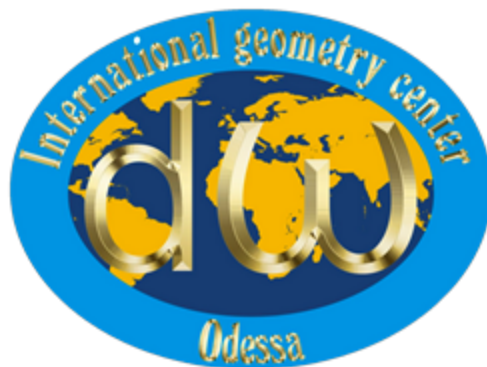

ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)
ISO 26324:2012

PROCEEDINGS
of the
INTERNATIONAL GEOMETRY
CENTER

Volume 8, No. 2, 2015





ISSN 2072-9812 (print)
ISSN 2409-8906 (Online)

Благодійний фонд наукових досліджень
"Наука"

Одеська національна академія харчових
технологій

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Том. 8, No. 2, 2015

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО
ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЦЕНТРА

Том. 8, No. 2, 2015

PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL
GEOMETRY CENTER

Vol. 8, No. 2, 2015

Видається з 2008 року
виходить 4 рази на рік

Одеса
"Друкарський Дім"
2015

Засновники:

Благодійний фонд наукових досліджень "Наука"
Одеська національна академія харчових технологій

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеської національної академії харчових технологій
(№ 13 від 03.07.2015)

Головний редактор: **Пришляк О.О.**

Заступники головного редактора: **Микитюк І.В., Мілка А.Д.,
Шелєхов О.М.**

Відповідальні редактори: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Відповідальні секретарі: **Мойсеєнок О.П., Федченко Ю.С.**

Редакційна колегія:

| | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|
| Балан В. | Кирилов В.Х. | Сергеєва О.Є. |
| Банах Т.О. | Максименко С.І. | Федосов С.Н. |
| Волков В.Е. | Машков О.А. | Фоменко А.Т. |
| Глушков О.В. | Мікеш Й. | Фоменко В.Т. |
| Задорожний В.Г. | Мормул П. | Хаддад М. |
| Зарічний М.М. | Рахула М.О. | Швець В.Т. |
| Кац І.С. | Сабітов І.Х. | Шуригін В.В. |
| Кириченко В.Ф. | Савченко О.Г. | |

©Благодійний фонд наукових досліджень "Наука", 2015

Editor-in-Chief: **Prishlyak A. O.**

Deputies Editor-in-Chief: **Mikityuk I. V., Milka A. D.**
Shelekhov A. M.

Managing Editors: **Konovenko N. G., Kuzakon V. M.**

Executive Secretary: **Moiseenok A. P., Fedchenko Ju. S.**

Editorial Board:

| | | |
|----------------------|------------------------|-------------------------|
| Balan V. | Kirillov V.Kh. | Sergeeva A.S. |
| Banah T.S. | Kirichenko V.F. | Shvets V.T. |
| Fedosov S.N. | Maksimenko S.I. | Shurygin V.V. |
| Fomenko A.T. | Mashkov O.A. | Sabitov I.Kh. |
| Fomenko V.T. | Mikes J. | Volkov V.E. |
| Glushkov A.V. | Mormul P. | Zadorozhnyi V.G. |
| Haddad M. | Rahula M.O. | Zarichnyi M.M. |
| Kats I.S. | Savchenko O.G. | |

©Charity Fund for Scientific Research "Science", 2015

Главный редактор: **Пришляк А.О.**

Заместители главного редактора: **Микитюк И.В., Милка А.Д., Шелехов А.М.**

Ответственные редакторы: **Коновенко Н.Г., Кузаконь В.М.**

Ответственные секретари: **Мойсеенок А.П., Федченко Ю.С.**

Редакционная коллегия:

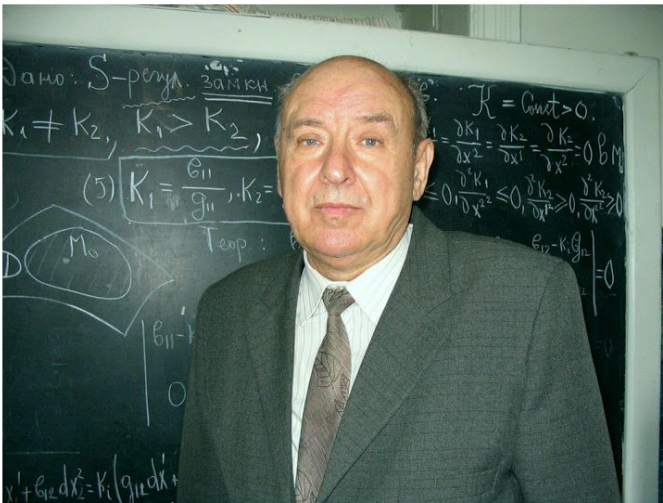
| | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|
| Балан В. | Кириллов В.Х. | Сергеева А.Е. |
| Банах Т.О. | Максименко С.И. | Федосов С.Н. |
| Волков В.Э. | Машков О.А. | Фоменко А.Т. |
| Глушков А.В. | Микеш Й. | Фоменко В.Т. |
| Задорожный В.Г. | Мормул П. | Хаддад М. |
| Заричный М.М. | Рахула М.О. | Швец В.Т. |
| Кац И.С. | Сабитов И.Х. | Шурыгин В.В. |
| Кириченко В.Ф. | Савченко А.Г. | |

Зміст

| | |
|---|----|
| Михайло Леонідович Гаврильченко. До 80-річчя зі дня народження | 7 |
| T. V. Obikhod Properties of vacuum and brane spectrum of Type IIB string theory | 10 |
| В. М. Бабич, В. О. Пехтерев Топологія відкритого розширення | 20 |
| V. Brydun, A. Savchenko, M. Zarichnyi On min-spaces | 26 |
| Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич Аналітичне моделювання однієї задачі квазіреальної нескінченно малої деформації поверхні | 34 |
| Н.Г.Коновенко, Ю.С. Федченко, Н.П. Худенко Використання інформаційних технологій в ОНАХТ при вивченні вищої математики | 43 |

| | |
|---|----|
| Ю.Г. Лобода, О.Ю. Орлова Концепція фундаменталізації математичної освіти студентів вищої технічної школи | 50 |
| A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, Yu.Ya.Bunyakova, V.V.Buyadzhi Geometry of Chaos: Advanced computational approach to treating chaotic dynamics of some hydroecological systems II | 58 |
| G.P. Prepelitsa New chaos-geometric and information technology analysis of chaotic generation regime in a single-mode laser system with absorbing cell | 65 |
| Н. Г. Коновенко Геометрические величины на плоскости Лобачевского | 71 |

Михайло Леонідович Гаврильченко. До 80-річчя зі дня народження



Михайло Леонідович Гаврильченко народився 25 січня 1935 року в родині селян с. Парканці Роздільнянського району на Одещині. В 1954 році він став студентом фізико-математичного факультету Одеського державного університету ім. І.І.Мечникова, після закінчення якого йому запропонували продовжити навчання в аспірантурі по кафедрі геометрії під науковим керівництвом тоді ще доцента Синюкова М.С.

З 1961 року молодий вчений працював асистентом кафедри алгебри і геометрії, яка в наслідок реорганізації університету 24 травня 1963 року розділилася на дві (кафедру алгебри і теорії чисел та кафедру геометрії і

топології) і М.Л. Гаврильченко продовжив свою науково-навчальну діяльність вже старшим викладачем кафедри геометрії і топології.

У 1967 році М.Л. Гаврильченко в м. Харкові захистив кандидатську дисертацію на тему «Спеціальні нескінченно малі згинання поверхонь», опонентами якої були професори Я.П. Бланк та Л.А. Шор, а провідною організацією – Харківський інститут низьких температур, відділ геометрії який очолював професор Погорелов О.В. У грудні 1972 року отримано вчене звання доцента.

У 70-х роках Михайло Леонідович був секретарем Спеціалізованої Вченої ради для захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю «Диференціальні рівняння» (головою ради був тоді професор Гаврилов М.І.), а згодом за спеціальністю «Диференціальні рівняння і геометрія» під головуванням Синюкова М.С.

Центральною темою наукових досліджень є задача про геодезичні деформації гіперповерхонь ріманових просторів за наявності різноманітних припущень як про гіперповерхню, так і про деформуюче поле. Результати досліджень доповідались на різноманітних міжнародних наукових конференціях, зокрема, Гаврильченко М.Л. учасник усіх років (2004 – 2014) конференції «Геометрія в Одесі».

Задача сформулювалася у 70-х роках і першою детальною публікацією за даною тематикою є робота «Differential Geometry and Its Application» (Brno, Czechoslovakia, 1989, World Scientific, Singapore).

У 1997 році за результатами досліджень видано монографію «Геодезичні відображення і деформації ріманових просторів» (Одеса, Оломоуц), яка стала настільною книгою багатьох студентів, аспірантів та молодих науковців.

У різні роки Михайло Леонідович читав загальні курси - «Аналітична геометрія та лінійна алгебра», «Основи геометрії», «Ріманова геометрія», «Групи Лі», «Аналітична геометрія», «Диференціальна геометрія», «Геометрія поверхонь і групи перетворень» та спецкурси – «Теорія нескінченно малих згинань», «Основи теорії відносності (геометричний аспект)», «Питання диференціальної геометрії «в цілому», «Тензорне числення».

Автор численних методичних розробок, серед яких хочеться виокремити навчальний посібник «Геометрія поверхонь і групи перетворень». Володар багатьох грамот та відзнак різного ґатунку серед яких почесний нагрудний знак Міністерства вищої і середньої освіти СРСР, почесна грамота Одеської міської Ради (2012 рік), і як підтвердження педагогічної майстерності та ви-

сокого рівня освітньої підготовки студентів - грамота у номінації «Викладач року очима студентів».

Загальний стаж роботи на кафедрі – 52 роки.

Наукове товариство, колеги, учні щиро й сердечно вітають Михайла Леонідовича Гаврильченка з ювілеєм і зичать йому міцного здоров'я, довголіття, натхнення та радості!

Properties of vacuum and brane spectrum of Type IIB string theory

T.V. Obikhod

Abstract F-theory has been receiving more attention in the past few years because its rich structure allows to solve many problems of the Standard Model and Grand Unification Theory. This theory is also important because of the necessity to solve the problem of vacuum stability. A simpler solution of F-theory is used to describe the Type IIB string theory. For the classification of D-brane charges in superstring theory of Type IIB is applied K-theory. This approach provides an access to gauge fields connected with vector bundles, classified by K-theory. This technique implements the resolution of issues related to the structure of scales and hierarchies, the gauge group and charged matter content.

Keywords F-theory · Vacuum stability · Type IIB string theory · gauge fields · K-theory

УДК 539.12

1 Introduction

One of the most pressing issues of modern theoretical high energy physics is the question of the origin of the Universe and the subsequent adequate treatment of problems of the physics of elementary particles in the light of recent experimental data at the LHC. Most modern theoretical studies tend to come from Big Bang as a mechanism for further formation of our universe when all four of the known interactions were merged into one in the early stages. But we deal with the cosmological constant problem, or more accurately with the vacuum energy problem, because energy density of vacuum receives a nonzero contribution from symmetry breaking: the scale Λ would be typically of the order of 100 GeV in the case of the electroweak (EW) gauge symmetry breaking or 1 TeV in the case of supersymmetry breaking, but from [1] we have

$$\Lambda \leq 10^{-30} m_p \sim 10^{-3} \text{eV}.$$

Therefore, the solution of this problem could be connected with the inclusion of gravity and supersymmetry in the theory of supergravity. The "gap" between the weak scale and the Planck scale, that is presented in Fig.1, is one of the major motivating factors behind trying to search for a quantum gravity theory in general, and string theory in particular as natural extensions of the Standard Model which solve the hierarchy problem. Many physicists would like a single theory that could be applied at all scales.

