значения числа O -топологически и топологически неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$ для натуральных $2 \leq k \leq n \leq 18$ приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Кроме того, в представленной статье впервые приводится решение задачи (более известной под названием) «Enumeration of non-crossing partitions of $[n]$ with k blocks under rotation and reflection», результаты которой были анонсированы в материалах «XV международной научной конференции им. академика Михаила Кравчука» и международной конференции «Геометрия в Одессе – 2014».

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1																
3	1	1															
4	2	2	1														
5	2	4	2	1													
6	3	10	10	3	1												
7	3	15	25	15	3	1											
8	4	26	64	64	26	4	1										
9	4	38	132	196	132	38	4	1									
10	5	56	256	536	536	256	56	5	1								
11	5	75	450	1260	1764	1260	450	75	5	1							
12	6	104	765	2736	5102	5102	2736	765	104	6	1						
13	6	132	1210	5445	13068	17424	13068	5445	1210	132	6	1					
14	7	172	1868	10247	30711	52634	52634	30711	10247	1868	172	7	1				
15	7	213	2763	18219	66807	143151	184041	143151	66807	18219	2763	213	7	1			
16	8	266	3994	31092	136710	357980	575284	575284	357980	136710	31092	3994	266	8	1		
17	8	320	5600	50960	264992	832832	1635920	2044900	1635920	832832	264992	50960	5600	320	8	1	
18	9	390	7726	80976	491054	1823676	4298400	6566914	6566914	4298400	1823676	491054	80976	7726	390	9	1

Таблица 1: начальные значения числа *O-топологически* неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$, $2 \leq k \leq n \leq 18$

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	1																
3	1	1															
4	2	2	1														
5	2	4	2	1													
6	3	8	8	3	1												
7	3	12	17	12	3	1											
8	4	19	41	41	19	4	1										
9	4	27	78	116	78	27	4	1									
10	5	38	148	298	298	148	38	5	1								
11	5	50	250	680	932	680	250	50	5	1							
12	6	67	420	1443	2651	2651	1443	420	67	6	1						
13	6	84	650	2835	6684	8912	6684	2835	650	84	6	1					
14	7	107	997	5281	15618	26667	26667	15618	5281	997	107	7	1				
15	7	131	1455	9330	33771	72188	92633	72188	33771	9330	1455	131	7	1			
16	8	161	2095	15840	68943	179970	288867	288867	179970	68943	15840	2095	161	8	1		
17	8	192	2912	25872	133280	417984	819920	1024900	819920	417984	133280	25872	2912	192	8	1	
18	9	231	4007	40992	246703	914190	2152728	3287867	3287867	2152728	914190	246703	40992	4007	231	9	1

Таблица 2: начальные значения числа *топологически* неэквивалентных функций из класса $C_{k,n-k+1}(S^2)$, $2 \leq k \leq n \leq 18$

Список литературы

1. Barry P. *On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles* // Journal of Integer Sequences. – 2006. – V. 9, № 2. – Article 06.2.4, 34 pp. (electronic)
2. Callan D. *Non-crossing Partitions under Rotation and Reflection* / D. Callan, L. Smiley // <http://arxiv.org/abs/math.CO/0510447>, 2005.
3. Cori R. *Counting non-isomorphic chord diagrams* / R. Cori, M. Marcus // Theoretical Computer Science. – 1998. – V. 204 Issue 1-2. – P. 55–73.
4. Kadubovsky A. *Classification of O -topologically non-equivalent function with color chord diagrams* / A. Kadubovsky, A. Klimchuk // Method of functional analysis and topology. – 2004. – Vol. 10, №3. – P. 23–32.
5. Prishlyak A. O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface* / A.O. Prishlyak // Topology and its Applications. – 2002. – Vol. 119, № 3. – P. 257–267.
6. Reiner V. *The Cyclic Sieving Phenomenon* / V. Reiner, D. Stanton, D. White // Journal of Combinatorial Theory, Series A 108. – 2004. – P. 17–50.
7. Simion R. *Noncrossing partitions* / R. Simion // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol. 217. – P. 367–409.
8. Stanley R. *Enumerative combinatorics* // Volume 2, Cambridge Univ. Press, New York, 1999.
9. Stanley R. *Catalan Addendum*// 6 June, 2010.
10. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>.
11. Кадубовський О. *Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях* / О. Кадубовський // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343–351.
12. Кадубовський О. *Про один клас хордових діаграм максимального роду* / О. Кадубовський // Вісник Київського університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 17–27.
13. Кадубовський О. А. *Двокольорові O - і N -діаграми* / О.А. Кадубовський, О.В. Сторожилова, Н.В. Сторожилова // Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – Вип. 10, Том I. – С. 41–50.
14. Кадубовський О. А. *Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері* / О.А. Кадубовський // Геометрія та топологія функцій: Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т 7, № 4, 2010. – С. 87–107.
15. Кадубовський О. А. *Про один клас гладких функцій на двовимірній сфері* / О.А. Кадубовський // Вісник СДПУ. Математика. – Слов'янськ: СДПУ. – Вип. 1(4), 2010. – С. 39–57.
16. Кадубовський О. А. *Двокольорові хордові O -діаграми мінімального роду* / О.А. Кадубовський, Ю.В. Гладичук // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. – 2011. – Вип. 1. – С. 49–60.
17. Кадубовський О. А. *Двокольорові хордові O -діаграми мінімального роду з $k = 9$ циклами певного кольору* / О.А. Кадубовський, К.В. Хабарова, Ю.В. Сапсай // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. – 2014. – Вип. 4. – С. 69–84.
18. Шарко В. В. *Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхности* / В.В. Шарко // Український математичний журнал. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 687–700.

Александр Анатольевич Кадубовский

ДГПУ, Славянск, Украина

E-mail: kadubovs@ukr.net

Aleksandr An. Kadubovskyi

Donbass State Teachers' Training University, Slavyansk, Ukraine.

On the number of topologically non-equivalent functions with one degenerate saddle critical point on two-dimensional sphere, II

In this paper we consider the smooth functions with three critical values on two-dimensional sphere S^2 , that possess only one (degenerate) saddle critical point in addition to M local maxima and m local minima. For any natural M and m we calculate the number of topologically non-equivalent such functions.

4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий

Ирина Николаевна Курбатова

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений римановых пространств с почти и полукватернионной структурой.

Ключевые слова Келерово пространство, кватернионная структура.

УДК 517.764

1 Введение.

В современной дифференциальной геометрии интенсивно изучаются различные обобщения теории геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств и голоморфно-проективных отображений почти комплексных многообразий.

Напомним, что геодезическое отображение одного пространства аффинной связности A_n на другое \bar{A}_n определяется как взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором образом каждой геодезической линии A_n является геодезическая линия \bar{A}_n .

Если на римановом пространстве определена ковариантно постоянная почти комплексная структура, согласованная с метрикой, его называют келеровым [1]. Теорема Яно-Вестлейка [2] утверждает, что геодезическое отображение келерова пространства на келерово с сохранением комплексной структуры является тривиальным. Поэтому для келеровых пространств вводят более общие, так называемые голоморфно проективные отображения, введенные Т.Оцуки и Я.Тасиро [3]. Обстоятельное изложение результатов, полученных в теории геодезических и голоморфно про-

ективных отображений, содержится в [2],[4]. Еще одно из направлений современной дифференциальной геометрии - теория дифференцируемых многообразий, снабженных различными геометрическими структурами, в частности, алгебраическими, то есть изоморфно представляющими некоторую алгебру [5],[6]. Объединяет эти направления теория диффеоморфизмов многообразий с различными аффинорными структурами, таких, например, как квази-геодезические, почти геодезические, тригеодезические, p -геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств.

В [7] Синюковым Н.С. и Й.Микешем были введены в рассмотрение квазипланарные отображения, представляющие собой весьма широкое обобщение геодезических и голоморфно-проективных отображений пространств аффинной связности без кручения с произвольной аффинорной структурой.

Отметим, что во всех вышеуказанных отображениях многообразия были наделены лишь одной аффинорной структурой определенного типа.

Мы исследуем отображения пространств аффинной связности без кручения с почти и полукватернионной структурой, которые называем 4-квазипланарными [8].

Как известно, почти кватернионным пространством [1] называется дифференцируемое многообразие X_n с заданными на нем почти комплексными структурами F^1 и F^2 , которые наряду с

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad F_i^\alpha F_\alpha^h = -\delta_i^h \quad (1)$$

удовлетворяют условиям

$$F_i^\alpha F_\alpha^h + F_i^\alpha F_\alpha^h = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что тензор

$$F_i^h = F_i^\alpha F_\alpha^h,$$

также определяет почти комплексную структуру. При этом связь между F^1 , F^2 , F^3 имеет вид:

$$\begin{aligned} F_i^\alpha F_\alpha^h &= -F_i^\alpha F_\alpha^h = F_i^h, \\ F_i^\alpha F_\alpha^h &= -F_i^\alpha F_\alpha^h = F_i^h, \\ F_i^\alpha F_\alpha^h &= -F_i^\alpha F_\alpha^h = F_i^h. \end{aligned} \quad (3)$$

Любые две из трех определяют исходную почти кватернионную структуру на X_n .

Почти кватернионная структура на пространстве аффинной связности A_n с объектом связности Γ называется келеровой [1], если каждая из образующих аффинорных структур - келерова, то есть

$$F_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3,$$

где \langle, \rangle - знак ковариантной производной по связности Γ .

Почти кватернионную структуру на римановом пространстве V_n с метрическим тензором g_{ij} чаще всего согласовывают в виде

$$g_{\alpha\beta} F_i^s F_j^s = g_{ij}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (4)$$

или, что то же,

$$g_{i\alpha} F_j^s = -g_{j\alpha} F_i^s, \quad s = 1, 2, 3. \quad (5)$$

2 4-квазипланарные отображения пространств аффинной связности с почти кватернионной структурой.

1°. Рассмотрим пару пространств аффинной связности без кручения A_n , \bar{A}_n с объектами связности Γ , $\bar{\Gamma}$ и почти кватернионными структурами (F, F) , (\bar{F}, \bar{F}) , соответственно.

Назовем 4-квазипланарным отображением $f : A_n \rightarrow \bar{A}_n$ (4КПО), сохраняющим почти кватернионную структуру [8], взаимно однозначное отображение между их точками, при котором в общей по отображению системе координат x^1, x^2, \dots, x^n имеет место зависимость

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^3 q_{(i}^s(x) F_{j)}^s(x), \quad (6)$$

где

$$\overset{\circ}{F}_i^h = \delta_i^h, \quad F_i^3 = F_i^1 F_\alpha^2, \quad F_i^s(x) = \bar{F}_i^s(x),$$

$q_i^s(x)$ - некоторые ковекторы. Нетрудно видеть, что при отображениях (6) сохраняются кривые вида

$$x^h = x^h(t), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

вдоль которых выполняются дифференциальные уравнения

$$\lambda_{,\alpha}^h \lambda^\alpha = \lambda^\alpha \sum_{s=0}^3 \overset{s}{a}(t) F_\alpha^s,$$

$$\lambda^h = \frac{dx^h}{dt},$$

где $\overset{s}{a}(t)$ - некоторые функции параметра t , \langle, \rangle - знак ковариантной производной по связности Γ . Эти кривые представляют собой аналог геодезических линий пространств аффинной связности и аналитически планарных кривых почти комплексных многообразий.

2°. Рассмотрим пару римановых почти кватернионных пространств (V_n, g_{ij}) , $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, находящихся в 4КПО, сохраняющем почти кватернионную структуру. Предположим, что лишь одна из почти комплексных структур, скажем $\overset{1}{F}$, абсолютно параллельна в $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, то есть

$$F_{i|j}^h = 0,$$

где $\langle | \rangle$ - знак ковариантной производной по связности $\bar{\Gamma}$.

Из (6) следует, что в этом случае

$$\begin{aligned} F_{i,j}^h + \delta_j^h (\overset{1}{q}_\alpha F_i^\alpha + \overset{1}{q}_i) + F_j^h (\overset{1}{q}_\alpha F_i^\alpha - \overset{1}{q}_i) + F_j^h (\overset{2}{q}_\alpha F_i^\alpha - \overset{3}{q}_i) + \\ + F_j^h (\overset{3}{q}_\alpha F_i^\alpha + \overset{2}{q}_i) - 2\overset{3}{q}_j F_i^h + 2\overset{2}{q}_j F_i^h = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Опуская здесь индекс h в V_n и симметрируя по индексам h, i , получаем

$$\begin{aligned} g_{j(h} (\overset{1}{q}_{|\alpha} F_i^\alpha + \overset{1}{q}_i) - F_{j(h} (\overset{1}{q}_{|\alpha} F_i^\alpha - \overset{1}{q}_i) - \\ - F_{j(h} (\overset{2}{q}_{|\alpha} F_i^\alpha - \overset{3}{q}_i) - F_{j(h} (\overset{3}{q}_{|\alpha} F_i^\alpha + \overset{2}{q}_i) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

После свертывания этих соотношений с g^{hj} по индексам h, j оказывается, что

$$\overset{1}{q}_\alpha F_i^\alpha + \overset{1}{q}_i = 0. \quad (9)$$

Тогда из (8) с учетом (9), (1), (3), (5) имеем

$$\overset{2}{q}_\alpha F_i^\alpha - \overset{3}{q}_i = 0. \quad (10)$$

Таким образом, из (9), (10), (7) следует, что если при 4КПО римановых пространств V_n, \bar{V}_n с сохранением почти кватернионной структуры аффинор $\overset{1}{F}$ в \bar{V}_n определяет келерову структуру, то в V_n на него возникают условия дифференциального характера вида

$$F_{i,j}^h = 2\overset{3}{q}_j F_i^h - 2\overset{2}{q}_j F_i^h.$$

Отсюда легко видеть, что если в V_n аффинор $\overset{1}{F}$ также абсолютно параллелен, то по необходимости

$$\overset{3}{q}_j = \overset{2}{q}_j = 0.$$

В этом случае 4КПО (6) вырождается в $\overset{1}{F}$ -планарное [7]:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^1 \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}_{j)}^h(x).$$

Если к тому же потребовать, чтобы $\overset{2}{F}$ (а следовательно и $\overset{3}{F}$) было ковариантно постоянно в V_n и \overline{V}_n , то рассуждения, аналогичные предыдущим, дадут нам

$$\overset{\circ}{q}_j = \overset{1}{q}_j = \overset{2}{q}_j = \overset{3}{q}_j = 0,$$

т.е. 4КПО келеровых кватернионных многообразий вырождается в аффинное

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x).$$

Логично считать все эти варианты тривиальными с точки зрения 4КПО почти кватернионных многообразий.

Итак, нами доказана

Теорема 1 *4КПО почти кватернионных пространств $V_n \rightarrow \overline{V}_n$ с сохранением структуры при условии абсолютной параллельности хотя бы одного из структурных аффиноров $\overset{s}{F}$, $s = 1, 2, 3$, в V_n и \overline{V}_n тривиально.*

В силу доказанной теоремы, при изучении 4КПО имеет смысл рассматривать дифференциальные условия более общего характера, чем ковариантное постоянство аффиноров почти кватернионной структуры. В [8], [9] мы пошли по этому пути и исследовали 4КПО так называемых Q^* -пространств.

3 Понятие полукватернионной структуры.

Введем в рассмотрение структуру, которая порождается парой почти комплексных структур, коммутирующих между собой. Назовем ее *полукватернионной*. Соответственно, назовем *почти полукватернионным* риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые наряду с

$$\overset{1}{F}_i^\alpha \overset{1}{F}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}_i^\alpha \overset{2}{F}_\alpha^h = -\delta_i^h \quad (11)$$

удовлетворяют условиям

$$F_i^1 F_\alpha^2 - F_i^2 F_\alpha^1 = 0. \quad (12)$$

Тензор

$$F_i^3 = F_i^1 F_\alpha^2,$$

очевидно, определяет структуру почти произведения [4]:

$$F_i^3 F_\alpha^3 = \delta_i^h. \quad (13)$$

Связь между F^1, F^2, F^3 имеет вид:

$$\begin{aligned} F_i^1 F_\alpha^2 &= F_i^2 F_\alpha^1 = F_i^3, \\ F_i^2 F_\alpha^3 &= -F_i^3 F_\alpha^2 = -F_i^1, \\ F_i^3 F_\alpha^1 &= F_i^1 F_\alpha^3 = -F_i^2. \end{aligned} \quad (14)$$

В качестве примера такой структуры может служить тройка аффиноров с компонентами

$$\begin{aligned} (F_i^1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_k \\ E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_k & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (F_i^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E_k \\ 0 & 0 & E_k & 0 \\ 0 & -E_k & 0 & 0 \\ -E_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (F_i^3) &= \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_k \\ 0 & 0 & E_k & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

В дальнейшем полагаем, что аффиноры F^1 и F^2 на V_n определяют почти эрмитову структуру [1], то есть

$$F_{ij}^1 = -F_{ji}^1, \quad F_{ij}^2 = -F_{ji}^2, \quad F_{ij}^1 = g_{i\alpha} F_j^\alpha, \quad F_{ij}^2 = g_{i\alpha} F_j^\alpha. \quad (15)$$

Тогда из (14) по необходимости следует

$$F_{ij}^3 = F_{ji}^3, \quad F_{ij}^3 = g_{i\alpha} F_j^\alpha. \quad (16)$$

Как обычно, под келеровой будем понимать полукватернионную структуру на V_n , для которой

$$F_{i,j}^s = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

4 4КПО полукватернионных келеровых пространств.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}, \overset{s}{\bar{F}}, s = 1, 2, 3$, находящиеся в 4КПО, сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место (6) при условиях (11)-(16). Кроме того, в V_n и \bar{V}_n выполняются соотношения

$$F_{i,j}^h = 0, \quad \bar{F}_{i|j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Из зависимости между ковариантными производными $\overset{s}{F}$ в V_n и \bar{V}_n с учетом (6) и (11)-(17) аналогично тому, как это делалось выше, находим :

$$\overset{\circ}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha \overset{1}{F}_i^\alpha = \overset{2}{q}_\alpha \overset{2}{F}_i^\alpha = \overset{3}{q}_\alpha \overset{3}{F}_i^\alpha. \quad (18)$$

при $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha \neq \pm n$.

Заметим, что $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha = \pm n$ соответствует $\overset{3}{F}_i^h = \pm \delta_i^h$ и, следовательно, $\overset{1}{F}_i^h = \pm \overset{2}{F}_i^h$. Таким образом, при $\overset{3}{F}_\alpha^\alpha = \pm n$ полукватернионная келерова структура вырождается в классическую келерова [1].

5 Структурные особенности 4КПО полукватернионных келеровых пространств.

1°. Ввиду $\overset{3}{F}_{i,j}^h = 0$ аффинорная структура $\overset{3}{F}_i^h$ интегрируема [4], поэтому в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, называемую адаптированной (к аффинору), в которой аффинор приводится к виду:

$$(\overset{3}{F}_i^h) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

то есть

$$\overset{3}{F}_b^a = \delta_b^a, \quad \overset{3}{F}_B^A = \delta_B^A, \quad \overset{3}{F}_b^A = \overset{3}{F}_B^a = 0, \quad (20)$$

$a, b = 1, 2, \dots, m; A, B = m + 1, m + 2, \dots, n$.

В адаптированной системе координат ввиду (16) приобретает специфику и матрица метрического тензора:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix},$$

где $G_1 = G_1^T$, $G_2 = G_2^T$, то есть

$$g_{ab}(x) = g_{ba}(x); \quad g_{AB}(x) = g_{BA}(x); \quad g_{aB}(x) = 0.$$

Из (17) следует, что в адаптированной системе координат для символов Кристоффеля второго рода имеем:

$$\Gamma_{bc}^A = \Gamma_{Bc}^A = \Gamma_{BC}^a = \Gamma_{Bc}^a = 0.$$

Это, в свою очередь, приводит к тому, что

$$g_{ab} = g_{ab}(x^c); \quad g_{AB} = g_{AB}(x^C); \quad g_{aB}(x) = 0, \quad (21)$$

то есть V_n - приводимо [4].