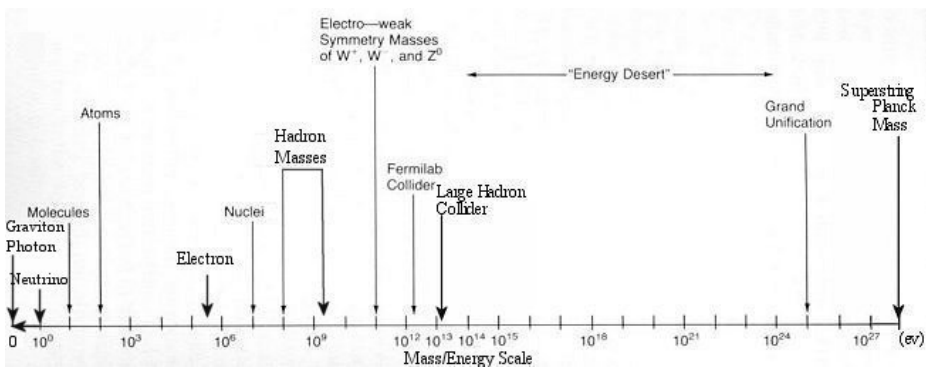


Fig.1. Energy scale of four interactions

The theory, which implements these ideas is F-theory. F-theory description is 12-dimensional theory, because in addition to three space dimensions plus one time, we have eight small dimensions. This is an example of a common theme in the development of string theory; more and more of the theory's details, such as what particles exist and how they interact, or what branes live where, can be

described simply in terms of the geometry of the extra dimensions. F-theory has been receiving more attention in the past few years because its rich structure allows solutions that reproduce many of the phenomena of the Standard Model (SM) and Grand Unification Theory (GUT).

2 F-theory and effective potential of unstable vacuum

Vafa noticed that certain complicated solutions of Type IIB string theory [2] could be described in terms of a simpler solution of F-theory with 12 dimensions, up from the 10 dimensions of superstrings or the 11 dimensions of M-theory. One no longer spoke of different theories, but rather different solutions of some master theory. The space of these solutions is called the Moduli Space of Supersymmetric Vacua. String/M theory appears to describe a very large number of four dimensional vacua with inequivalent physics, most of which clearly do not describe our universe. However the continuum of solutions in the supermoduli-space are all supersymmetric with vanishing cosmological constant. Furthermore they all have massless scalar particles, the moduli themselves. May be none of these vacua can be our world. As the expansion of the Universe is accelerating, the simplest explanation is a small but non-zero cosmological constant. Evidently we have to expand our thinking about vacua to include states with non-zero vacuum energy. If we call the space of all string theory vacua the landscape, the supermoduli-space is a special part of the landscape where the vacua are supersymmetric and the potential $V(\Phi)$ is exactly zero. These vacua are marginally stable and can be excited by giving the moduli arbitrarily small time derivatives. Once we move off the plain, supersymmetry is broken [3]. There is the picture with such vacua in Fig.2. The de Sitter vacuum occurs at the point $\Phi = \Phi_0$. However, the absolute minimum of the potential occurs not at Φ_0 but at $\Phi = \infty$.

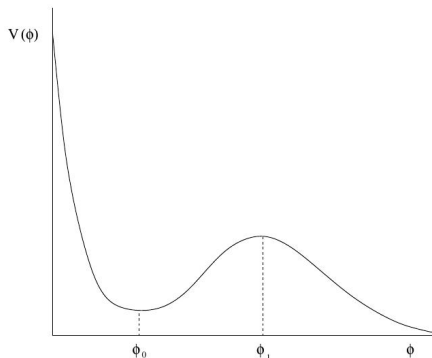


Fig.2. Effective potential of unstable vacuum with respect to tunneling to other vacua.

3 Minimization of Type IIB string potential

In [5] was emphasized that for Type IIB theories, the corresponding vacua are realized as compactifications of F-theory on Calabi-Yau fourfolds. When Type IIB strings are compactified on a Calabi-Yau manifold, under the assumption that the special Kähler moduli space of complex structures of the Calabi-Yau has a symplectic basis, it was shown that the potential could be minimized [4]. It should be noted that the $N = 0$ supersymmetric minima are below the $N = 2$ minima. So we can talk about the particle spectrum of the string Type IIB and about the instability of the vacuum associated with this string. As explained in [6], realizing the primary ingredients of GUT models requires, that the singularity type, connected with the compactification of Type IIB string theory, should correspond to a subgroup of the exceptional group E_8 . Because the Standard Model gauge group has rank four, $SU(5)$ is the only available GUT group. After implementation of a higher-dimensional breaking mechanism to obtain four-dimensional models, we can receive the minimal four-dimensional supersymmetric $SU(5)$ Grand Unification Theory with standard Higgs content [7].

The unification of gauge coupling constants, which takes place in SUSY models at high energies [8], allows the SM gauge group to be embedded into GUTs [9]. Such GUTs gauge groups are $SU(5)$, $SO(10)$ or E_6 . Theories with flat extra spatial dimensions, the simplest of which are five-dimensional theories [10]

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

and warped extra spatial dimensions [11]

$$ds^2 = \frac{1}{k^2 y^2} (dy^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$$

(where k is some constant and η has "-+++" metric signature) also allow one to explain the hierarchy between the EW and Planck scales, providing new insights into gauge coupling unification [12] and the cosmological constant problem [13]. However, in the presence of a non-factorizable geometry, the Planck scale is determined by the higher dimensional curvature. The relation between the M_{Pl} in our 4 dimensions and the fundamental unification scale $M_{Pl(4+n)}$ is the following

$$M_{Pl}^2 = M_{Pl(4+n)}^{n+2} R^n,$$

where n are extra dimensions and R is the size of the extra dimensions. For the model described by Randall and Sundrum (RS1) the 5-d Planck scale is related

to the geometry of the extra dimensions and the observed Planck scale by the formula

$$M_{Pl}^2 = \frac{M_{Pl5}^3}{k} [1 - e^{-2kr_c\pi}].$$

Randall and Sundrum also discovered that Λ_5 , the five-dimensional cosmological constant (vacuum energy) of the bulk, is negative $\Lambda_5 = -24M_{Pl5}^3 k^2$.

4 Phase transitions of SUGRA model and electroweak vacuum stability

The SUGRA, which is one of the variety of GUT, demonstrates, that in $N = 1$ supergravity there might be a mechanism which ensures the vanishing of vacuum energy density in the physical vacuum [14]. This mechanism may also lead to a set of degenerate vacua with broken and unbroken supersymmetry. The higher-dimensional breaking mechanism which is associated with four-dimensional GUT Higgs multiplets and symmetry breaking higgs mechanism is presented in [7]. Thus, after the breaking of supersymmetry, we are dealing with a Higgs boson. However, at this stage of supersymmetry breaking it is not all smooth. Recent data on the top quark mass, make it possible to assert about the metastability of the electroweak vacuum and the possibility of transition to a new state of the Universe. Therefore, we have a number of successive minima of vacuum.

In quantum field theory, a false vacuum is a metastable sector of space that appears to be a perturbative vacuum, but is unstable due to instanton effects that may tunnel to a lower energy state. The false vacuum is a local minimum, but not the lowest energy state, even though it may remain stable for some time. The Standard Model of particle physics opens the possibility of calculating from the masses of the Higgs boson and the top quark, whether the Universe's present electroweak vacuum state is likely to be stable or merely long-lived. A 125–127 GeV Higgs mass seems to be extremely close to the boundary for stability but a definitive answer requires much more precise measurements of the top quark's pole mass. Vacuum stability up to Planck scale put constraint for the mass of the Higgs boson

$$m_H [GeV] > 129.5 + 1.4 \left(\frac{m_t [GeV] - 173.1}{0.7} \right) - 0.5 \left(\frac{\alpha_s(M_Z) - 0.1184}{0.0007} \right).$$

Complexity emerges when another local minimum at large field is the same or deeper than the EW. Then quantum tunneling effects from the EW vacuum to the deeper one could make vacuum decay. At present therefore, there are "too large uncertainties which do not allow to draw a firm conclusion on the important

question whether the electroweak vacuum is indeed stable or not". Fig.3 reflects the essence of the problem.

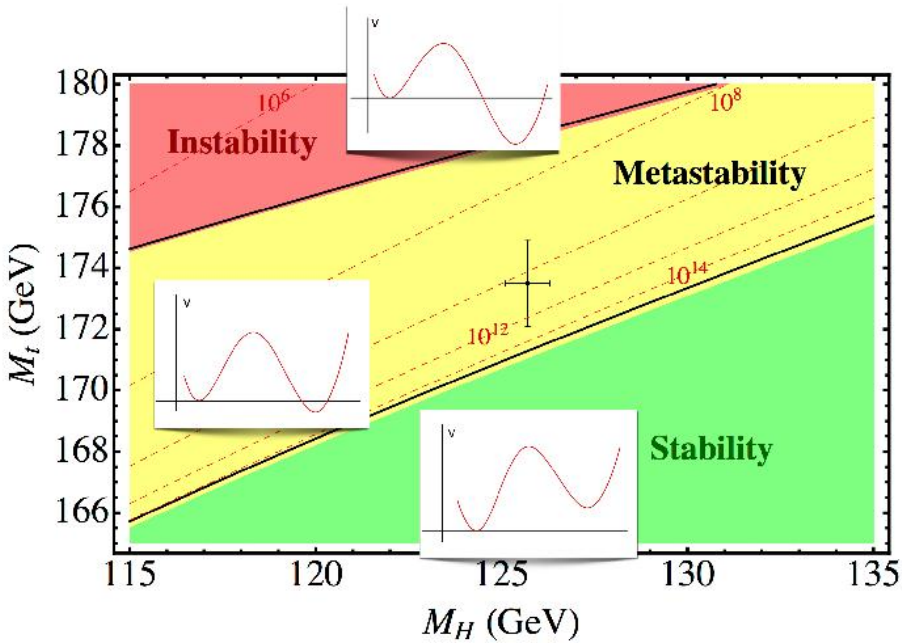


Fig.3. Top quark mass dependence of the mass of the Higgs boson, showing a metastable vacuum

Scientific models of our Universe have included the possibility that it exists as a long-lived, but not completely stable, sector of space, which could potentially at some time be destroyed upon 'toppling' into a more stable vacuum state. This catastrophic bubble of "true vacuum" could theoretically occur at any time or place in the Universe, which means (because the bubble of "true vacuum" will expand at the speed of light) the end of such a false vacuum could occur at any time [15].

Various configurations of the effective potential of vacuum are presented in Fig.4. If the life time is larger than the age of our Universe, then the vacuum is metastable (c and d). If not, we have an unstable vacuum (e).

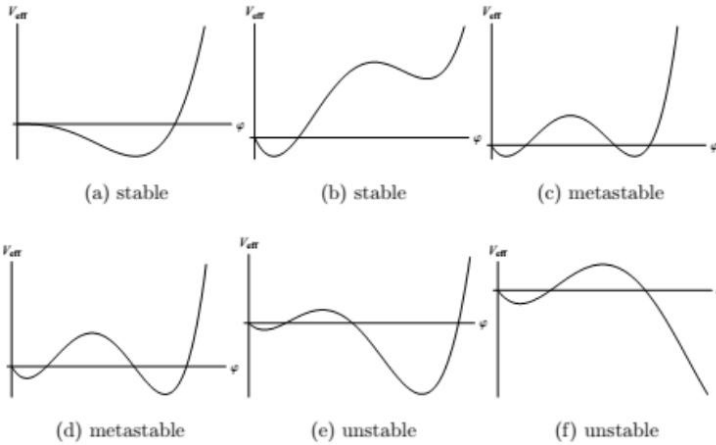


Fig.3. Various configurations of the effective potential

5 The classification of D-brane charges in superstring theory of Type IIB

We can try to develop techniques to realize that the standard questions are motivated directly by comparison with experiment, such as the structure of scales and hierarchies, the gauge group and charged matter content. It would be interesting to consider the D-brane charges in terms of the K-theory of spacetime. As soon as D-branes carry Ramond-Ramond charge which are cohomology classes, we deal with K-theory which involves vector bundles and gauge fields. In the brane spectrum of Type IIB one has unitary gauge groups and this fact explained the proposal that D-brane charge takes value in $K(X)$. We apply the K-theory to the classification of charges of D-branes in superstring theory of Type IIB [16]. We begin by considering the Type IIB theory, where superstring closed and oriented. RR-charge of D-branes of Type IIB is measured by K-group of transversal space to the manifold X, i.e. $\overline{K}(S^n)$ classifies (9-n) branes in string theory of Type IIB. Conformity of K-group is determined by the homotopy theory:

$$\overline{K}(S^n) = \pi_{n-1}(U(k)), \quad k > n/2.$$

Since

$$\pi_n\left(\bigcup_k U(k) = U(\infty)\right) = \pi_{n+2}(U(\infty)),$$

then

$$\overline{K}(S^n) = \overline{K}(S^{n+2}).$$

Le one can see Bott periodicity in the brane spectrum of Type IIB. From this and relations

$$\overline{K}(S^0) = Z, \quad \overline{K}(S^1) = 0$$

we get Table 1, which reflects the fact that the theory of Type IIB has stable Dp-branes only for p – odd.

Table 1. *Topological charges of Dp-branes for $\overline{K}(S^p)$ group*

| | | | | | | | | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| Dp | D9 | D8 | D7 | D6 | D5 | D4 | D3 | D2 | D1 | D0 | D(-1) |
| S^p | S^0 | S^1 | S^2 | S^3 | S^4 | S^5 | S^6 | S^7 | S^8 | S^9 | S^{10} |
| $\overline{K}(S^p)$ | Z | 0 | Z | 0 | Z | 0 | Z | 0 | Z | 0 | Z |

It is clear from the table, that D3-brane charge takes an integer value and this fact indicates the possible existence of solitonic object in our fourdimensional world (3+1) with the energy values or RR charges belonging to the group of integers. As soon as we deal with K-theory, we can speak about vector bundles and gauge fields connected with this bundles. It should be noted that in [17] is calculated the total number of vacua with cosmological constant $|A| < A_{max}$ and compactification volume $V_M < V^>$. The predictivity of string/M theory leads to the conjecture that the number of consistent flux vacua

$$N_{fluxvac}(A_{max}, V^>, [B]) \in Z$$

is finite.

6 Conclusions

Thus, within the Big Bang framework it is assumed that the Universe expands. During this process the Universe passes through some characteristic energy scales of phase transitions. These transitions are connected with symmetry breakings, each of which leaves the vacuum state less symmetric than before. A more symmetric vacuum state undergoing a chain of symmetry breakings producing a less symmetric vacuum state at present. A chain of symmetry breakings could be illustrated as follows:

$$\dots \xrightarrow{\sim 10^{14} GeV} \left(\begin{array}{c} \text{GUT} \\ \text{symmetry} \\ \text{breaking} \end{array} \right) \xrightarrow{\sim 10^2 GeV} \left(\begin{array}{c} \text{Electroweak} \\ \text{symmetry} \\ \text{breaking} \end{array} \right) \xrightarrow{\sim 10^{-1} GeV} \left(\begin{array}{c} \text{QCD} \\ \text{symmetry} \\ \text{breaking} \end{array} \right) \dots$$

The physics of the phase transitions depend on the theory of particle physics which is implemented to model of the Universe. The new vacua described as F-theory and discovered by Vafa [18], allowed string theorists to construct new

realistic vacua, that is shown for Type IIB string theory in this article. Thus, the particle spectrum of Type IIB string theory is the most adequate representation of the nature of elementary particle physics taking into account recent experimental data and theoretical developments.

References

1. Binetruy P.: Supersymmetry: Theory, Experiment, and Cosmology. Oxford University Press, 2006, 520 p.
2. Heckman Jonathan J., Vafa Cumrun: From F-theory GUTs to the LHC. arXiv:0809.3452 [hep-ph].
3. Susskind Leonard: The Anthropic Landscape of String Theory. arXiv:hep-th/0302219.
4. Michelson Jeremy, Compactifications of Type IIB Strings to Four Dimensions with Non-trivial Classical Potential. arXiv:hep-th/9610151.
5. Beasley Chris, Heckman Jonathan J., Vafa Cumrun: GUTs and Exceptional Branes in F-theory - II: Experimental Predictions. arXiv:0806.0102 [hep-th].
6. Beasley Chris, Heckman Jonathan J., Vafa Cumrun: GUTs and Exceptional Branes in F-theory - I. arXiv:0802.3391 [hep-th].
7. Obikhod T.: The realization of higher-dimensional breaking mechanism. arXiv:1401.6426 [hep-th].
8. Ellis J., Kelley S., Nanopoulos D.V.: Probing the desert using gauge coupling unification. Phys. Lett., **B260**, 131-137 (1991).
9. Georgi H., Glashow S.L.: Unity of All Elementary Particle Forces. Phys. Rev. Lett. **32**, 438-441 (1974).
10. Arkani-Hamed N., Dimopoulos S., Dvali G.: The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. Phys. Lett. **B429**, 263-272 (1998).
11. Randall L., Sundrum R.: A Large mass hierarchy from a small extra dimension. Phys. Rev. Lett. **83**, 3370-3373 (1999).
12. Dienes K.R., Dudas E., Cherggetta T.: Extra space-time dimensions and unification. Phys. Lett. **B436**, 55-65 (1998).
13. Kachru S., Schulz M., Silverstein E.: Bounds on curved domain walls in 5-D gravity. Phys. Rev. **D62**, 085003 (2000).
14. Froggatt C.D., Nevezorov R., Nielsen H.B., Thomas A.W.: Cosmological constant in SUGRA models with Planck scale SUSY breaking and degenerate vacua. Phys. Lett. **B737**, 167-171 (2014).
15. Stone M.: Lifetime and decay of excited vacuum states. Phys. Rev. **D14** (12), 3568-3573 (1976); Frampton P.H.: Vacuum Instability and Higgs Scalar Mass. Phys. Rev. Lett. **37** (21), 1378-1380 (1976).
16. Witten Edward: D-Branes And K-Theory. JHEP **9812**:019,(1998).
17. Douglas Michael R.: The statistics of string/M theory vacua. JHEP **0305**:046, (2003).
18. Vafa Cumrun: Evidence for F-theory. Nucl.Phys. **B469**, 403-418 (1996).

T.V. Obikhod

Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, 03680 Kiev, Ukraine

E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

Т.В. Обиход

Свойства вакуума и спектр бран струнной теории Типа IIB

В последние несколько лет Ф-теория привлекает большее внимание благодаря ее богатой структуре, позволяющей решить многие проблемы Стандартной Модели и Теории Великого Объединения. Эта теория также важна из-за необходимости решить проблему стабильности вакуума. Более простая реализация Ф-теории используется для описания струнной теории типа IIB. Для классификации зарядов D-бран в суперструнной теории типа IIB применяется К-теория. Этот подход обеспечивает выход на калибровочные поля, связанные с векторными расслоениями, классифицированными К-теорией. Эта техника реализует решение вопросов, связанных со структурой масштабов и иерархий, калибровочной группой и составом заряженных полей.

Топологія відкритого розширення

В'ячеслав Михайлович Бабиц, Василь Олексійович Пехтерєв

У роботі отримано результати, які описують властивості загальної топологічної конструкції — топології відкритого розширення. Зокрема, доведено, що ця конструкція не транзитивна, знайдено бази найменшої потужності для топології та системи околів точки, обчислено внутрішність, замикання, множини граничних та ізольованих точок довільної множини. Також доведено лінійну зв'язність і неметризованість цього топологічного простору, досліджено його кардинальні інваріанти й аксіоми відокремлюваності.

Ключові слова Топологічний простір, база, зв'язність, аксіоми відокремлюваності, кардинальні інваріанти.

УДК 515.122

В [1] введено поняття топології відкритого розширення у випадку, коли її носій відрізняється від носія вихідного топологічного простору на одну точку. Частковим випадком цієї конструкції є точковилучена топологія, яка виявляється відкритим розширенням дискретної. Найвідомішим прикладом точковилученої топології є простір Серпінського. Ми узагальнюємо дану конструкцію на випадок довільної надмножини носія початкового простору.

Нехай (X, τ) — топологічний простір, X^* — надмножина множини X . Тоді родина $\tau^* = \{U \subset X^* \mid U \supset X \text{ або } U \in \tau\}$ є топологією на X^* , яка називається *топологією відкритого розширення X до X^** . Справді, розглянемо довільні множини $U_\alpha \in \tau^*$, $\alpha \in T$. Якщо принаймні одна з них містить X , то й їх об'єднання містить X . В іншому разі об'єднання $\bigcup_{\alpha \in T} U_\alpha$ лежить в τ . Коли множина індексів T скінченна і одна з множин U_α міститься в τ ,

то й перетин $\bigcap_{\alpha \in T} U_\alpha$ лежить в τ . В іншому разі такий перетин містить X , і отже, також належить τ^* .

Таким чином, відкритими в X^* є ті й лише ті множини, які містять X або є відкритими в X . Відповідно, замкненими в X^* множинами є всі підмножини доповнення $X^* \setminus X$ та об'єднання $(X^* \setminus X) \cup A$, де A — замкнена в X множина, й лише вони.

Пропозиція 1 Топологія τ^* відкритого розширення простору (X, τ) до $X^* \supset X$ є супремумом топологій $\tau \cup \{X^*\}$ та X -вмісної топології на X^* .

Доведення 1 Топологія τ^* містить топологію $\tau \cup \{X^*\}$ та X -вмісну топологію на X^* , а тому містить їх об'єднання і супремум. Навпаки, кожна множина з τ^* міститься або в $\tau \cup \{X^*\}$, або в X -вмісній топології на X^* , і отже, лежить в кожній топології на X^* , яка містить об'єднання топологій $\tau \cup \{X^*\}$ й X -вмісної топології на X^* , зокрема і в їх супремумі.

Відображення $f: X \rightarrow Y$ топологічних просторів (X, τ) та (Y, σ) називається *індукувальним*, якщо τ індукована топологією σ і відображенням f .

Теорема 1 Нехай (X, τ) — топологічний простір, X^* — надмножина множини X і τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* . Тоді природне вкладення $X \ni x \mapsto x \in X^*$ є відкритим індукувальним відображенням. Зокрема, (X, τ) є відкритим підпростором простору X^* .

Доведення 2 Нехай τ_X^* — топологія на X , індукована топологією τ^* на X^* . Покажемо, що $\tau_X^* = \tau$. Якщо $U \in \tau_X^*$, то $U = X \cap V$, де $V \in \tau^*$. Але за означенням топології відкритого розширення перетин $X \cap V$ дорівнює або X , або V , і отже, належить τ . Навпаки, якщо $U \in \tau \subset \tau^*$, то $U = X \cap U \in \tau_X^*$. Отже, X — підпростір в X^* , тобто природне вкладення і індукувальне. Крім того, воно відкрите, бо підпростір X відкритий в X^* .

На відміну від топології розширення [2], топологія відкритого розширення не транзитивна, тобто якщо X^{**} — надмножина множини X^* , на якій задана топологія відкритого розширення X до X^* , то топології відкритого розширення X до X^{**} та X^* до X^{**} , взагалі кажучи, різні.

Приклад 1 Розглянемо вкладені множини $X = \{a\}$, $X^* = \{a, b\}$, $X^{**} = \{a, b, c\}$. Тоді для дискретної топології τ на X маємо, що $(\tau^*)^* = \{X^{**}, \{a\}, \{a, b\}\} \neq \tau^{**} = \{X^{**}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.