Нами доказана

Теорема 2 *Полукватернионное келерово пространство по необходимости приводимо.*

2°. Нетрудно видеть, что вследствие (17) образ полукватернионного келерова пространства при 4КПО также приводим и в адаптированной системе координат, общей по отображению,

$$\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(x^c); \quad \bar{g}_{AB} = \bar{g}_{AB}(x^C); \quad \bar{g}_{aB}(x) = 0.$$

Соотношения (14),(15),(18), записанные в адаптированной системе координат, дают нам

$$\overset{1}{F}_B^a = \overset{1}{F}_b^A = 0, \quad \overset{2}{F}_B^a = \overset{2}{F}_b^A = 0, \quad \overset{2}{F}_b^a = -\overset{1}{F}_b^a, \quad \overset{2}{F}_B^A = \overset{1}{F}_B^A, \quad (22)$$

$$(\overset{1}{q}_a, \overset{1}{q}_A) = (-\overset{\circ}{q}_b \overset{1}{F}_a^b, \overset{\circ}{q}_B \overset{1}{F}_A^B), \quad (\overset{2}{q}_a, \overset{2}{q}_A) = (\overset{\circ}{q}_b \overset{1}{F}_a^b, -\overset{\circ}{q}_B \overset{1}{F}_A^B), \quad (23)$$

вследствие чего из основных уравнений 4КПО (6) находим:

$$\Gamma_{bc}^A = \Gamma_{Bc}^A = \Gamma_{Bc}^a = \Gamma_{BC}^a = 0 \quad \bar{\Gamma}_{bc}^A = \bar{\Gamma}_{Bc}^A = \bar{\Gamma}_{Bc}^a = \bar{\Gamma}_{BC}^a = 0 \quad (24)$$

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + 2q_{(b}^{\circ} \delta_{c)}^a + 2q_{(b}^1 \overset{1}{F}_{c)}^a, \quad (25)$$

$$\bar{\Gamma}_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A + 2q_{(B}^{\circ} \delta_{C)}^A + 2q_{(B}^1 \overset{1}{F}_{C)}^A \quad (26)$$

Несложно проверить, что из (25),(17),(21),(22) следует

$$\overset{\circ}{q}_b = \overset{\circ}{q}_b(x^a), \quad \overset{\circ}{q}_B = \overset{\circ}{q}_B(x^A), \quad \overset{1}{F}_a^b = \overset{1}{F}_a^b(x^c), \quad \overset{1}{F}_A^B = \overset{1}{F}_A^B(x^C)$$

Это означает, что полукватернионные келеровы пространства V_n и \bar{V}_n , находящиеся в 4КПО, представляют собой произведение $V_n = V_m \times V_{n-m}$, $\bar{V}_n = \bar{V}_m \times \bar{V}_{n-m}$, причем $V_m(x^a)$ и $\bar{V}_m(x^a)$ являются келеровыми относительно аффинора $F_b^1(x^c)$ и 4КПО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ индуцирует НР-отображение $f_1 : V_m \rightarrow \bar{V}_m$ с сохранением комплексной структуры F_b^1 , соответствующее вектору $2q_b^{\circ}(x^a)$ [2].

Аналогично $V_{n-m}(x^A)$ и $\bar{V}_{n-m}(x^A)$ являются келеровыми относительно аффинора $F_A^B(x^C)$ и 4КПО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ индуцирует НР-отображение $f_2 : V_{n-m} \rightarrow \bar{V}_{n-m}$ с сохранением комплексной структуры F_A^B , соответствующее вектору $2q_B^{\circ}(x^A)$.

3°. Покажем, как можно сконструировать 4КПО.

Рассмотрим две пары келеровых пространств. Первая - (V_m, g_{ab}, F_b^a) и $(\bar{V}_m, \bar{g}_{ab}, \bar{F}_b^a)$, находящиеся в НР-отображении $f_1 : V_m \rightarrow \bar{V}_m$ с сохранением комплексной структуры. Тогда в общей по отображению f_1 системе координат (x^c) , $a, b, c = 1, 2, \dots, m$ основные уравнения этого отображения имеют вид:

$$\bar{F}_{bc}^a(x^d) = \Gamma_{bc}^a(x^d) + \psi_{(b}(x^d)\delta_c^a) + \varphi_{(b}(x^d)F_c^a(x^d), \tag{27}$$

где $\Gamma, \bar{\Gamma}$ - объекты римановой связности V_m, \bar{V}_m , соответственно; ψ_a, φ_a - некоторые ковекторы, причем $F_c^a = \bar{F}_c^a$,

$$F_c^a F_b^c = -\delta_b^a, \quad g_{ac} F_b^c = -g_{bc} F_a^c, \quad F_{b,c}^a = F_{b|c}^a = 0, \quad \varphi_a = -\psi_c F_c^a. \tag{28}$$

Вторая пара - келеровы (V_{n-m}, g_{AB}, F_B^A) и $(\bar{V}_{n-m}, \bar{g}_{AB}, \bar{F}_B^A)$, находящиеся в НР-отображении $f_2 : V_{n-m} \rightarrow \bar{V}_{n-m}$ с сохранением комплексной структуры. Тогда в общей по отображению f_2 системе координат (x^C) , $A, B, C = m + 1, m + 2, \dots, n$ основные уравнения этого отображения имеют вид:

$$\bar{F}_{BC}^A(x^D) = \Gamma_{BC}^A(x^D) + \psi_{(B}(x^D)\delta_C^A) + \varphi_{(B}(x^D)F_C^A(x^D), \tag{29}$$

где $\Gamma, \bar{\Gamma}$ - объекты римановой связности V_{n-m}, \bar{V}_{n-m} , соответственно; ψ_A, φ_A - некоторые ковекторы, причем $F_C^A = \bar{F}_C^A$,

$$F_C^A F_B^C = -\delta_B^A, \quad g_{AC} F_B^C = -g_{BC} F_A^C, \quad F_{B,C}^A = F_{B|C}^A = 0, \quad \varphi_A = -\psi_C F_C^A. \tag{30}$$

Построим $V_n = V_m \times V_{n-m}$ и $\bar{V}_n = \bar{V}_m \times \bar{V}_{n-m}$ с метрическими тензорами

$$(g_{ij}(x^k)) = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & g_{AB} \end{pmatrix}, \quad (\bar{g}_{ij}(x^k)) = \begin{pmatrix} \bar{g}_{ab} & 0 \\ 0 & \bar{g}_{AB} \end{pmatrix},$$

$i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

Нетрудно проверить, что с учетом (27) - (30) зависимость между компонентами объектов римановой связности V_n и \bar{V}_n будет иметь вид (6), где

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} -F_b^a & 0 \\ 0 & F_B^A \end{pmatrix}, \quad (F_i^h) = \begin{pmatrix} F_b^a & 0 \\ 0 & F_B^A \end{pmatrix}, \quad (F_i^h) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$(\overset{\circ}{q}_i) = (\overset{\circ}{q}_a, \overset{\circ}{q}_A) = \left(\frac{1}{2}\psi_a(x^c), \frac{1}{2}\psi_A(x^C)\right), \quad \overset{\circ}{q}_i = \overset{1}{q}_\alpha F_i^1{}^\alpha = \overset{2}{q}_\alpha F_i^2{}^\alpha = \overset{3}{q}_\alpha F_i^3{}^\alpha.$$

При этом выполняются (11) - (17).

Итак, мы получили 4КПО келеровых полукватернионных пространств $f: (V_n, g_{ij}, F_i^h) \rightarrow (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ с сохранением структуры.

Учитывая тот факт, что в теории НР-отображений келеровых пространств известно достаточно много классов келеровых пространств, допускающих нетривиальные НР-отображения, мы получаем эффективный способ конструирования полукватернионных келеровых пространств и их 4-квазипланарных отображений.

Список литературы

1. Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой // Итоги науки: Геометрия, 1963. М.: ВИНТИ.1965 165–212.
2. J.Mikes, A.Vanzurova, I.Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations//Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
3. Otsuki, T.; Tashiro, Y. On curves in Kaehlerian spaces. J.Okayama Univ. 4, 57-78 (1954).
4. Синоков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств //М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
5. Широков А.П. Пространства над алгебрами и их применения// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения/ ВИНТИ. М., 2002. Т.73. С.135-161.
6. Вишневский В.В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения/ ВИНТИ. М., 2002. Т.73.С.5-64.
7. Микеш Й., Синоков Н.С. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности //Известия ВУЗов. Математика. 1983. No. 1. С. 55-61.
8. Курбатова И.Н. О 4-квазипланарных отображениях почти кватернионных многообразий // Известия ВУЗов. Математика .1986. No. 1. С. 75-78.
9. Курбатова И.Н. О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий // Мат.Студії. - 2013. - Т.40, No. 1.- С. 95-103.

Ирина Николаевна Курбатова

ОНУ, Одесса, Украина

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Irina N. Kurbatova

4-quasiplanar mappings of almost quaternion and semi-quaternion manifolds

We investigate special type mappings of Riemannian spaces with almost and semi-quaternion structure.

Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств

Ирина Николаевна Курбатова, Ольга Тарасовна Сисюк

Аннотация Мы исследуем специальный тип отображений между римановыми пространствами с рекуррентно-параболической структурой.

Ключевые слова Риманово пространство, параболическая структура.

УДК 517.764

1 Введение.

1°. В 1968 году, исследуя проблему моделирования (в смысле поведения пробных частиц) физических полей, академик А.З. Петров пришел к задаче квази-геодезического отображения (КГО) римановых пространств V_4 сигнатуры Минковского [1]. При этом движение свободной частицы в одном поле (при одном энергетическом режиме) моделируется движением частицы в другом поле (при другом энергетическом режиме) под действием некоторой внешней силы типа Лоренца, то есть геодезические линии пространства V_4 переходят в так называемые квази-геодезические линии другого пространства \bar{V}_4 , в результате чего, по выражению А.З. Петрова, «происходит перекачка энергии в силу». Им были получены и в некоторой мере исследованы основные уравнения КГО, которые в общей по отображению системе координат имеют вид:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\bar{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_4 и V_4 с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование.

КГО представляют собой широкое обобщение понятия геодезических отображений [2], теория которых уже давно является классическим разделом современной дифференциальной геометрии, и имеют существенное пересечение с другими известными ее обобщениями, такими как НР-отображения почти комплексных многообразий [3], отображения аффинно-связных и римановых пространств с сохранением комплекса геодезических [4], почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств [2], F-планарные отображения пространств аффинной связности [5].

Изучению КГО при некоторых дополнительных условиях посвящены работы [6]-[8]. Причем там уже понятие КГО обобщается на случай римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности, а также из определенных геометрических соображений накладывается требование, чтобы КГО $f: V_n \rightarrow \bar{V}_n$ удовлетворяло условию взаимности, т.е. обратное отображение $f^{-1}: \bar{V}_n \rightarrow V_n$ также было квази-геодезическим, соответствующим тому же аффинору $F_i^h(x)$.

2°. Для сокращения выкладок условимся операцию свертывания с аффинором называть сопряжением по соответствующему индексу и обозначать следующим образом:

$$A_{\bar{i} \dots} = A_{\alpha \dots} F_i^\alpha, \quad A^{\bar{i} \dots} = A^{\alpha \dots} F_\alpha^i.$$

3°. Напомним, что X_n считается наделенным *e-структурой* [2], если в нем задана аффинорная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = e \delta_i^h,$$

где $e = -1, 1$ или 0 . При $e = 1$ ее называют структурой почти произведения (гиперболической); при $e = -1$ - почти комплексной (эллиптической); при $e = 0$ - почти касательной (параболической).

В теории почти комплексных многообразий (при $e = -1$) аффинорную структуру, определенную на римановом пространстве (V_n, g_{ij}) , называют почти эрмитовой [7], если она согласована с метрикой в виде

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij}.$$

В зависимости от того, какие условия дифференциального характера накладываются на аффиноры в римановом пространстве с e -структурой, выделяют следующие классы пространств [7]: келерово - при $F_{i,j}^h = 0$, где «,» - знак ковариантной производной по связности V_n ; К-пространство - при $F_{i,j}^h + F_{j,i}^h = 0$; Н-пространство - при $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0$, где $F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^\alpha$ и др.

Предметом нашего исследования будут КГО $f : V_n \rightarrow \bar{V}_n$ определенного типа в предположении, что F_i^h порождает на V_n и \bar{V}_n структуру, которую мы назвали рекуррентно-параболической.

2 Понятие рекуррентно-параболической структуры

1°. Назовем *рекуррентно-параболической* заданную на (псевдо)римановом пространстве V_n аффинорную структуру $F_i^h(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad (1)$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x) \quad (2)$$

где круглыми скобками обозначена операция симметрирования без множителя; «,» - знак ковариантной производной в пространстве V_n ; ρ_j - ковариантный вектор. Само V_n при этом также будем называть *рекуррентно-параболическим*.

Ввиду (1) и (2) для тензора Римана V_n возникают дополнительные свойства. Действительно, применив тождество Риччи к аффинору $F_i^h(x)$, на основании (2) имеем:

$$\rho_{[j,k]} F_i^h = R_{ij k}^{\bar{h}} - R_{ij k}^h \quad (3)$$

Напомним [2], что одним из критериев интегрируемости e -структуры является обращение в 0 его тензора Нейенхейса:

$$N_{ij}^h = F_{i,j}^h - F_{j,\bar{i}}^h + F_{i,\bar{j}}^h - F_{\bar{j},i}^h$$

Из (2) на основании (1) следует, что $F_{i,j}^h = 0$, поэтому тензор Нейенхейса рекуррентно-параболической структуры представится в виде

$$N_{ij}^h = F_{i,\bar{j}}^h - F_{j,\bar{i}}^h$$

или, с учетом (2),

$$N_{ij}^h = \rho_{\bar{j}} F_i^h - \rho_{\bar{i}} F_j^h.$$

Будем полагать, что аффинорная структура $F_i^h(x)$ интегрируема, тогда из последних соотношений следует:

$$\rho_{\bar{j}} F_i^h - \rho_{\bar{i}} F_j^h = 0.$$

Если здесь опустить индекс h в V_n , затем проциклировать по i, j, h и сравнить результат с исходными равенствами, то вследствие (1) получим $\rho_{\bar{i}} F_j^h = 0$, то есть:

$$\rho_{\bar{i}} = 0. \quad (4)$$

2°. Так как наша параболическая структура F_i^h является интегрируемой, в рассматриваемой окрестности можно выбрать такую систему координат, (ее называют адаптированной к аффинору), в которой аффинор имеет следующий вид:

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m & 0 \end{pmatrix},$$

то есть:

$$F_b^{a+m} = \delta_b^a, \quad F_{b+m}^{a+m} = F_b^a = F_{b+m}^a = 0$$

$$a, b = 1, 2, \dots, m = \frac{n}{2}.$$

Введем вспомогательный тензор B_i^h , такой что:

$$B_\alpha^h B_i^\alpha = 0, \quad F_\alpha^h B_i^\alpha + B_\alpha^h F_i^\alpha = \delta_i^h. \quad (5)$$

При этом, очевидно, по необходимости

$$F_\alpha^\beta B_\beta^\alpha = m.$$

Этот тензор определяется с большим произволом. В частности, в адаптированной к аффинору F_i^h системе координат он представляется в виде

$$(B_i^h) = \begin{pmatrix} P & E_m \\ -P^2 & -P \end{pmatrix},$$

где P —произвольная квадратная матрица порядка m .

3 КГО рекуррентно-параболических пространств

1°. Рассмотрим пару римановых пространств (V_n, g_{ij}) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, находящихся в КГО, соответствующем аффинору F_i^h , удовлетворяющему условию взаимности. В общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения КГО представляются в виде:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) \quad (6)$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x) \bar{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_n и V_n с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор. Пусть V_n является рекуррентно-параболическим. Найдем связь между ковариантными производными F_i^h в пространствах \bar{V}_n и V_n , используя (6), (1) и (2):

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h + \psi_i \delta_j^h + \varphi_i F_j^h - \psi_i F_j^h \quad (7)$$

При свертывании с B_j^h по h, j с учетом (5) отсюда находим

$$\varphi_i = \psi_i$$

Тогда из (7) следует:

$$F_{i|j}^h = \rho_j F_i^h,$$

т.е. в римановом пространстве \bar{V}_n аффинор F_i^h также является рекуррентным, причем с тем же вектором рекуррентности ρ_j .

Нами доказана

Теорема 1 *Образ рекуррентно-параболического пространства при КГО по необходимости также параболически-рекуррентен.*

2°. Заметим, что при свертывании (6) по h, j с учетом $\varphi_i = \psi_i$ имеем

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\alpha + (n+2)\psi_i,$$

что говорит о градиентности вектора ψ_i .

4 КГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское \bar{V}_n .

1°. Рассмотрим КГО рекуррентно-параболического пространства V_n на плоское \bar{V}_n . Для начала найдем зависимость между тензорами Римана пространств V_n и \bar{V}_n , находящихся в квази-геодезическом отображении. На основании уравнений (6), (1) и (2) получим:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + A_{ij} \delta_k^h - A_{ik} \delta_j^h + A_{ij} F_k^h - A_{ik} F_j^h + A_{[kj]} F_i^h$$

где мы обозначили $A_{ik} = \varphi_{i,k} + \varphi_i \rho_k - \varphi_k \varphi_i - \varphi_i \varphi_k$.

Пусть риманово пространство \bar{V}_n - плоское, то есть $\bar{R}_{ijk}^h = 0$, тогда

$$R_{ijk}^h + A_{ij} \delta_k^h - A_{ik} \delta_j^h + A_{ij} F_k^h - A_{ik} F_j^h + A_{[kj]} F_i^h = 0 \quad (8)$$

Отсюда после свертывания по индексам h, k найдем:

$$R_{ij} + nA_{\bar{i}\bar{j}} - A_{i\bar{j}} - A_{j\bar{i}} = 0, \quad (9)$$

где R_{ij} - тензор Риччи пространства V_n . Альтернируя это выражение по индексам i, j , имеем:

$$A_{\bar{i}j} = A_{\bar{j}i} \quad (10)$$

и, следовательно,

$$A_{\bar{i}\bar{j}} = 0.$$

В связи с этим (9) дают нам $R_{\bar{i}\bar{j}} = 0$.

Опустим в соотношениях (8) индекс h в V_n :

$$R_{hijk} + A_{\bar{i}j}g_{hk} - A_{\bar{i}k}g_{hj} + A_{ij}F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{[kj]}F_{hi} = 0$$

Произведем здесь сопряжение с аффинором поочередно по индексам k и j и сложим полученные равенства. В результате видим, что

$$(A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}})F_{hk} - (A_{\bar{i}k} + A_{i\bar{k}})F_{hj} + (A_{\bar{k}j} + A_{k\bar{j}})F_{hi} = 0$$

Поднимем здесь индекс h в пространстве V_n , а затем свернем полученное соотношение с B_h^k по индексам h, k с учетом (5):

$$m(A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}}) - (A_{\bar{i}j} + A_{i\bar{j}}) + (A_{\bar{i}j} - A_{j\bar{i}}) = 0$$

Альтернируя данные равенства по индексам i, j , и принимая во внимание (10), обнаруживаем, что:

$$A_{i\bar{j}} = A_{j\bar{i}} \quad (11)$$

Следовательно, предыдущие равенства приводят нас при $n \neq 2$ к

$$A_{\bar{i}j} = -A_{j\bar{i}}. \quad (12)$$

Тогда из (9) следует

$$R_{ij} = -(n+1)A_{\bar{i}j}. \quad (13)$$

Вернемся к выражениям (8) и свернем их с тензором g^{ij} :

$$R_{hk} + g_{hk}A_{\bar{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} + F_{hk}A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + 2A_{\bar{h}k} = 0$$

Производя здесь сопряжение по индексу h , получим

$$A_{\bar{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} = 0,$$

а альтернируя по индексам h, k , соответственно,

$$A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0.$$

В результате последние равенства принимают вид:

$$R_{hk} + 2A_{\bar{h}k} = 0$$

Вычитая из этого выражение равенство (13), обнаруживаем, что:

$$A_{\bar{h}k} = 0,$$

и, значит, $R_{hk} = 0$, то есть наше пространство по необходимости – Риччи-плоское.

С учетом вышесказанного из (8) следует:

$$R_{ijk}^h + A_{ij}F_k^h - A_{ik}F_j^h + A_{[kj]}F_i^h = 0,$$

или, что то же,

$$R_{hijk} + A_{ij}F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{[kj]}F_{hi} = 0$$

Заменим здесь индексы h на k , i на j , а результат вычтем из исходных равенств:

$$(A_{ji} + A_{ij})F_{hk} - A_{ik}F_{hj} + A_{jh}F_{ki} + A_{[kj]}F_{hi} - A_{[hi]}F_{kj} = 0 \quad (14)$$

Поднимая здесь индекс h в V_n и свертывая результат с B_h^k по индексам h, k , ввиду (5) находим:

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

Вследствие этого (14) принимают вид:

$$A_{jh}F_{ki} - A_{ik}F_{hj} + 2A_{kj}F_{hi} - 2A_{hi}F_{kj} = 0$$

Если здесь просимметризовать по h, i , затем поменять индексы h, j местами и результат сложить с исходным равенством, получим

$$A_{kj}F_{hi} - A_{hi}F_{kj} = 0$$

Свертывание полученных соотношений с $g^{k\alpha}B_{\alpha}^j$ по индексам j, k дает нам:

$$A_{hi} = \frac{1}{m}F_{hi}A_{\alpha\beta}g^{\alpha\gamma}B_{\gamma}^{\beta}$$

В результате (8) запишутся в виде:

$$R_{hijk} = C(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \quad (15)$$

где $C = -\frac{1}{m} A_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} B_{\gamma}^{\beta}$ - инвариант, вообще говоря, не являющийся константой.