Звідси, зокрема, випливає, що природне вкладення $X \ni x \mapsto x \in X^*$ не факторне, тобто топологія відкритого розширення не є фактортопологією відносно топології τ на X та цього вкладення.

Пропозиція 2 База найменшої потужності топології τ^* відкритого розширення X до X^* має вигляд $\beta^* = \{X \cup \{x\}, x \in X^* \setminus X\} \cup \beta$, де β — база найменшої потужності топології τ простору X .

Доведення 3 Точка $x \in X^* \setminus X$ має найменший окіл $X \cup \{x\}$, який му-
ситься міститися в кожній базі простору X^* за критерієм бази. Тому $X \cup \{x\} \in \beta^*$, $x \in X^* \setminus X$. А оскільки відкриті в X^* множини є об'єднан-
нями деяких сукупностей множин з β та $\{X \cup \{x\}, x \in X^* \setminus X\}$ відповідно,
то родина β^* відкритих в X^* множин є базою простору X^* . Залишилось
зауважити, що потужність бази β простору X зменшити не можна, а
з родини $\{X \cup \{x\}, x \in X^* \setminus X\}$ не можна прибрати жодної множини.

Пропозиція 3 Нехай τ^* — топологія відкритого розширення простору X
до $X^* \supset X$. Тоді база найменшої потужності системи околів довільної
точки $x \in X^*$ має вигляд $\{X \cup \{x\}\}$, коли $x \in X^* \setminus X$, та β_x , де β_x — база
найменшої потужності системи околів точки x у просторі X , коли $x \in X$.

Доведення 4 Нехай β_x^* — база найменшої потужності системи околів
точки $x \in X^*$. Якщо $x \in X^* \setminus X$, то множина $X \cup \{x\}$ є найменшим околom
точки x , звідки $\beta_x^* = \{X \cup \{x\}\}$. Якщо ж $x \in X$, то $\beta_x^* = \beta_x$, бо кожен окіл
точки x в топології τ^* містить її окіл в топології τ , який, у свою чергу,
містить деякий окіл з бази β_x , потужність якої найменша.

Пропозиція 4 Нехай τ^* — топологія відкритого розширення простору X
до $X^* \supset X$ і $A \subset X^*$ — довільна множина. Тоді:

1) внутрішність множини A в X^* обчислюється за формулою
 $\text{Int}_{X^*} A = A$, коли $A \supset X$, та $\text{Int}_{X^*} A = \text{Int}_X(A \cap X)$, де $\text{Int}_X(A \cap X)$ —
внутрішність перетину $A \cap X$ у просторі X , в іншому разі;

2) замикання множини A в X^* має вигляд $\overline{A}_{X^*} = A$, коли $A \subset X^* \setminus X$,
та $\overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X} \cup (X^* \setminus X)$, де $\overline{A \cap X}$ — замикання перетину $A \cap X$ у
просторі X , в іншому разі;

3) множина ізольованих точок множини A в X^* знаходиться за фор-
мулою $I_{X^*}(A) = A$, коли $A \subset X^* \setminus X$, $I_{X^*}(A) = I_X(A \cap X)$, де $I_X(A \cap X)$ —
множина ізольованих точок перетину $A \cap X$ у просторі X , в іншому разі;

4) множина граничних точок множини A в X^* порожня, коли $A \subset$
 $X^* \setminus X$, і визначається рівністю $A'_{X^*} = (A \cap X)'_X \cup (X^* \setminus X)$, де $(A \cap X)'_X$ —
множина граничних точок перетину $A \cap X$ у просторі X , в іншому разі;

5) A скрізь щільна (ніде не щільна) в X^* тоді і тільки тоді, коли пе-
ретин $A \cap X$ скрізь щільний (ніде не щільний) в X .

Доведення 5 1) Якщо $A \supset X$, то A відкрита в X^* , й отже, $\text{Int}_{X^*} A = A$. В іншому разі найбільшою відкритою в X^* множиною, яка міститься в A , є, очевидно, $\text{Int}_X(A \cap X)$.

2) Якщо $A \subset X^* \setminus X$, то A замкнена в X^* , й отже, $\overline{A}_{X^*} = A$. В іншому разі найменшою замкненою в X^* множиною, яка містить A , є, очевидно, $\overline{A \cap X}_X \cup (X^* \setminus X)$.

3) Точка множини A ізольована в A , якщо деякий окіл цієї точки не містить відмінних від неї точок множини A . Очевидно, кожна точка x множини $A \subset X^* \setminus X$ ізольована в A , бо $\{x\} = A \cap (X \cup \{x\})$. Якщо ж $A \not\subset X^* \setminus X$, то кожна точка з $A \setminus X$ не ізольована в A , а точка перетину $A \cap X$ ізольована в A в просторі X^* в тому й лише в тому разі, коли ця точка ізольована в A в просторі X .

4) Якщо $A \subset X^* \setminus X$, то $A'_{X^*} = \overline{A}_{X^*} \setminus I_{X^*}(A) = A \setminus A = \emptyset$. Якщо ж $A \not\subset X^* \setminus X$, то $A'_{X^*} = \overline{A}_{X^*} \setminus I_{X^*}(A) = (\overline{A \cap X}_X \cup (X^* \setminus X)) \setminus (I_X(A \cap X)) = (\overline{A \cap X}_X \setminus I_X(A \cap X)) \cup (X^* \setminus X) = (A \cap X)'_X \cup (X^* \setminus X)$.

5) Множина A скрізь щільна в X^* тоді й лише тоді, коли $X^* = \overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X}_X \cup (X^* \setminus X)$. А це буде тоді й лише тоді, коли $\overline{A \cap X}_X = X$, що еквівалентно скрізь щільності в X перетину $A \cap X$.

Якщо $A \subset X^* \setminus X$, то $\text{Int}_{X^*}(\overline{A}_{X^*}) = \text{Int}_{X^*} A = \text{Int}_X(A \cap X) = \text{Int}_X = \emptyset$. В іншому разі $\text{Int}_{X^*}(\overline{A}_{X^*}) = \text{Int}_{X^*}(\overline{A \cap X}_X \cup (X^* \setminus X)) = \emptyset$ в тому й лише в тому разі, коли $\text{Int}_X \overline{A \cap X}_X = \emptyset$.

Теорема 2 Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* і $X^* \neq X$. Тоді топологічний простір X^* лінійно зв'язний.

Доведення 6 Для довільних точок $x \in X$ й $y \in X^* \setminus X$ відображення $l : [0, 1] \rightarrow X^*$, задане рівностями $l([0, 1)) = x$ і $l(1) = y$, є шляхом в X^* , який з'єднує точки x й y .

Теорема 3 Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* . Простір X^* задовольняє першу аксіому зліченності (є сепарабельним) тоді й лише тоді, коли X її задовольняє (є сепарабельним). Не більш ніж зліченною скрізь щільною в X^* множиною найменшої потужності є скрізь щільна в X множина найменшої потужності.

Доведення 7 Твердження теореми для першої аксіоми зліченності випливає з твердження 3. Нехай D^* — не більш ніж зліченна скрізь щільна в X^* множина. За твердженням 4 перетин $D^* \cap X$ скрізь щільний в X , звідки простір X сепарабельний. Навпаки, нехай D — не більш ніж зліченна скрізь щільна в X множина. Тоді D є не більш ніж зліченною скрізь

щільною в X^* множиною, бо $D \cap X = D$, і, отже, простір X^* сепарабельний. Скрізь щільною в X^* множиною найменшої потужності ϵ , очевидно кожна скрізь щільна в X множина найменшої потужності.

Наступний факт випливає безпосередньо з твердження 2.

Теорема 4 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* . Простір X^* задовольняє другу аксіому зліченності тоді й лише тоді, коли X її задовольняє та доповнення $X^* \setminus X$ не більш ніж зліченне.*

Теорема 5 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* . Простір X^* є ліндельфовим (компактним) в тому й лише тому разі, коли доповнення $X^* \setminus X$ не більш ніж зліченне (скінченне).*

Доведення 8 *Родина $\{X \cup \{x\}, x \in X^* \setminus X\}$ є відкритим покриттям простору X^* , з якого не можна вилючити жодної множини. Тому, якщо X ліндельфов (компактний), то доповнення $X^* \setminus X$ не більш ніж зліченне (скінченне). Навпаки, нехай π — довільне відкрите покриття простору X^* . Для кожного $x \in X^* \setminus X$ візьмемо множину $A_x \in \pi$, яка містить x . Тоді родина $\{A_x, x \in X^* \setminus X\}$ є, очевидно, не більш ніж зліченим (скінченим) підпокриттям покриття π .*

Теорема 6 *Нехай τ^* — топологія відкритого розширення X до X^* і $X^* \neq X$. Простір X^* є T_0 -простором тоді й лише тоді, коли X — T_0 -простір. Простір X^* є T_4 -простором у тому й лише в тому разі, коли $|X^* \setminus X| = 1$. Простір X^* не є T_i -простором для $i = 1, 2, 3$. Зокрема, X^* не регулярний і не нормальний, а отже й не метризований.*

Доведення 9 *Нехай X задовольняє нульову аксіому відокремлюваності. Тоді для кожних двох різних точок $x, y \in X$ існує окіл в X , а отже й в X^* , однієї з них, який не містить другу точку. Якщо $x \in X$, а $y \in X^* \setminus X$, то окіл X точки x не містить y . Якщо ж $x, y \in X^* \setminus X$, то окіл $X \cup \{x\}$ точки x не містить y . Отже, X^* є T_0 -простором. Навпаки, для кожних двох різних точок $x, y \in X$ існує окіл в X^* однієї з них, який не містить другу точку. Оскільки цей окіл не містить X , то він відкритий в X . Тому X є T_0 -простором.*

Далі, якщо $|X^* \setminus X| = 1$, то всі непорожні замкнені в X^* множини перетинаються по $X^* \setminus X$, звідки простір X^* є T_4 -простором. Навпаки, якщо $|X^* \setminus X| > 1$ і $x, y \in X^* \setminus X$ — дві різні точки, то замкнені множини $\{x\}$ та $\{y\}$ не перетинаються, але довільні їх околи містять непорожню

множину X у перетині. Тому в цьому разі X^* не задовольняє четверту аксіому відокремлюваності.

Нарешті, X^* не є T_1 -простором, бо для кожної точки $x \in X$ одноточкова множина $\{x\}$ не замкнена в X^* , і не є T_3 -простором, бо для довільних точок $x \in X$ й $y \in X^* \setminus X$ точка x і замкнена множина $\{y\}$ не мають околів з порожнім перетином.

Література

1. Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, Jr. Counterexamples in topology. – New York: Dover publications, 1978. – 256 p.
2. Бабич В. М., Філоненко О. М. Топологія розширення // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2015. – 27-1. – С. 5-9.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 750 с.

В'ячеслав Михайлович Бабич, Василь Олексійович Пехтерев

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail: vyacheslav.babych@gmail.com, vasily@univ.kiev.ua

Vyacheslav Babych, Vasyl Pyekhtyeryev

Open Extension Topology

The paper contains the results which describe the properties of such general topological construction as open extension topology. In particular, we prove that this topology is not transitive. We find the base of the least cardinality for the topology and local one for the neighborhood system of every point. We calculate the interior, the closure, and the sets of isolated and limit points of any set. Also we prove that this space is path connected and is not metrizable, and investigate its cardinal invariants and separation axioms.

On mim-spaces

Viktoriya Brydun, Aleksandr Savchenko, Mykhailo Zarichnyi

Abstract The notion of idempotent measure is a counterpart of that of probability measure in the idempotent mathematics. In this note, we consider a metric on the set of compact, idempotent measure spaces (mim-spaces) and prove that this space is separable and non-complete.

Keywords idempotent measure, probability measure, mm-space

Mathematics Subject Classification (2010) 54C35, 54E35, 60B05

1 Introduction

The notion of metric measure space (i.e., a space endowed with a measure; briefly, mm-space) plays an important role in different parts of mathematics. This notion also has numerous applications in computer science, in particular, in computer vision.

The notion of probability measure has its counterpart in the idempotent mathematics; the latter is a part of mathematics in which the usual arithmetic operations are replaced by idempotent ones (e.g., \max). Namely, in [3] there were defined the idempotent measures (called also Maslov measures).

In this note, we introduce the notion of metric, idempotent measure space (briefly, mim-space). Recently, there were defined the so-called idempotent fractals as (ultrametric) spaces endowed with idempotent measures [4]; they can be considered as natural examples of mim-spaces.

We define a metric on the set of all compact mim-spaces and prove that the obtained space of mim-spaces is a separable noncomplete space.

2 Preliminaries

We begin with the notion of idempotent measure and space of idempotent measures (see [6] for details).

Let (M, d) be a compact metric space. As usual, by $C(M)$ we denote the Banach space of continuous functions on M (with the sup-norm). Given $\lambda \in \mathbb{R}$, by λ_M we denote the constant function in $C(M)$ equal to λ . Consider the following operations:

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times C(M) &\rightarrow C(M) : (\lambda, \varphi) \mapsto \lambda_M + \varphi; \\ \oplus : C(M) \times C(M) &\rightarrow C(M) : (\psi, \varphi) \mapsto \max\{\psi, \varphi\}. \end{aligned}$$

A functional $\mu : C(M) \mapsto \mathbb{R}$ is called an *idempotent measure* if it satisfies the following properties:

1. $\mu(c_M) = c$;
2. $\mu(c \odot \varphi) = c \odot \mu(\varphi)$;
3. $\mu(\psi \oplus \varphi) = \mu(\psi) \oplus \mu(\varphi)$.

Consider some examples of idempotent measures. For any $x \in M$, we denote by δ_x the Dirac measure concentrated at x , i.e. $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(M)$. Clearly, $\delta_x \in I(M)$. More generally, given $x_1, \dots, x_n \in M$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ such that $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0$, one can define $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(M)$.

Denote by $I(M)$ the set of all idempotent measures on M . We consider the weak*-topology on $I(M)$; the base of this topology consists of the sets

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in I(M) \mid |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n \},$$

where $\mu \in I(M)$, $\varphi_i \in C(M)$, $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon > 0$.

Let $\mu \in I(M)$. The support of μ is a minimal (with respect to inclusion) closed set A in M such that $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ whenever $\varphi, \psi \in C(M)$ and $\varphi|_A = \psi|_A$. We denote the support of μ by $\text{supp}(\mu)$.

Given a map $f : M \rightarrow M'$ of compact metric spaces, we define a map $I(f) : I(M) \rightarrow I(M')$ by the formula $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi f)$, $\mu \in I(M)$, $\varphi \in C(M')$. In particular, if $\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(M)$, then

$$I(f)(\mu) = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{f(x_i)} \in I(M').$$

We thus obtain a functor I on the category of compact metrizable spaces and continuous maps [6].

The following is proved in [1].

Proposition 1 *If $f: X \mapsto Y$ is a non-expanding map, then $I(f): I(X) \mapsto I(Y)$ is also a non-expanding map.*

By $\exp X$ we denote the set of nonempty compact subsets in a metric space (X, d) (the hyperspace of X). The Hausdorff metric d_H on $\exp X$ is defined by the formula:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}, \quad A, B \in \exp X.$$

The Gromov-Hausdorff distance between compact metric spaces X_1 and X_2 is defined as follows:

$$d_{GH}(X_1, X_2) = \inf\{d_H(f_1(X_1), f_2(X_2)) \mid f_i: X_i \rightarrow Z, i = 1, 2, \\ \text{is an isometric embedding into a metric space } Z\}$$

(see, e.g., [2]).

3 mim-spaces

Here we introduce the notion of mim-space.

Definition 1 A mim-space is a triple (M, d, μ) , where

1. (M, d) is a metric space;
2. μ is an idempotent measure on M ;
3. $\text{supp}(\mu) = M$.

We say that mim-spaces (M, d, μ) are (M', d', μ') *isomorphic*, if there exists an isometry $f: M_0 \mapsto M'_0$ such that

$$\psi * \mu = \mu'.$$

By $[(M, d, \mu)]$ we denote the class of all mim-spaces isomorphic to (M, d, μ) mim-spaces. Denote $\mathbb{M} = \{[(M, d, \mu)] \mid (M, d, \mu) \text{ is an mim-space}\}$.

In order to simplify notation we will identify every mim-space (M, d, μ) and the class $[(M, d, \mu)]$. This allows us to interpret \mathbb{M} as a set.

Let us define a metric on \mathbb{M} . First, we recall the definition of the metric on $M(X)$ (see [1]). A function $\varphi: M \mapsto \mathbb{R}$ is called *n-Lipschitz*, if

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq nd(x, y), \quad x, y \in X.$$

Let $n \in \mathbb{N}$. It is known (see [1]) that the function $\hat{d}_n: I(M) \times I(M) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by the formula

$$\hat{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \text{ is n-Lipschitz}\}$$

is a continuous pseudometric on the space $I(M)$.

The metric \tilde{d} on \mathbb{M} is defined by

$$\tilde{d}(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{d}_n(\mu, \nu)}{n2^n}, \quad \mu, \nu \in I(M).$$

Let

$$I_\omega(M) = \{\oplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0, x_1, \dots, x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}.$$

In other words, $I_\omega(M)$ consists of elements of finite support in $I(M)$. It is known (see [6]) that the set $I_\omega(M)$ is dense in the space $I(M)$.

4 Metric on the set of mim-spaces

Let (M_i, d_i, μ_i) , $i = 1, 2$, be mim-spaces. Consider the function

$$D((M_1, d_1, \mu_1)(M_2, d_2, \mu_2)) = \inf \left\{ \hat{d}(I(f_1)(\mu_1), I(f_2)(\mu_2)) \mid \right. \\ \left. f_i: M_i \rightarrow Z \text{ is an isometric embedding} \right\}$$

on the set \mathbb{M} .

We first remark that D is a well-defined function on $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$. To this end, we have to show that the set from the right side of the formula defining D is nonempty.

Indeed, let $M = M_1 \times M_2$ and d be the metric on M defined by the formula $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Let $m_i^0 \in M_i$, $i = 1, 2$. Define maps $f_i: M_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, by the formula $f_1(x) = (x, m_2^0)$, $f_2(y) = (m_1^0, y)$. Clearly, f_1, f_2 are isometric embeddings.

Theorem 1 *The function D is a metric on \mathbb{M} .*

Proof Nonnegativity and symmetry of D are obvious.

We are going to prove nondegeneracy of D . Suppose that $D((M_1, d_1, \mu_1)(M_2, d_2, \mu_2)) = 0$. Then for every natural n there exists a compact metric space (Z_n, ϱ_n) and isometric embeddings $g_n: M_1 \rightarrow Z_n$, $h_n: M_2 \rightarrow Z_n$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\varrho}_n(I(g_n)(\mu_1), I(h_n)(\mu_2)) = 0.$$

Without loss of generality, one may assume that $Z_n = M \sqcup M'_n$ and g_n is the inclusion map. Also, we assume that $M'_i \cap M'_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$. Define $H = \cup_{n=1}^{\infty} Z_n$.

Define $\varrho: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ as follows:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \varrho_i(x, y), & \text{if } x, y \in Z_i, \\ \inf\{\varrho_i(x, a) + \varrho_i(a, y) \mid a \in Z\}, & \text{if } x \in Z_i, y \in Z_j, i \neq j. \end{cases}$$

It is not difficult to show that ϱ is a metric on H and Z_n is a subspace of Z for every n .

We are going to prove that $Z_n \rightarrow Z$ in the hyperspace $\exp H$. Suppose the contrary. Without loss of generality, one may assume that there exists $\varepsilon > 0$ and a nonempty open subset U of M_2 such that $h_n(U)$ lies in the complement of the ε -neighborhood of Z in H . Since $\text{supp}(\mu_2) = M_2$, there exists a function $\varphi \in C(M_2)$ such that $\text{supp}(\varphi) \subset U$ and $\mu_2(\varphi) = c \neq 0$.

Define $\psi: H \rightarrow \mathbb{R}$ as follows: $\psi(x) = \varphi h_n^{-1}(x)$ if $x \in Z_n$ and $\psi(x) = 0$ otherwise. Then $I(h_n)(\mu_2)(\psi) = c$, for every n , and $\mu_1(\psi) = 0$. We therefore obtain a contradiction.

Thus, $Z_n \rightarrow Z$ in the hyperspace $\exp H$ and therefore H is compact. Let $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ be a dense set in M_2 . By induction, we construct monotonically increasing subsequences $S_1 \supset S_2 \supset \dots$ such that the sequence $(h_n(x_i))_{n \in S_i}$ is convergent. Denote its limit by y_i . Clearly, the map $x_i \mapsto y_i$, $i \in \mathbb{N}$, is an isometry. It has a unique extension $u: M_2 \rightarrow M_1$, which is also an isometry such that $I(u)(\mu_2) = \mu_1$.

Let us prove the triangle inequality. Suppose that (X_i, d_i, μ_i) , $i = 1, 2, 3$, are mim-spaces,

$$D((X_1, d_1, \mu_1), (X_2, d_2, \mu_2)) = a, \quad D((X_2, d_2, \mu_2), (X_3, d_3, \mu_3)) = b.$$

Given $\varepsilon > 0$, find metric spaces (Y_1, ϱ_1) , (Y_2, ϱ_2) and isometric embeddings

$$f_1: X_1 \rightarrow Y_1, \quad f_2: X_2 \rightarrow Y_1, \quad f_3: X_2 \rightarrow Y_2, \quad f_4: X_3 \rightarrow Y_2$$

such that

$$\hat{\varrho}(I(f_1)(\mu_1), I(f_2)(\mu_2)) < a + \varepsilon, \quad \hat{\varrho}(I(f_3)(\mu_2), I(f_4)(\mu_3)) < b + \varepsilon.$$

Without loss of generality, one may assume that

$$Y_1 = f_1(X_1) \sqcup f_2(X_2), \quad Y_2 = f_3(X_2) \sqcup f_4(X_3).$$

Define $Y = (Y_1 \sqcup Y_2) / \sim$, where the equivalence relation \sim is defined by the condition: $Y_1 \ni y \sim f_3(f_2^{-1}(y)) \in Y_2$. Let $q: Y_1 \sqcup Y_2 \rightarrow Y$ be the quotient map.

Let a metric d on Y be defined by the conditions:

$$d(y, z) = \begin{cases} d_i(y, z), & \text{if } y, z \in q(f_i(X_i)), i = 1, 2, \\ \inf\{d_1(y, a) + d_2(a, z) \mid a \in q(Y_1) \cap q(Y_2)\}, & \text{if } y \in q(Y_1) \setminus q(Y_2), \\ & z \in q(Y_2) \setminus q(Y_1). \end{cases}$$

It is easy to see that d is a metric on Y . Then

$$\begin{aligned} D((X_1, d_1, \mu_1), (X_3, d_3, \mu_3)) &\leq \hat{d}(I(qf_1)(\mu_1), I(qf_3)(\mu_3)) \\ &\leq \hat{d}(I(qf_1)(\mu_1), I(qf_2)(\mu_2)) + \hat{d}(I(qf_2)(\mu_2), I(qf_4)(\mu_3)) \\ &= \hat{d}(I(qf_1)(\mu_1), I(qf_2)(\mu_2)) + \hat{d}(I(qf_3)(\mu_2), I(qf_4)(\mu_3)) \\ &= \varrho_1(I(f_1)(\mu_1), I(f_2)(\mu_2)) + \varrho_2(I(f_3)(\mu_3), I(f_4)(\mu_3)) \\ &< a + b + 2\varepsilon \end{aligned}$$

(here we used the fact that the functor I preserves isometries; this easily follows from Proposition 1). Letting $\varepsilon \rightarrow 0$, we are done.

The following statement is an immediate consequence of the definition.