2°. Покажем, что пространство, в котором выполняются (15), является симметрическим. Для этого найдем ковариантную производную тензора Римана в пространстве V_n , учитывая (2):

$$R_{hijk,l} = K_l(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \quad (16)$$

где

$$K_l = C_{,l} + 2C\rho_l.$$

Проциклируем полученные соотношения по индексам j, k, l , а затем поднимем в них индекс h в пространстве V_n :

$$K_l(F_k^h F_{ij} - F_j^h F_{ik} + 2F_i^h F_{kj}) + K_j(F_l^h F_{ik} - F_k^h F_{il} + 2F_i^h F_{lk}) + \\ + K_k(F_j^h F_{il} - F_l^h F_{ij} + 2F_i^h F_{jl}) = 0.$$

Свернем это равенство с B_h^k по индексам h и k :

$$mK_l F_{ij} - mK_j F_{ik} + 2K_i F_{kj} = 0.$$

В результате циклирования по индексам i, j, l отсюда получаем:

$$(2m + 2)(K_l F_{ij} + K_i F_{jl} + K_j F_{li}) = 0,$$

что вместе с предыдущим равенством дает нам $K_i F_{jl} = 0$ и, следовательно,

$$K_i = C_{,i} + 2C\rho_i = 0.$$

Тогда из (16) следует

$$R_{hijk,l} = 0$$

и, значит, риманово пространство V_n , допускающее нетривиальное КГО на плоское пространство \bar{V}_n , является симметрическим.

3°. Заметим, что ввиду (15) из (3) вытекает градиентность вектора ρ_i , то есть

$$\rho_i = \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^i}.$$

Поэтому из

$$K_i = C_{,i} + 2C\rho_i = 0$$

для инварианта C в (15) имеет место представление

$$C = C_1 e^{-\rho(x)},$$

где C_1 - некоторая константа. В результате (15) принимают вид

$$R_{hijk} = C_1 e^{-\rho(x)} (F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \quad (17)$$

Нами доказана

Теорема 2 Если параболически-рекуррентное пространство V_n при $n \neq 2$ допускает нетривиальное КГО на плоское $\bar{V}_n = \bar{E}_n$, то оно по необходимости является Риччи-плоским, а его тензор Римана имеет структуру (17) при некоторой константе C_1 .

5 Метрики рекуррентно-параболических пространств, допускающих нетривиальное КГО на плоское пространство

Воспользуемся формулой А.П.Широкова для симметрических римановых пространств, позволяющей восстановить метрический тензор в окрестности некоторой точки $M(x_0)$ в V_n :

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!} m_{ij}^s$$

Здесь

$$\begin{aligned} m_{ij}^1 &= m_{ij}, \\ m_{ij}^{k+1} &= m_{\alpha i}^k m_{\beta j}^{\circ\alpha\beta} \\ m_{ij} &= \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta, \end{aligned}$$

$\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ\alpha\beta}{g}$ - значения компонент метрического и обратного ему тензоров в точке $M(x_0)$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta}$ - значение компонент тензора Римана в $M(x_0)$, (y^h) -римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$.

Из (15) с учетом (1) легко видеть, что

$$m_{ij}^k = 0$$

при $k > 1$.

Таким образом, выражение для метрического тензора параболически-рекуррентного пространства V_n , допускающего нетривиальное КГО на плоское пространство \bar{V}_n , имеет вид:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{C_1 e^{-\overset{\circ}{\rho}}}{8} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j},$$

где $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$, $\overset{\circ}{\rho}$ - компоненты тензоров g_{ij} , F_{ij} и инварианта $\rho(x)$ в точке x_0 , y^h - римановы координаты с началом в точке $M(x_0)$, C_1 - некоторая константа.

Список литературы

1. Петров А.З. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, 1968, вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7–21.
2. Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.
3. J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations // Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.
4. В. М. Чернышенко. Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических // Сб. работ мех.-мат. кафедры Днепропетр., ун-та, вып.6. С.105-118.
5. Й. Микеш, Н. С. Синюков. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов. Математика. №1, 1983 55–61.
6. И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.
7. И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств // Proc. Intern. Geom. Center. Vol.7, No.1, 2014. P.53-64.
8. И. Н. Курбатова. О закономерностях канонических квази-геодезических отображений параболически келеровых пространств // Proc. Intern. Geom. Center. Vol.7, No.2, 2014. P.26-35.

Ирина Николаевна Курбатова, Ольга Тарасовна Сисюк

ОНУ, Одесса, Украина

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com, olia-sisiuk@list.ru

Irina N. Kurbatova, Olga T. Sisyuk

Quasigeodesic mappings of recurrent-parabolic spaces

We investigate special type of mappings between Riemannian spaces with recurrent-parabolic structure.

Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях

М. М. Зарічний М. М. Романський О. Г. Савченко

Анотація Розглянуто функтори у асимптотичній категорії, породжені деякими функторами скінченного степеня у категорії компактів. Встановлено деякі геометричні властивості цих функторів.

Ключові слова Асимптотична категорія, функтор, симетричний степінь, проєктивний степінь

УДК 515.12

1 Вступ

Теорія коваріантних функторів скінченного степеня у топологічних категоріях, зокрема, категорії компактних гаусдорфових просторів та категорії метризованих просторів, знаходить різноманітні застосування в геометричній топології (див., наприклад, [8], [4]). Серед різноманітних результатів у цьому напрямку відзначимо збереження функторіальними конструкціями скінченновимірних многовидів ([4]).

У цій статті ми розглядаємо деякі аналоги доведених у цитованих книгах результатів для асимптотичної категорії \mathcal{A} , яку запровадив Дранішников [5] (означення див. нижче). Наш підхід до означення функторів тут аналогічний до запропонованого А. Дранішниковим у [5] — він дещо відрізняється від того, який розглядала О. Шукель в [9].

2 Попередні відомості

Нагадаємо, що об'єктами асимптотичної категорії \mathcal{A} є власні метричні простори, а морфізмами — власні асимптотично ліпшицеві відображення.

Метричний простір (X, d) називаємо власним, якщо кожна замкнена куля в X компактна.

Відображення $f: X \rightarrow Y$ називають власним, якщо прообраз кожної компактної множини є компактним.

Відображення $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ називається асимптотично ліпшицевим, якщо існують два таких числа, λ і s ($\lambda > 0, s \geq 0$), що $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + s, x, y \in X$.

Нехай d — метрика на множині X і \sim — відношення еквівалентності на X . Фактор-метрика ρ на множині X/\sim задається так: якщо $[x], [y] \in X/\sim$, то $\rho([x], [y])$ — це інфімум сум вигляду $\sum_{i=1}^n d(a_i, b_i)$, де $x \sim a_1, b_n \sim y, a_{i+1} \sim b_i, i = 1, \dots, n-1$. Взагалі кажучи, функція ρ є лише псевдометрикою, однак у тих випадках, що ми розглядаємо, вона є метрикою.

Конус $\text{Cone}(X)$ над компактним метричним простором (X, d) — це факторпростір добутку $(X \times \mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності \sim задається умовою $(x, 0) \sim (y, 0), x, y \in X$. У літературі зустрічаються різні метризації конусів. Зокрема, якщо $X \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то конус $\text{Cone}(X)$ природно ототожнюється з підпростором $\{tx \mid x \in X, t \in \mathbb{R}_+\}$ і метрика на ньому індукується з \mathbb{R}^{n+1} . Якщо ж (X, d) — метричний простір і $\text{diam}(X) \leq 2$, то метрика \tilde{d} на $\text{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\tilde{d}((x, t), (y, s)) = \min\{t, s\}d(x, y) + |t - s|.$$

Конструкція конуса функторіальна. Якщо задано відображення $f: X \rightarrow Y$ метричних компактів, то відображення $\text{Cone}(f): \text{Cone}(X) \rightarrow \text{Cone}(Y)$ означається формулою $\text{Cone}(f)(x, t) = (f(x), t)$. Проте відомо, що незалежно від вибору метрики, функтор конуса зберігає властивість ліпшицевості відображень.

Лема 1 *Нехай $f: X \rightarrow Y$ — ліпшицеве відображення метричних компактів. Тоді відображення $\text{Cone}(f): \text{Cone}(X) \rightarrow \text{Cone}(Y)$ (асимптотично) ліпшицеве.*

Ізоморфізмами в категорії \mathcal{A} є гомеоморфізми $f: X \rightarrow Y$ такі, що f і f^{-1} — асимптотично ліпшицеві.

У статті [5] А. Дранішников означив асимптотичний добуток

$$X \tilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) \mid d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. В дусі цього означення ми розглядатимемо деякі функтори у категорії \mathcal{A} .

Надалі в евклідовому просторі \mathbb{R}^n відміченою вважається точка 0 .

3 Функтори в асимптотичних категоріях

Нижче ми розглядаємо деякі функтори у категорії \mathcal{A} , породжені функторами скінченного степеня у категорії компактів.

3.1 Симетричні степені

Нехай \sim — відношення еквівалентності на степені X^n метричного простору X , що задається умовою: $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, \dots, n\}$ така що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X в категорії \mathcal{A} і позначають $SP^n(X)$.

Клас еквівалентності відношення \sim , що містить точку (x_1, \dots, x_n) , позначають $[x_1, \dots, x_n]$. Якщо $x_0 \in X$ — відмічена точка, то приймемо

$$\widetilde{SP}^n(X) = \{[x_1, \dots, x_n] \in SP^n(X) \mid d(x_i, x_0) = d(x_j, x_0), i, j = 1, \dots, n\}.$$

Метрику \hat{d} на $\widetilde{SP}^n(X)$ задають формулою

$$\hat{d}([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \min_{\sigma} \max_i d(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Нехай M — лист Мебіуса в \mathbb{R}^3 , заданий стандартними параметричними рівняннями: $x(u, v) = (1 + (v/2) \cos(u/2)) \cos u$, $y(u, v) = (1 + (v/2) \cos(u/2)) \sin u$, $z(u, v) = (v/2) \sin(u/2)$, де $0 \leq u < 2\pi$ і $-1 \leq v \leq 1$.