Proposition 1 *Let X_1, X_2 be closed subspaces of a metric space (Y, d) . If $\mu_1, \mu_2 \in I(Y)$, then*

$$\begin{aligned} D((\text{supp}(\mu_1), \mu_1, d|(\text{supp}(\mu_1) \times \text{supp}(\mu_1))), (\text{supp}(\mu_2), \mu_2, d|(\text{supp}(\mu_2) \times \text{supp}(\mu_2)))) \\ \leq \tilde{d}(\mu_1, \mu_2). \end{aligned}$$

We say that an idempotent measure $\mu = \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i \odot \delta_{x_i}$ is rational if $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, for every $i = 1, \dots, k$.

Proposition 2 *The space \mathbb{X} of all mim-spaces is separable.*

Proof We let

$$\mathbb{Y} = \{(X, \mu, d) \mid X \text{ is finite, } d(X \times X) \subset \mathbb{Q}, \mu \text{ is rational}\}.$$

Let $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ and let d be a metric on X . For any $\varepsilon > 0$, one can find a metric space $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ (we will denote its metric by ϱ) with rational distances and such that $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$. Without loss of generality, one may assume that X and Y are subspaces of a common metric space (we will denote its metric by D) such that $D(x_i, y_i) < \varepsilon$, for every $i = 1, \dots, k$.

Given a rational $\mu = \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i \odot \delta_{x_i}$, define $\nu = \bigoplus_{i=1}^k \alpha_i \odot \delta_{y_i}$. Let φ_n be an n -Lipschitz function on Z . Then it is easy to see that $|\mu(\varphi_n) - \nu(\varphi_n)| \leq n\varepsilon$. Therefore, $d(\mu, \nu) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\varepsilon}{n2^n} = \varepsilon$.

Proposition 3 *The space \mathbb{X} is not complete.*

Proof Consider a sequence of mim-spaces $((X_i, d_i, \mu_i))_{i=1}^\infty$, where:

1. $X_i = \{0, 1, \dots, i\} \subset \mathbb{R}$;
2. the metric d_i on X_i is inherited from \mathbb{R} ;
3. $\mu_i = \bigoplus_{k=0}^i \alpha_k \oplus \delta_i$, where $\alpha_0 = 0$ and $\alpha_i \in (-\infty, 0]$ is such that $\hat{d}(\mu_{i-1}, \mu_i) \leq 2^{-i}$; moreover, $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \dots$.

In order to choose α_i , $i > 0$, by induction so that (3) is satisfied note that $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{i-1} \oplus (k \odot \delta_i) = \mu_{i-1}$. Note also that (3) and Proposition 1 imply that

$$D((X_{i-1}, d_{i-1}, \mu_{i-1}), (X_i, d_i, \mu_i)) \leq \hat{d}(\mu_{i-1}, \mu_i) \leq 2^{-i}.$$

Now we are going to show that the sequence $((X_i, d_i, \mu_i))_{i=1}^\infty$ is not convergent. Suppose the contrary and denote the limit by (X, d, μ) . Let C be an integer number with $C \geq \text{diam}(X)$.

Without loss of generality, one may assume that $X \cup (\bigcup_{i=1}^\infty X_i) \subset Y$, for some metric space (Y, ϱ) , and the following are satisfied:

1. the metric d_i on X_i is inherited from Y ;
2. $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \mu$ (in the sense that $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\varrho}(\mu_i, \mu) = 0$).

Let U denote the closed 1-neighborhood of X in Y . Clearly, the function $\psi_n: Y \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_n(y) = \varrho(y, X)$ is an n -Lipschitz function. For every $i \geq C+3$ find $j(i) \leq C+3$ such that $x_{j(i)} \in X_i \setminus U$. Let $n > -\alpha_{C+3} + 1$ be a natural number. Then $\mu_i(\psi_n) \geq n + \alpha_{j(i)}$ and, since $\mu(\psi_n) = 0$, we see that

$$\hat{\varrho}(\mu_i, \mu) \geq |\mu(\psi_n)| \geq \left| \frac{n + \alpha_{j(i)}}{n2^n} \right| \geq \left| \frac{n + \alpha_{C+3}}{n2^n} \right| \geq \frac{1}{n2^n}.$$

This contradicts to the assumption that $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \mu$.

Remarks

One can consider another metric on the space $I(M)$, for a compact metric space (M, d) . Namely,

$$\check{d}(\mu, \nu) = \bigoplus_{n=1}^\infty \frac{\hat{d}_n(\mu, \nu)}{n2^n}, \quad \mu, \nu \in I(M).$$

One can similarly prove that counterparts of the above results are also valid for this metric.

It is known that the space of mim-spaces is complete and separable (see, e.g., [5]). We do not know, however, what is a geometric model for this space. The same question is open also for the (completed) space of mim-spaces.

Another open problem is that of description of the elements of the completion of the space \mathbb{M} .

References

1. L. Bazylevych, D. Repovš, M. Zarichnyi. Spaces of idempotent measures of compact metric spaces. *Topol. Appl.* 157 (2010), 136–144.
2. M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by Jacques Tits). *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 53 (1981), P. 53–78.
3. V. P. Maslov, S. N. Samborskii (eds.), *Idempotent analysis*, *Adv. Soviet Math.*, 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
4. N. Mazurenko, M. Zarichnyi, Idempotent ultrametric fractals. - *Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math.* 2014. Issue 79. P. 111–118.
5. K.-Th. Sturm. On the Geometry of Metric Measure Spaces. *Acta Mathematica*, 2006, Volume 196, Issue 1, P. 65–131.
6. M. Zarichnyi. Spaces and maps of idempotent measures. *Izvestiya: Mathematics*, 2010, 74:3, 481–499.

Viktoriya Brydun

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

E-mail: olja.lviv133@gmail.com

Aleksandr Savchenko

Kherson State Agrarian University, 23 Rozy Liuksemburg Str., 73006 Kherson, Ukraine

E-mail: savchenko1960@rambler.ru

Mykhailo Zarichnyi

Department of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska Str. 1, 79000 Lviv, Ukraine

E-mail: mzar@litech.lviv.ua

Аналітичне моделювання однієї задачі квазіреальної нескінченно малої деформації поверхні

Лілія Леонтіївна Безкоровайна

<http://orcid.org/0000-0002-8305-3129>

Юлія Степанівна Хомич

<http://orcid.org/0000-0002-3428-8001>

Об'єктом дослідження в даній роботі є квазіреальна нескінченно мала деформація довільної однозв'язної регулярної поверхні ненульової гаусової кривини за умови, що при цій деформації відхилення поверхні від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі.

Ключові слова Квазіреальна нескінченно мала деформація; варіація; відхилення; система рівнянь.

УДК 514.76/77

1 Вступ

У тривимірному евклідовому просторі E_3 розглянемо область G , що належить площині x^1, x^2 . Нехай S – деяка однозв'язна поверхня класу C^3 , що в околі довільної своєї точки допускає параметризацію

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2), \quad x^1, x^2 \in G,$$

де \bar{r} – радіус-вектор точки поверхні, до того ж $\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 \neq 0$, $\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i}$. Тут і надалі всі індекси набувають значень 1, 2.

В роботі будемо розглядати нескінченно малу деформацію першого порядку поверхні S з деформуючим полем $\bar{U}(x^1, x^2)$ в класі C^3 і параметром

деформації $t \rightarrow 0$

$$\bar{r}^*(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{U}(x^1, x^2). \quad (1)$$

Надалі геометричні об'єкти zdeформованої поверхні S^* , на відміну від відповідних об'єктів поверхні S , умовимося відмічати позначкою $*$, а варіації об'єктів поверхні S будемо позначати через δ .

Означення 1 Якщо при нескінченно малій деформації вигляду (1) елемент площі поверхні змінюється за заданим законом, то таку деформацію будемо називати квазіреальною нескінченно малою деформацією (к. н. м. д.) поверхні.

Частинні похідні вектора зміщення $\bar{U}(x^1, x^2)$ к. н. м. д. поверхні розкладемо за базисом $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n}$, де \bar{n} – орт нормалі поверхні S [2]

$$\bar{U}_i = \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu \delta_i^\beta \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \bar{n}, \quad (2)$$

де $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \in C^2$ – деяке поле симетричного двічі контраваріантного тензора, $T^\alpha \in C^2$ – поле контраваріантного вектора, c_{ij} – дискримінантний тензор поверхні S ($c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, g_{ij}$ – коефіцієнти першої основної квадратичної форми поверхні), δ_j^i – символи Кронекера, $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$ – деяка функція. В [2] доведено, що функція μ визначає закон змінювання елемента площі поверхні при її к. н. м. д. При $\mu = 0$ квазіреальна деформація поверхні зводиться до ареальної нескінченно малої деформації.

Основна система рівнянь квазіреальної нескінченно малої деформації поверхні має вигляд [2]

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $b_{\alpha\beta}$ – коефіцієнти другої квадратичної форми, а комою позначено символ коваріантної похідної на базі метричного тензора g_{ij} поверхні S . Система рівнянь (3) містить три диференціальних рівняння відносно 6 невідомих функцій: $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, T^\alpha, \mu$.

2 Обчислення варіації відхилення l поверхні від дотичної площини

Відомо, що відхилення l від дотичної площини при переміщенні на поверхні S з точки дотику в нескінченно близьку точку по деякій кривій (далі,

коротко, - відхилення від дотичної площини) або, іншими словами, "підйом дотичної площини" над поверхнею виражається половиною другої квадратичної форми,

$$l = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta.$$

Аналогічна формула має місце і для поверхні S^*

$$l^* = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}^*dx^\alpha dx^\beta. \quad (4)$$

Для обчислення варіації відхилення δl поверхні S від дотичної площини при її к. н. м. д. використаємо розклад коефіцієнтів другої квадратичної форми $b_{\alpha\beta}^*$ поверхні S^* по степенях t , здобутий в роботі [2]

$$b_{\alpha\beta}^* = b_{\alpha\beta} + t\beta_{\alpha\beta} + o(t^2), \quad (5)$$

де

$$\beta_{\alpha\beta} \equiv \delta b_{\alpha\beta} = c_{\alpha\gamma}T^{\gamma\nu}b_{\nu\beta} + c_{\alpha\gamma}T_{,\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta}\mu, \quad (6)$$

а через $o(t^2)$ позначено величину порядку 2 і вище відносно t , якою ми нехтуємо. Підставимо в (4) вираз для коефіцієнтів другої квадратичної форми $b_{\alpha\beta}^*$ з (5)

$$l^* = l + \frac{1}{2}t\beta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + o(t^2). \quad (7)$$

Звідси знаходимо варіацію відхилення δl поверхні від дотичної площини при її к. н. м. д.

$$\delta l = \frac{1}{2}\beta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (8)$$

Внесемо тепер в (8) замість величин $\beta_{\alpha\beta}$ їх відповідні подання через тензори деформації $T^{\alpha\beta}$, T^α та функцію μ з (6), тоді дістанемо вираз для шуканої варіації

$$\delta l = \frac{1}{2}(c_{\alpha\gamma}T^{\gamma\nu}b_{\nu\beta} + c_{\alpha\gamma}T_{,\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta}\mu)dx^\alpha dx^\beta, \quad (9)$$

а відхилення l^* поверхні S^* набуде вигляду

$$l^* = l + \frac{1}{2}t(c_{\alpha\gamma}T^{\gamma\nu}b_{\nu\beta} + c_{\alpha\gamma}T_{,\beta}^\gamma - b_{\alpha\beta}\mu)dx^\alpha dx^\beta + o(t^2). \quad (10)$$

3 Постановка задачі та її аналітичне вираження

Поставимо задачу дослідити квазіреальну нескінченно малу деформацію поверхні S за умови, що її відхилення від дотичної площини при цій деформації зберігається у будь-якому напрямі.