Пропозиція 1 В асимптотичній категорії \mathcal{A} , другий симетричний ступінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний конусу $\text{Cone}(M)$.

Доведення 1 Зобразимо коло S^1 як факторпростір відрізка $[0, 1]/\sim$, де $0 \sim 1$. Кожній невпорядкованій парі $[x, y] \in SP^2([0, 1])$ ставимо у відповідність пару

$$(\min\{x, y\}, \max\{x, y\}) \in \Delta^2 = \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid s \geq t\}.$$

Це породжує природне відображення $SP^2(S^1) = SP^2([0, 1]/\sim)$ в Δ^2/\sim , де \sim — відношення еквівалентності на Δ^2 , задане умовами: $(x, 0) \sim (1, x)$. Нескладно переконатися, що це відображення ліпшицеве.

Наступним кроком є відобразити біліпшицево простір Δ^2 / \sim на M . Нескладно зробити це так, що образом середньої лінії $y = x - \frac{1}{2}$ в Δ^2 / \sim є середня лінія $v = 0$ на листі Мебіуса. Відповідно, паралельні до середньої лінії переходять у паралельні до середньої лінії на M . Вказане відображення нескладно зробити біліпшицевим.

Нарешті, скориставшись лемою 1, будемо шукане відображення $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2) = \text{Cone}(SP^2(S^1)) \rightarrow \text{Cone}(M)$.

Пропозиція 2 Симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}_+^2)$ в асимптотичній категорії \mathcal{A} ізоморфний \mathbb{R}_+^3 .

Доведення 2 Доведемо, що $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}_+^2)$ ізоморфний просторові $X = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z < x\}$, який, у свою чергу, ізоморфний просторові \mathbb{R}_+^3 (див., наприклад [5]).

Означимо відображення $f: \widetilde{SP}^2(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow X$ формулою

$$f([(a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (a \cos \alpha_2, a \sin \alpha_2)]) = (a \cos \frac{\alpha_1}{2}, a \sin \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), \alpha_1 \geq \alpha_2.$$

Доведемо, що відображення f^{-1} ліпшицеве. Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $b > a$. Тоді

$$\hat{d}([(a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (a \cos \alpha_2, a \sin \alpha_2)], [(b \cos \beta_1, b \sin \beta_1), (b \cos \beta_2, b \sin \beta_2)]) =$$

$$= \max\{d((a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (b \cos \beta_1, b \sin \beta_1)), d((a \cos \alpha_2, a \sin \alpha_2), (b \cos \beta_2, b \sin \beta_2))\} \leq$$

$$\leq d((a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (b \cos \beta_1, b \sin \beta_1)) + |\alpha_2 a - \beta_2 b| <$$

$$< 4\rho \left((a \cos \frac{\alpha_1}{2}, a \sin \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), (b \cos \frac{\beta_1}{2}, b \sin \frac{\beta_1}{2}, \beta_2 b) \right).$$

Доведемо тепер, що відображення f ліпшицеве. Справді,

$$\rho \left((a \cos \frac{\alpha_1}{2}, a \sin \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), (b \cos \frac{\beta_1}{2}, b \sin \frac{\beta_1}{2}, \beta_2 b) \right) \leq$$

$$\leq 2d((a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (b \cos \beta_1, b \sin \beta_1)) + |\alpha_2 a - \beta_2 b| \leq$$

$$\leq 3 \max\{d((a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (b \cos \beta_1, b \sin \beta_1)), d((a \cos \alpha_2, a \sin \alpha_2), (b \cos \beta_2, b \sin \beta_2))\} =$$

$$= 3\hat{d}([(a \cos \alpha_1, a \sin \alpha_1), (a \cos \alpha_2, a \sin \alpha_2)], [(b \cos \beta_1, b \sin \beta_1), (b \cos \beta_2, b \sin \beta_2)]).$$

3.2 Гіперсиметричні степені і теорема Ботта

Нехай (X, d) — метричний простір з відміченою точкою x_0 . Позначимо через $\text{exp}_n(X)$ множину всіх непорожніх підмножин у X потужності $\leq n$ (гіперсиметричний степінь простору X). Прийємо

$$\widetilde{\text{exp}}_n(X) = \{A \in \text{exp}_n(X) \mid \|x\| = \|y\| \text{ для всіх } x, y \in A\}.$$

Теорема 1 *Простір $\widetilde{\text{exp}}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний \mathbb{R}^4 в категорії \mathcal{A} .*

Цей результат є аналогом теореми Р. Ботта [3], яка стверджує, що $\text{exp}_3 S^1$ гомеоморфне S^3 . На аналізі доведення Ботта базується доведення теореми 1. Нехай $S^1 = [0, 1]/\sim$, де $0 \sim 1$. Нехай $\Delta^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ і \sim — відношення еквівалентності на Δ^3 , задане умовами: $(0, x, y) \sim (x, y, 1)$, $(x, x, y) \sim (x, y, y)$.

Громіздкими, але безпосередніми обчисленнями можна показати, що гомеоморфізм $\text{exp}_3(S^1) = \text{exp}_3([0, 1]/\sim)$ і Δ^3/\sim (остання множина наділяється фактор-метрикою, породженою евклідовою метрикою) є біліпшицевим. У доведенні Ботта гомеоморфізм між Δ^3/\sim і S^3 здійснюється за допомогою зображення сфери як об'єднання двох заповнених торів. Знову ж таки, аналіз звужень гомеоморфізмів на цих заповнених торах та їх склеювання показує біліпшицевість результуючого гомеоморфізму $f: \text{exp}_3 S^1 \rightarrow S^3$. Тоді відображення

$$\text{Cone}(f): \text{Cone}(\text{exp}_3 S^1) = \widetilde{\text{exp}}_3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Cone}(S^3) \simeq \mathbb{R}^4$$

є ізоморфізмом у категорії \mathcal{A} .

3.3 Ймовірнісні міри

Для кожного натурального n через $P_n(X)$ позначаємо множину всіх ймовірнісних мір на множині X , носії яких мають не більше ніж n елементів. Кожен елемент з $P_n(X)$ має вигляд $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, де $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, і $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Якщо d — метрика на множині X , то на множині $P_n(X)$ можна задати метрику Канторовича-Рубінштейна. Нехай $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, $\nu = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{y_i}$, тоді

$$d_{KR}(\mu, \nu) = \inf \left\{ \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} d(x_i, y_j) \mid \gamma_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = \beta_j, \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = \alpha_i \right\}.$$

Пропозиція 3 Відображення $g: SP^n(X) \rightarrow P_n(X)$, задане формулою $g([x_1, \dots, x_n]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, – білінійне вкладення.

Доведення 3 Нехай $x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n] \in SP^n(X)$ і $\hat{d}(x, y) \leq c$, для деякого $c > 0$. Тоді існує перестановка σ така, що $d(x_i, y_{\sigma(i)}) \leq c$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Нехай $\mu = g(x), \nu = g(y)$. Прийнемо у формулі для відстані Канторовича-Рубінштейна $\gamma_{i\sigma(i)} = \frac{1}{n}$ і $\gamma_{ij} = 0$ для решти i, j . Тоді маємо $d_{KR}(\mu, \nu) \leq \hat{d}(x, y)$.

Крім того, очевидно, що $\hat{d}(x, y) \leq nd_{KR}(\mu, \nu)$.

Якщо $x_0 \in X$ – відмічена точка, то прийнемо

$$\tilde{P}_n(X) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid d(x_i, x_0) = d(x_j, x_0), i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Теорема 2 Простір $\tilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний \mathbb{R}^4 у категорії \mathcal{A} .

Доведення цього факту базується на гомеоморфізмі просторів $P_2(S^1)$ та S^3 .

3.4 Проективні степені

У статті [5] А. Дранішников означив надбудову $\sum X$ простору X за допомогою формули $\sum X = X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2 / i_{\pm}(X)$, де вкладення $i_{\pm}: X \rightarrow X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2$ визначаються формулою $i_{\pm}(x) = J^{-1}(x, \pm \|x\|)$; тут відображення $J: X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2 \rightarrow X \times \mathbb{R}$ задається формулою $J(x, (s, t)) = (x, s)$, $x \in X, t \in \mathbb{R}_+, s \in \mathbb{R}$.

Поняття проективного степеня означив А. Шанковський [11]. Точка $y \in Y$ називається істотною координатою точки (y_1, \dots, y_n) , якщо множина $\{j \mid y_j = y\}$ складається з непарного числа елементів. Означуємо n -й проективний степінь простору X як факторпростір X^n / \sim , де відношення нееквівалентності \sim означене умовою: $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$, якщо (x_1, \dots, x_n) і (y_1, \dots, y_n) мають однакову множину істотних координат. Позначення: $\text{Pr}^n(X)$.

Нескінченний проективний простір розглядали Дольд і Том [12].

Зауважимо, що цей проективний простір може бути описаний також як факторпростір симетричного добутку $SP^n(X)$. Розглянемо кожну точку симетричного добутку як формальну суму $\sum n_i x_i$, де n_i – невід’ємні цілі числа, $\sum n_i = n$, і точки x_i попарно різні.

Означимо простір $\tilde{P}^n(X)$ як факторпростір симетричного степеня $\widetilde{SP}^n(X)$ за відношенням еквівалентності: $\sum n_i x_i \sim \sum m_i x_i$ тоді і лише тоді, коли $n_i \equiv m_i \pmod 2$ для кожного i .

Пропозиція 4 Проективний квадрат $\text{Pr}^2(\mathbb{R})$ ізоморфний надбудові $\sum \mathbb{R}_+$.

Доведення 4 Для простоти $\sum \mathbb{R}_+$ ототожнимо з множиною $Y = J(\sum \mathbb{R}_+)$. Означимо відображення $\varphi: Y \rightarrow \text{Pr}^2(\mathbb{R})$ формулою

$$\varphi((r \cos \alpha, r \sin \alpha)) = \left[r \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right), r \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Тоді для оберненого відображення одержуємо

$$\varphi^{-1}([r \cos \alpha, r \sin \alpha]) = \left(r \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8} \right), r \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right).$$

Неважко побачити, що відображення φ ліпшицеве з $\lambda = 2$, а φ^{-1} ліпшицеве з $\lambda = 1$.

З деяких результатів асимптотичної топології випливає, що аналогом сфери S^n у асимптотичній категорії \mathcal{A} є евклідовий простір \mathbb{R}^{n+1} . Аналогом проективного простору $\mathbb{R}P^n$ є факторпростір \mathbb{R}^{n+1}/\pm .

Теорема 3 У категорії \mathcal{A} простори $\tilde{P}^n(\mathbb{R}^2/\pm)$ та \mathbb{R}^{n+1}/\pm ізоморфні.

Доведення цього результату базується на результаті Шанковського [11] про гомеоморфізм просторів $\text{Pr}^n(S^1) = \text{Pr}^n(\mathbb{R}P^1)$ та $\mathbb{R}P^n$.

3.5 Суперрозширення $\lambda_3(X)$

Поняття суперрозширення $\lambda(X)$ топологічного простору X запровадив Й. де Гроот (див. необхідну інформацію в [8]). Нижче нам знадобиться альтернативний опис підмножини $\lambda_3(X) \subset \lambda(X)$, що складається з максимальних зчеплених систем в X , носії яких мають потужність ≤ 3 .

Нехай $x, y, z \in X$. Позначимо через $[x, y, z]$ сім'ю замкнених підмножин $A \subset X$, що мають властивість: A містить принаймні одну з трьох множин $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$. Носієм елемента $[x, y, z]$ називаємо множину:

- 1) $\{x, y, z\}$, якщо всі три точки x, y, z попарно різні;
- 2) $\{t\}$, якщо t зустрічається щонайменше двічі у послідовності x, y, z .

Позначення: $\text{supp}([x, y, z])$.

Нехай d — метрика на множині X . Тоді на множині $\lambda_3(X) = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in X\}$ можна означити метрику d_V :

$$d_V([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2]) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid \varepsilon - \text{окіл кожного елемента з } [x_1, y_1, z_1] \text{ містить елемент з } [x_2, y_2, z_2] \}$$

(див [8]).

В [1] доведено, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3 .

Аналогічно до розглянутого вище, для кожного власного метричного простору (X, d) з відміченою точкою $x_0 \in X$ означимо $\tilde{\lambda}_3(X)$ як підмножину в $\lambda_3(X)$, утворену елементами $[x, y, z]$, такими, що функція $\|\cdot\|$ стала на множині $\text{supp}([x, y, z])$.

Наводимо без доведення такої результат.

Теорема 4 Простір $\tilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний \mathbb{R}^4 в категорії \mathcal{A} .

Література

1. М.М. Заричный, *Фундаментальная группа суперрасширения $\lambda_n(X)$* . - В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ, 1984 - С. 24-31.
2. В.В. Федорчук, В.В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*. - - М. - 2006.
3. R. Bott, *On The Third Symmetric Potency of S_1* . - Fund. Math. 39 (1952), 264–268.
4. С. Н. Wagner, *Symmetric, cyclic, and permutation products of manifolds*. - Rozprawy Matematyczne tom/nr w serii: 182. wydano: 1980
5. A. Dranishnikov, *Asymptotic topology*. - Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.
6. A. Dranishnikov, M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension*. - Topol. Appl., Vol. 140, №2-3 (2004), P. 203-225.
7. I. Protasov, M. Zarichnyi, *General asymptology*. - (Math. Studies: Monograph Series. - Vol. XII) Lviv: VNTL Publ, (2007), 219 P.
8. A. Teleiko, M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces*. - Mathematical Studies Monograph Series, 5. VNTL Publishers, Lviv, 1999. 256 pp.
9. О. Shukel', *Functors of finite degree and asymptotic dimension zero*. - Mat. Stud. 29(2008), №1, 101–107.
10. J. Mostovoy, *Lattices in \mathbb{C} and finite subsets of a circle*. - Amer. Math. Monthly 111(4): 357-360 (2004)
11. A. Szankowski, *Projective potencies and multiplicative extension operators*. - Fundamenta Mathematicae (1970) Volume: 67, Issue: 1, page 97–113.
12. A. Dold, R. Thom, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte*. - Annals of Mathematics. Second Series 67(1958), 239—281

М. М. Зарічний

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, вул. Університетська, 1

E-mail: mzar@litech.lviv.ua

М. М. Романський

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,

вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, Львівська обл.

E-mail: romanskiy.miha@ukr.net

О. Г. Савченко

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, Львівська обл.

E-mail: romanskiy.miha@ukr.net

Mykhailo Zarichnyi, Mykhailo Romanskyi, Aleksandr Savchenko

Functors of finite degree in the asymptotic category

We consider functors in the asymptotic category generated by some functors of finite degree in the category of compacta. Some geometric properties of these functors are established

Geometry of Chaos: Advanced computational approach to treating chaotic dynamics of some hydroecological systems

A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, V.V. Buyadzhi,
E.P. Solyanikova

Abstract In the paper we go on our work on application of the chaos theory and non-linear analysis technique to studying chaotic features of different nature systems. Here there are presented the results of using an advanced chaos-geometric approach to treating chaotic dynamics in definite hydroecological systems. Generally, an approach combines together application of the advanced mutual information scheme, Grassberger-Procachi algorithm, Lyapunov exponent's analysis etc.

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, nature system

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

In this paper we go on our work on application of the chaos theory and non-linear analysis technique to studying chaotic features of different nature systems (see, for example [1,2]). The theoretical basis's of the chaos-geometric combined approach to treating of chaotic behaviour of complex dynamical systems are in details in series of ref. [1-10]. Generally, an approach combines together application of the advanced mutual information scheme, Grassberger-Procachi algorithm, Lyapunov exponent's analysis etc. It is important to note that this approach has been successfully applied to studying dynamics not only mathematical and physical systems. Very impressive application is the investigated dynamics of the atmospheric pollutants concentrations and forecasting their temporal evolution.

Besides, in Ref [2] it has been numerically vstudied a chaotic dynamics of the pollutants concentration in some hydroecological, namely, water system. The successful application of new chaos-geometrical approach to studying dynamics of the different nature systems demonstrates its universal character. Here we present the improved numerical results of using an advanced chaos-geometric approach to treating chaotic dynamics in the definite hydroecological system: water basins of some rivers. It has been estimated an effect of anthropogenic contamination for a number of basins of the Small Carpathian by some pollutants (nitrates and sulphates) with revealing the chaos elements in the temporary sets of the nitrates and sulphates concentrations. At first it has been realized am effective model of the short-terminal forecast for concentrations of pollutants on the example of forecasting the nitrates and sulphates concentrations evolution in a number of basins of the Small Carpathian.

2. An advanced chaos-geometrical approach to hydroecological system dynamics: Short description

Following to [1-10], further we formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

Let us remind that following to [2,10], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation

function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. In ref. [4] it is suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

In [1,10] it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

The fundamental problem of theory of any dynamical system is in predicting the evolutionary dynamics of a chaotic system. Let us remind following to [1-,2,10] that the cited predictability can be estimated by the Kolmogorov entropy, which is proportional to a sum of positive LE. As usually, the spectrum of LE is one of dynamical invariants for non-linear system with chaotic behaviour. The limited predictability of the chaos is quantified by the local and global LE, which can be determined from measurements. The LE are related to the eigenvalues of the linearized dynamics across the attractor. Negative values show stable behaviour while positive values show local unstable behaviour. For chaotic systems, being both stable and unstable, LE indicate the complexity of the dynamics. The largest positive value determines some average prediction limit. Since the LE are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and hence the choice of trajectory, and they do comprise an invariant measure of the attractor. An estimate of this measure is a sum of the positive LE. The estimate of the attractor dimension is provided by the conjecture d_L and the LE are taken in descending order. The dimension d_L gives values close to the dimension estimates discussed earlier and is preferable when estimating high dimensions. To compute LE, we use a method with linear fitted

map, although the maps with higher order polynomials can be used too. Non-linear model of chaotic processes is based on the concept of compact geometric attractor on which observations evolve. Since an orbit is continually folded back on itself by dissipative forces and the non-linear part of dynamics, some orbit points $[1,10] \mathbf{y}^r(k)$, $r = 1, 2, \dots, N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k . One can then choose some interpolation functions, which account for whole neighbourhoods of phase space and how they evolve from near $\mathbf{y}(k)$ to whole set of points near $\mathbf{y}(k+1)$. The implementation of this concept is to build parameterized non-linear functions $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ which take $\mathbf{y}(k)$ into $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ and use various criteria to determine parameters \mathbf{a} . Since one has the notion of local neighbourhoods, one can build up one's model of the process neighbourhood by neighbourhood and, by piecing together these local models, produce a global non-linear model that capture much of the structure in an attractor itself.

3. The numerical results and conclusions

We continued the investigation of the pollution dynamics of the hydrological systems, in particular, variations of the nitrates concentrations in the river's water reservoirs in the Earthen Slovakia by using the non-linear prediction approaches and chaos theory method (in versions) [1-10]. As in Ref. [2] the initial data had been taken from empirical observations on a number of the watersheds in the region of the Small Carpathians, carried out by coworkers of the Institute of Hydrology of the Slovak Academy of Sciences [11]. The temporal changes in the concentrations of nitrates in the catchment areas are listed in [11]. In Ref. 2 we have listed data on values of the autocorrelation function C_L , the first minimum of mutual information I_{min1} , the correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the concentration of nitrates in some watersheds of the Small Carpathians, namely, Manelo, Ondava, Gidra, Vydric. Here we have maken a numerical analysis of time series for other four watersheds, namely, Blatina, Parna, Lodomirka, Babie.

As usually, the first step is in computing the values of the autocorrelation function C_L , the first minimum of mutual information I_{min1} for the concentration of nitrates in four another watersheds (Blatina, Parna, Lodomirka, Babie). The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ , but in [6,9] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the

dimension of attractor for all values. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using Grassberger-Procaccia method [1,16]. Here the outcome is explained not only inappropriate values of τ but also shortcomings of correlation dimension method. If algorithm [14] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ . If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 6$ for all water pollutants.

Table 1 shows the correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the concentration of nitrates in the watershed of the Small Carpathians.

Table 1. The Time lag (τ), correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the concentration of nitrates in the watershed of the Small Carpathians.