Очевидно, відхилення поверхні l від дотичної площини стаціонарне або зберігається при нескінченно малій деформації першого порядку, якщо його приріст є величиною не менш ніж другого порядку відносно t (чим ми нехтуємо). І навпаки. Тому стаціонарність величини l характеризується тим, що її перша варіація тотожно дорівнює нулю. Інакше кажучи, для стаціонарності відхилення поверхні від дотичної площини при її к. н. м. деформації необхідно і достатньо, щоб диференціали dx^1, dx^2 задовольняли рівняння

$$\beta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (11)$$

Відхилення поверхні від дотичної площини при її к. н. м. д. залишається стаціонарним у будь-якому напрямі тоді і лише тоді, коли $\beta_{\alpha\beta} = 0$. З урахуванням виразів $\beta_{\alpha\beta}$ з (6) приходимо до теореми

Теорема 1 *Для того щоб при квазіреальній нескінченно малій деформації однозв'язна поверхня класу C^3 зберігала своє відхилення від дотичної площини у будь-якому напрямі, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*

$$c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha - b_{ij} \mu = 0. \quad (12)$$

Звідси випливає, що аналітичною моделлю поставленої на початку пункту задачі є така система рівнянь

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, \\ c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha - b_{ij} \mu = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Неважко переконатися, що друге рівняння (13₂) можна виключити з цієї системи, через те що воно є її наслідком. Для того, щоб у цьому переконатися, достатньо співвідношення (13₃) помножити на c^{ij} і згорнути його по індексах i та j .

Отже, поставлена задача остаточно зводиться до п'яти незалежних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} - T^{\alpha}b_{\alpha}^{\beta} + \mu_{\alpha}c^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha} - b_{ij}\mu = 0, \\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

відносно шести невідомих функцій: $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, T^{\alpha}, \mu$.

Має місце

Теорема 2 Для існування квазіреальної нескінченно малої деформації однозв'язної поверхні класу C^3 з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі, необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (14) мала ненульовий розв'язок $(T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}, \mu)$.

4 Дослідження системи рівнянь (14) та представлення її розв'язків для довільної поверхні

Теорема 3 Нехай довільна однозв'язна поверхня S класу C^3 ненульової гаусової кривини допускає квазіреальну нескінченно малу деформацію з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі, тоді на поверхні S існує симетричне тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$ і функція $\mu \in C^2$, які можна подати у вигляді

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(T_{,j}^{\alpha}d^{j\beta} + T_{,j}^{\beta}d^{j\alpha}), \quad (15)$$

$$\mu = \frac{1}{2}T_{,j}^{\alpha}d^{j\beta}c_{\beta\alpha}, \quad (16)$$

де d^{ij} – тензор, обернений до тензора b_{ij} , а тензор T^{α} є розв'язком системи рівнянь

$$T_{,\alpha i}^{\alpha} + T_{,j}^{\alpha}d_{,\alpha}^{j\beta}b_{\beta i} + T^{\beta}b_{\beta i}2H = 0, \quad (17)$$

H – середня кривина поверхні.

Доведення Припустимо, що регулярна поверхня S допускає к. н. м. д., при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі, тоді в силу теореми 2 система рівнянь (14) має ненульовий розв'язок $(T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}, \mu)$. Доведемо, що на поверхні S тензорне поле $T^{\alpha\beta}$ та функцію μ можна подати у вигляді (15) і (16) відповідно через тензор T^{α} , який є розв'язком системи рівнянь (17).

Надалі обмежимося розглядом поверхонь ненульової гаусової кривини K і, наслідуючи І. Н. Векуа [1], введемо до розгляду тензор $d^{\alpha\beta}$, обернений до тензора $b_{\alpha\beta}$, за формулою

$$d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}, \quad d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta_j^i.$$

Якщо домножимо другу рівність системи (14) на $c^{i\gamma} d^{j\nu}$, то одержимо вираз для тензора $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta} = -(T_{,j}^{\alpha} d^{j\beta} + c^{\alpha\beta} \mu). \quad (18)$$

Тепер (18) помножимо на $c_{\alpha\beta}$ та згорнемо по індексах α, β . В силу $c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$, дістанемо вираз (16) для функції μ . Далі підставимо μ з (16) у (18), внаслідок чого надамо тензору $T^{\alpha\beta}$ симетричної форми (15). Отже, нам вдалося у явному вигляді виразити три компоненти тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ та функцію μ через дві компоненти T^1, T^2 контраваріантного вектора T^α .

Підставимо в перше співвідношення системи рівнянь (14) вирази для тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ і функції μ з (15) та (16), у підсумку отримаємо систему двох диференціальних рівнянь відносно двох компонент тензора T^α

$$T_{,j\alpha}^{\alpha} d^{j\beta} + T_{,j}^{\alpha} d_{,\alpha}^{j\beta} + T^{\alpha} b_{\alpha}^{\beta} = 0. \quad (19)$$

Здійснимо перетворення системи рівнянь (19). Для цього застосуємо тождність Річчі до тензора T^α

$$T_{,jk}^{\alpha} - T_{,kj}^{\alpha} = -T^i R_{ijk}^{\alpha},$$

де R_{ijk}^{α} – тензор Рімана. Згорнемо останню рівність по індексах α і k , тоді дістанемо

$$T_{,j\alpha}^{\alpha} - T_{,\alpha j}^{\alpha} = -T^i R_{ij\alpha}^{\alpha}, \quad (20)$$

де $R_{ij\alpha}^{\alpha} = R_{ij}$ – тензор Річчі. Крім того, приймаємо до уваги наступні тождності [3]

$$R_{ij} = -K g_{ij}; \quad d_i^{\beta} = \frac{1}{K} c_{i\alpha} c^{\beta\gamma} b_{\gamma}^{\alpha}; \quad c_{i\alpha} c^{\beta\gamma} = \delta_i^{\beta} \delta_{\alpha}^{\gamma} - \delta_i^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (21)$$

З урахуванням (21) рівнянням (19) можна надати вигляду

$$T_{,\alpha j}^{\alpha} d^{j\beta} + T_{,j}^{\alpha} d_{,\alpha}^{j\beta} + T^{\beta} 2H = 0, \quad (22)$$

Помножимо (22) на $b_{\beta i}$ і згорнемо по індексу β , внаслідок чого нарешті отримаємо систему рівнянь (17). Таким чином, ми довели, що при к. н. м. д. з зазначеним обмеженням на поверхні S по необхідності існує тензорне поле $T^{\alpha\beta}$ та функція μ , які виражаються через тензор T^α у вигляді (15) і (16) відповідно, а T^α в свою чергу є розв'язком системи рівнянь (17). Теорема доведена.

Має місце і обернена

Теорема 4 Нехай на довільній поверхні $S(K \neq 0)$ класу C^3 існує тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$ та функція $\mu \in C^2$, які можна виразити у вигляді (15), (16) відповідно через тензорне поле $T^\alpha \in C^2$, яке є розв'язком системи рівнянь (17). Така поверхня допускає квазіреальну нескінченно малу деформацію з відхиленням від дотичної площини, стаціонарним у будь-якому напрямі. При цьому поле зміщення \bar{U} має представлення

$$\bar{U}(M) = \int_{M_0M} \left(\left(-\frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^\alpha d^{j\beta} - \frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^\beta d^{j\alpha} - \frac{1}{2}c_{k\alpha}T_{,j}^\alpha d^{jk}\delta_i^\beta \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \bar{n} \right) dx^i +$$

$$+\bar{U}_0, \quad (23)$$

де \bar{U}_0 – сталий вектор, а криволінійний інтеграл береться по довільній спрямній лінії, що належить поверхні та з'єднує фіксовану точку M_0 зі змінною точкою M .

Доведення Припустимо, що на поверхні $S(K \neq 0)$ існує тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$ та функція $\mu \in C^2$, які можна подати формулами (15), (16) відповідно через тензорне поле $T^\alpha \in C^2$, яке є розв'язком системи рівнянь (17). Покажемо, що за таких умов поверхня допускає к. н. м. д. зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі. Для цього спочатку перевіримо, що за даного подання тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ та функції μ формулами (15), (16) система рівнянь (14) задовольняється.

Дійсно, внесемо вирази для $T^{\alpha\beta}$ та μ з (15), (16) в перше співвідношення системи (14), внаслідок чого одержимо

$$T_{,j\alpha}^\alpha d^{j\beta} + T_{,j}^\alpha d^{j\beta}_{,\alpha} + T^\alpha b_\alpha^\beta = 0. \quad (24)$$

Якщо тепер врахувати тотожність Річчі (20) та формули (21), то системі рівнянь (24) зможемо надати вигляду (22). Помножимо (22) на $b_{\beta i}$ і згорнемо по індексу β , в результаті чого переконаємося, що співвідношення (14₁) врешті рещт зведеться до системи рівнянь (17). Оскільки за умовою теореми тензорне поле T^α є розв'язком системи рівнянь (17), то звідси випливає, що перше співвідношення системи рівнянь (14) тотожно виконується.

Переконаємося, що друге співвідношення системи рівнянь (14) за умови теореми також тотожно виконується. З цієї метою спершу покажемо, що з формул (15), (16) випливає співвідношення (18). Справді, помножимо (16) на $c^{\alpha\beta}$. У відповідності з тотожністю (21₃) дістанемо

$$c^{\alpha\beta} \mu = \frac{1}{2} \left(T_{,k}^\beta d^{k\alpha} - T_{,k}^\alpha d^{k\beta} \right). \quad (25)$$

Внесемо тепер в (15) замість доданку $\frac{1}{2}T_{,k}^{\beta}d^{k\alpha}$ його вираз з (25), а саме

$$\frac{1}{2}T_{,k}^{\beta}d^{k\alpha} = \frac{1}{2}T_{,k}^{\alpha}d^{k\beta} + c^{\alpha\beta}\mu.$$

Тоді рівностям (15) можна надати вигляду (18). Підставимо нарешті вираз для $T^{\alpha\beta}$ з (18) в друге співвідношення системи рівнянь (14), внаслідок чого одержимо тотожність

$$c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}b_{\beta j} + c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha} - b_{ij}\mu = -c_{i\alpha}T_{,k}^{\alpha}d^{k\beta}b_{\beta j} - c_{i\alpha}c^{\alpha\beta}\mu b_{\beta j} + c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha} - b_{ij}\mu \equiv 0.$$

Оскільки третє співвідношення системи рівнянь (14) є умовою симетричності тензора $T^{\alpha\beta}$, а сам цей тензор $T^{\alpha\beta}$ за умовою теореми подано в симетричному вигляді (15), то це співвідношення, очевидно, теж виконується.

Підставимо вирази для тензорного поля $T^{\alpha\beta}$ та функції μ з (15), (16) та вираз для T^{α} з (17) в систему двох диференціальних рівнянь (2)

$$\bar{U}_i = \left(-\frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^{\alpha}d^{j\beta} - \frac{1}{2}c_{i\alpha}T_{,j}^{\beta}d^{j\alpha} - \frac{1}{2}c_{k\alpha}T_{,j}^{\alpha}d^{jk}\delta_i^{\beta} \right) \bar{r}_{\beta} + c_{i\alpha}T^{\alpha}\bar{n}. \quad (26)$$

З попереднього випливає, що умови інтегрованості (14) системи рівнянь (26) тотожно виконуються.

Отже, для довільної однозв'язної поверхні S класу C^3 ненульової гаусової кривини існує поле вектора зміщення \bar{U} у вигляді (23). Для будь-якого контраваріантного вектора T^{α} з (17) це деформує поле однозначно (з точністю до сталого вектора \bar{U}_0) визначає квазіреальну нескінченно малу деформацію, при якій зберігається відхилення від дотичної площини цієї поверхні у будь-якому напрямі. Теорема доведена.

Література

1. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции*, М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2-е изд., 512 с. (1988).
2. Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. *Квазіреальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3* // Proc. Intern. Geom. Center, №7(2), С. 6-19, (2014).
3. Безкоровайна Л. Л. *Ареальні нескінченно малі деформації і ерівноважені стани пружної оболонки*, Одеса: Астропринт, 168 с. (1999).