	Blatina	Parna	Ladomirka	Babie
τ	18	18	10	8
(d_2)	4.91	4.17	3.88	4.89
(d_E)	5	5	4	5
d_L	5.02	4.83	3.12	4.46
Pr_{max}	13	12	7	8

As usually, the sum of the positive LE determines the Kolmogorov entropy, which is inversely proportional to the limit of predictability (Pr_{max}). Let us remind [1,2] since the conversion rate of the sphere into an ellipsoid along different axes is determined by the LE, it is clear that the smaller the amount of positive dimensions, the more stable is a dynamic system. Consequently, it increases the predictability of it. As the numerical calculation shows the presence of the two (from six) positive λ_i suggests the system broadens in the line of two axes and converges along four axes that in the six-dimensional space. The time series of concentrations at the site of the Blatina watershed have the highest predictability than other time series.

Therefore, we have presented the further results of an effective application of an advanced chaos-geometric approach to treating of non-linear dynamics of the complex nature, namely, hydroecological systems. The chaotic features in the time series of the nitrates concentrations in four new river's water reservoirs in

the Earthen Slovakia ate numerically analyzed and an availability of the middle-D chaos has been proven.

References

1. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
2. Glushkov A.V., Buyadzhi V.V., Ponomarenko E.L., Geometry of Chaos: Advanced approach to treating chaotic dynamics in some nature systems// Proc. Int. Geom. Centre.-2014.-Vol.7,N1.-P.24-29
3. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-Vol.6,N1.-P.6-12.
4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A. Atmospheric teleconnection patterns: wavelet analysis// Nonlin. Proc.in Geophys.-2004.-V.11,N3.-P.285-293.
5. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V., Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
6. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284-7292.
7. Bunyakova Yu.Ya., Khetselius O.Yu., Non-linear prediction statistical method in forecast of atmospheric pollutants//Proc. of the 8th International Carbon Dioxide Conference.-Jena (Germany).-2009.- P.T2-098.
8. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Non-linear prediction method in forecast of air pollutants CO_2 , CO // Transport and Air Pollution. - Zurich: ETH University Press (Switzerland). -2010. - P.131-136.
9. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems - Theory and Applications. - Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.- LIF111 (6p.).
10. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. of Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N3.-P.6-14.
11. Pekarova P., Miklanek P., Konicek A., Pekar J.: Water quality in experimental basins. National Report 1999 of the UNESKO.-Project 1.1.-Intern.Water Systems. 1999, 1-98.
12. KoP-ak K., Saylan L., Sen O., Nonlinear time series prediction of O_3 concentration in CityplaceIstanbul. *AtmosphericEnvironment* (Elsevier) 34, 2000, 1267-1271.
13. Kuznetsov S.P., Dynamical chaos.-Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P.
14. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.
15. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712-716.
16. Grassberger P., SnplaceProcaccia SnL., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189-208.
17. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134-1140.
18. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366-381
19. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230-242
20. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082-1085
21. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B., Farmer J., Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data// Physica D.-1992.-Vol.58.-P.77-94.
22. Kaplan J.L., Yorke J.A., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in: Peitgen H.-O., Walter H.-O. (Eds.), Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics No. 730. Springer, Berlin.-1979.-pp.204-227.

**A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, V.V. Buyadzhi,
E.P. Solyanikova**
Mathematics Department
Odessa State Environmental University, Ukraine
E-mail: dirac13@mail.ru

Chaos-Geometric approach to analysis of chaotic attractor dynamics for the one-ring fibre laser

G.P. Prepelitsa

Abstract Earlier we have developed new chaos-geometric approach to modelling and analysis of nonlinear processes dynamics of the complex systems systems. It combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc. Here we present the results of its application to studying low-and high-D attractor dynamics of the one-ring fibre laser

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, laser system

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

Earlier [1]–[8] we have developed a new, chaos-geometrical combined approach to treating of chaotic low- and high-D attractor dynamics of complex dynamical systems and forecasting its temporal evolution. Here we use this approach to carry out an analysis of nonlinear processes dynamics in the one-ring fibre laser. Such systems has a great practical interest and is used in different technical applications. Our approach combines together application of a few techniques, namely, an advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc. Let us remind that during the last two decades, many studies in various fields of science have appeared, in which chaos theory was applied to a great number of dynamical systems, including those are originated from nature [5]–[16]. The outcomes of such studies are very encouraging, as they reported very good predictions using such an approach for different systems.

2. Chaos-geometrical approach to the one-ring fibre laser attractor dynamics

In this work we study low-and high-D ttractor dynamics of the the one-ring fibre laser. To speak more exactly, we make a detailes analysis of the output voltage temporal variations series with two controlling parameters (the modulation frequency f and dc bias voltage of the electro-optical modulator) and as an analysis technique use the non-linear prediction approache and chaos theory method (in versions) [1]–[8]. The output voltage temporal variations series for the the one-ring fibre laser are described and listed in [9].

The fundamental aspects of our chaos-geometric approach version have been in details presented earlier. So, below, we will give only ashort description of the fundamental sapects, following to our papers [1]–[8]. As usually, one should formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

Let us remind that following to [1]–[8], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under-or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept

of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. Earlier it was suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

In [5]–[6] it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

3. Conclusions

As input data we have used detailed numerical data for time series of the output voltage temporal variations series in dependence of with two controlling parameters: the modulation frequency f and dc bias voltage of the electro-optical modulator [9]. In depending upon f and dc bias voltage V values there are realized 1-period ($f = 75\text{MHz}$, $V = 10\text{V}$ and $f = 60\text{MHz}$, $V = 4\text{V}$), 2-period ($f = 68\text{MHz}$, $V = 10\text{V}$ or $f = 60\text{MHz}$, $V = 6\text{V}$), chaotic ($f = 64\text{MHz}$, $V = 10\text{V}$ and $f = 60\text{MHz}$, $V = 10\text{V}$) regimes in dynamics of the system. We are interested by a chaotic regime, when there is realized chaotic attractor.

In table 1 we list the values of the autocorrelation function C_L and the first minimum of mutual information I_{min1} for the output voltage amplitude of the one-ring fiber laser system. It is analyzed the time series of the output voltage amplitude when the controlling parameter, namely frequency f of the electro-optical modulator is changing (correspondingly, the dc bias voltage parameter is constant). We call this regime as the chaos 1 one.

Table 1. Time lags (hours) subject to different values of C_L , and first minima of average mutual information, I_{min1} , (time series of output voltage amplitude of the one-ring fiber laser system).

	Series 1	Series 2	Series 3	Series 4
$C_L=0.1$	78	96	124	138
$C_L=0.5$	11	13	9	22
I_{min1}	14	16	18	230

The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ , but in [10]–[12] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values in Table 1. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using Grassberger-Procaccia method [12]. Here the outcome is explained not only inappropriate values of τ but also shortcomings of correlation dimension method. If algorithm [4] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ . If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 6$.

Table 2 shows the correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the output voltage amplitude in dependence of changing the frequency f (dc bias voltage of the electro-optical modulator is fixed; chaos 1 regime) and changing dc bias voltage of the electro-optical modulator (frequency f is constant; chaos 2 regime).

Table 2. The Time lag (τ), correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L) for time series of the output voltage amplitude in dependence of changing the frequency f (dc bias voltage of the electro-optical modulator is fixed; chaos 1 regime) and changing dc bias voltage of the electro-optical modulator (frequency f is constant; chaos 2 regime).

	Chaos 1	Chaos 2
τ	6	6
(d_2)	3.0	3.1
(d_E)	4	4
d_L	2.85	2.88

Further the numerical calculation give the following positive values results for two Lyapunov's exponents (LE) λ_i , namely, one LE pair for chaos 1 regime: 0.168 and 0.0212 and for chaos 2 regime: 0.172 and 0.0215). It is obvious that the positive confirm a chaotic feature of the system dynamics. Besides, we have found that the time series of the output voltage amplitude in the chaos regimes have

acceptable predictability than other time series, for example, in the hyperchaos one.

So, in this paper we first have considered an application of an advanced chaos-geometrical approach (combination of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc) to numerical modelling and analysis of an attractor dynamics of the one-ring fibre laser phase space.

References

1. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-Vol.6.-N1.-P6-12.
2. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Florko T.A., Prepelitsa G.P., Chaos-Geometric approach to analysis of quantum-generator systems// Proc. Int. Geom. Centre.- 2014.-Vol.7,N4.-P.77-82.
3. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V., Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of coupled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
4. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284-7292.
5. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Buyadzi V.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics during perception process// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering (Gdansk,EU, World Sci.)-2014.-Vol.21.-P.143-150.
6. Glushkov A.V., Prepelitsa G.P., Lepikh Ya.I., Buyadzi V.V., Ternovsky V.B., Zaichko P.A., Chaotic dynamics of non-linear processes in atomic and molecular systems in electromagnetic field and semiconductor and fiber laser devices: new approaches, uniformity and charm of chaos// Sensor Electronics and Microsystems Techn.-2014.-Vol.11,N4.-P.43-57.
7. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems – Theory and Applications. – Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.- LIF111 (6p).
8. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. of Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N3.-P.6-14.
9. Feng C., Yu-Ling F., Zhi-Hai Y., Jian F., Yuan-Chao S., Yu-Zhu Z.: Experimental investigation on chaos generation in erbium-doped fiber single-ring lasers// Chin. Phys. B.-2013.-Vol. 21.-P.100504.
10. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.
11. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712-716.
12. Grassberger P., Procaccia I., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189-208.
13. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134-1140.
14. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366-381
15. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230-242

16. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082-1085

G.P. Prepelitsa

Information Technologies Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: quantpre@mail.ru

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук

(перелік

№ 1-05/3 від 14.04.2010 // Бюлетень ВАК України. 2010. № 4)

Наклад 300 примірників. Зам. №

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,

кафедра вищої математики,

вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net

website: <http://geometry-center.com>

ISSN 2072-9812 (print). ISSN 2409-8906 (Online).

ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.

2015. ТОМ 8. №1. 1-107

Журнал індексується в WorldCat;



Журнал індексується в Bielefeld Academic Search Engine (BASE);



Журнал індексується в Research Bible;



Журнал індексується в Google Scholar;



Журналу присвоєно Міжнародний номер наукових періодичних видань ISSN для друкованих видань ISSN print 2072-9812, а також для онлайн версії журналу ISSN online 2409-8906



Журнал сертифікований за стандартом якості ISO 26324:2012