Лілія Леонтіївна Безкоровайна

<http://orcid.org/0000-0002-8305-3129>

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

E-mail: liliyabez@gmail.com

Юлія Степанівна Хомич

<http://orcid.org/0000-0002-3428-8001>

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Liliia L. Bezkorovaina, Yuliia S. Khomych

Analytical modeling of one problem of the quasiareal infinitesimal deformation of the surface

In this paper the object of the study is the quasiareal infinitesimal deformation of the unrestricted simply connected regular surface of non-zero Gauss curvature, provided that under this deformation the deviation of the surface from the tangent plane is preserved in any direction.

Використання інформаційних технологій в ОНАХТ при вивченні вищої математики

Н.Г.Коновенко, Ю.С. Федченко, Н.П. Худенко

<http://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

<http://orcid.org/0000-0002-7473-3237>

<http://orcid.org/0000-0002-0876-0691>

Бурхливий розвиток інформаційних технологій і комп'ютерної техніки відкриває нові можливості вдосконалення педагогічних технологій і методик навчання. Показано використання інформаційно-комунікаційних технологій і електронних засобів навчання у викладанні курсу вищої математики в Одеській національній академії харчових технологій, що спрямоване на підвищення ефективності й якості навчання студентів.

Ключові слова Інформаційні технології, хмарні сервіси, вища математика, інформаційно-пошукові системи.

Навчаючи студентів основам вищої математики викладачі кафедри вищої математики Одеської національної академії харчових технологій (ОНАХТ), насамперед, пам'ятають про досягнення наступної цілі: всебічний розвиток особистості, яка отримає належні математичні навички та знання, вміння аналізувати матеріал, знаходити аналогії, класифікувати дані для подальшої своєї професійної діяльності.

Для досягнення високих результатів, насамперед, необхідно сформувані у студента позитивне ставлення до вищої математики, допомогти йому позбутися страху перед предметом, знищити різноманітні бар'єри та перестороги. Все це можливо завдяки врахування особливості категорії студентів, застосування принципу наглядності у використанні матеріалу, у потужній мотивації, у залученні студента до активної аудиторної діяльності.

Окрім цього, навчання має відповідати сучасному стану науки, повинні впроваджуватися як нові інноваційні технології так і методики, доцільно використовувати всі нові програмні розробки тощо.

Важливим є поєднання різних форм організації навчання. Тут виокремимо аудиторні та позааудиторні години. Значна частина матеріалу виноситься на самостійну роботу студента, яка включає індивідуальну роботу. Організація такої роботи суттєво залежить від викладача, який має вірно і раціонально розподілити матеріал самостійної роботи, вчасно підказати та зорієнтувати студентів, а інколи, проконтролювати і промотивувати студента до навчання. Адже, зазвичай, у ВНЗ, де кафедра вищої математики не є випускаючою, викладачі працюють лише з 1 та 2 курсами. Особливістю є те, що після школи студенти не зовсім готові до самостійного освоєння матеріалу. Саме в цей час стає у нагоді сайт викладача, потреба в якому вже назріла і який дає можливість спілкування зі студентами не залежно від часу та місця знаходження, створює атмосферу неформального спілкування, додає студентові додаткову впевненість та самостійність. Значні особливості дистанційного навчання впроваджуються завдяки віртуального навчального середовища (оболонка, платформа), яку розміщено в мережі Інтернет. І хоча таких платформ є широкий вибір (Moodle, CourseWork, FLE тощо), як безкоштовних, так і за кошти, та охопити всі можливості навчання жодна не може. Багато залежить від самого викладача та його бачення процесу навчання. Платформи зручні для надання теоретичного матеріалу, для організації тестування за результатами навчання, проведення анкетування, отримання статистики відвідувань платформи студентами тощо. Та такі віртуальні навчальні середовища найкраще себе проявляють у рамках академічного навчання, де студенти деякого курсу мають змогу мати інформацію з усіх дисциплін даного курсу.

Використання сайтів викладачів кафедри вищої математики дозволяють надати наступну інформацію:

- конспект лекцій, практичні розробки;
- перелік питань до модульних контролів, іспитів;
- домашні завдання;
- деякі важливі математичні таблиці;
- презентації, які виконано самими студентами;
- опитування при проведенні конкурсів на найкращу презентацію тощо;
- фотографії студентів – учасників різних математичних подій.

Таке спілкування є дуже зручним й для організації навчання студентів заочної форми навчання.

Як доповнення до способів дистанційного спілкування, не менш важливу роль відіграють створені тематичні групи в соціальних мережах. Ми зупинимось на мережі Facebook, оскільки на наш досвід, це одна з найпотужніших соціальних мереж з широкими можливостями, що примножуються у відповідності до розвитку інформаційних технологій.

Чим відрізняється Facebook від сайту викладача і чи не є це дубляжом одного і того ж? Відповідь на це питання та про особливості роботи групи у Facebook ми отримали вже під час проведення експерименту. Сайт і соціальна мережа доповнюють одна одну. Однозначно можемо стверджувати, що у групі спілкування на організаційні питання відбувається значно краще. Будь-які об'яви розповсюджуються як вірус, за умови, що студент поділиться інформацією з друзями. Окрім цього, кожен студент в групі може додавати статті, ділитися посиланнями та іншою важливою інформацією. Є можливість проведення чату з учасниками групи.

З урахуванням, що майже кожен студент щодня проводить значний час у даній соціальній мережі вважаємо доцільним користуватися її можливостями для організації навчального процесу.

Наповнення цікавим контентом дає можливість донести до студента додаткову цікаву й важливу інформацію. Зокрема, друкуючи статті з тематики про користування програмними математичними забезпеченнями, такими як Mathcat, Maple, Maxima чи онлайн-сервісами AlphaWolfram ми розширюємо кругозір студентів та вчимо користуватися ними.

З акцентуємо увагу, що для більш яскравої подачі матеріалу викладачу необхідно застосовувати презентації, як один із видів методичного забезпечення своєї роботи.

Аналіз досвіду використання електронних презентацій показує, що вони дозволяють видозмінювати зміст заняття, задіяти творчий потенціал викладача, який має можливість коригувати створені ним екранні форми представлення змісту навчального матеріалу і здійснювати самоаналіз планованого заняття. Переваги навчального заняття з використанням презентацій полягають також в тому, що демонстраційні можливості мультимедійного забезпечення допомагають зберігати стійку мотивацію у студентів і розвивають просторову уяву.

В умовах стрімкого розвитку сучасних інформаційних технологій та мережі Інтернет вищі навчальні заклади відходять від використання власного

обладнання і програмного забезпечення в бік сервіс-орієнтованих технологій. Зокрема, коли власне обладнання не є достатнім для збирання, передачі чи обробки даних, то у нагоді стають хмарні технології.

Хмарні технології (cloud computing) визначають як динамічно масштабований вільний спосіб доступу до зовнішніх обчислювальних інформаційних ресурсів у вигляді сервісів, що надаються за допомогою мережі Інтернет ([1]).

Найголовнішою функцією таких технологій є задоволення потреб користувачів, що потребують віддаленої обробки даних.

Хмарні технології – це і браузерний інтерфейс поштової скриньки, і можливість створення та редагування офісних документів онлайн, і складні математичні обчислення, для яких потужності одного персонального комп'ютера недостатньо, що є особливо актуальним при вивченні вищої математики.

Загальною перевагою для всіх користувачів хмарних технологій є те, що отримати доступ до «хмари» можна не лише з ПК чи ноутбука, але також з нетбука, смартфона, планшета, оскільки головною вимогою для доступу є наявність Інтернету, а для роботи програмного забезпечення «хмари» використовуються потужності віддаленого серверу.

Тепер в будь-якій аудиторії можна організувати сучасний навчальний процес, використовуючи ноутбуки, ірад-и або нетбуки, що підтримують безпроводне підключення за стандартом Wi-fi.

Основні переваги, які можуть дати хмарні технології, очевидні:

- економія засобів на придбання програмного забезпечення (використання технології Office Web Apps (Office онлайн));
- зниження потреби в спеціалізованих приміщеннях;
- виконання багатьох видів навчальної роботи, контролю і оцінки online;
- економія дискового простору;
- антивірусна, безрекламна, антихакерська безпека та відкритість освітнього середовища для викладачів і студентів.

Окрім очевидних переваг та користі використання хмарних технологій, доцільно відмітити і деякі недоліки. Основними недоліками хмарних технологій є:

- 1) їх невелике поширення в Україні;
- 2) необхідність доступу до швидкісного Інтернету;
- 3) обмежена функціональність програмного забезпечення.

Український хмарний ринок, на відміну від ринків США чи ЄС, нині знаходиться у фазі розвитку – формування попиту і акумулювання первинного досвіду споживання хмарних рішень.

На даний час спостерігається поступова міграція освітніх сервісів за допомогою сучасних інформаційно-комунікаційних технологій та інформаційних ресурсів в хмару, що згодом приведе до стрімкого впровадження цих сервісів в освіту і соціальну сферу.

Технологія хмарних обчислень і реалізована на її основі освітня платформа дозволяють максимально ефективно використовувати наявні програмно-апаратні ресурси ВНЗ, а студенти дістають можливість застосовувати на практиці найсучасніші комп'ютерні технології.

Приклади використання хмарних технологій в освіті:

- використання Office Web Apps-додатків (Office 365), ([2]);
- електронні журнали і щоденники (<http://shodennik.ua/>);
- он-лайн сервіси для учбового процесу, спілкування, тестування;
- системи дистанційного навчання, бібліотека, медіатека;
- сховища файлів,спільний доступ (Dropbox,SkyDrive);
- відеоконференції;
- електронна пошта з доменом вуза.

Google надає безліч додатків і сервісів, що допомагають в навчанні:

- Google ArtProject - інтерактивно-представлені популярні музеї світу;
- Google Docs - онлайн-офіс;
- Google Maps - набір карт.
- Google Sites - безкоштовний хостинг, який використовує вікі-технологію:

- Google Translate - перекладач;
- YouTube - відеохостинг;
- Google Диск - єдиний простір для зберігання файлів і роботи з ними.

Таким чином, використання хмарних технологій в освіті дозволить подолати існуючі бар'єри: географічні, технологічні, соціальні та підняти навчання на новий якісний рівень. Навчання, засноване на хмарних технологіях, не вимагає від студентів фізичної присутності за місцем отримання освіти, що так важливо в режимі сучасного життя. Використання технології дозволяє не тільки отримати доступ до освітніх матеріалів різного виду (текстовим, візуальним, мультимедійним), але й виконувати роботу спільно з викладачем або групою. Для забезпечення узгодженої роботи вузлів обчислювальної мережі на стороні хмарного провайдера використовується

спеціалізоване проміжне програмне забезпечення, що забезпечує моніторинг стану обладнання і програм, балансування навантаження, забезпечення ресурсів для вирішення завдання.

Отже, одним з реальних шляхів підвищення якості підготовки спеціалістів, активізації навчально-пізнавальної та науково-дослідницької діяльності студентів, розкриття їх творчого потенціалу, збільшення ролі самостійної та індивідуальної роботи є розробка та впровадження у навчальний процес ВНЗ інноваційних технологій навчання, в основу яких покладено органічне поєднання традиційних та комп'ютерно-орієнтованих форм, методів і засобів навчання, зокрема й хмарних технологій.

Література

1. Michael Miller. Cloud Computing: Web-Based Applications That Change the Way You Work and Collaborate Online. Que Publishing, (2008), 312 p.
2. М. А. Шиненко, Н. В. Сороко. Перспективи розвитку програмного забезпечення як послуги для створення документів електронної бібліотеки на прикладі Microsoft Office 365 // Інформаційні технології і засоби навчання: електронне наукове фахове видання [Електронний ресурс] / Гол. ред.: В.Ю. Биков; Ін-т інформ. технологій і засобів навчання АПН України, Центр. ін-т післядиплом. пед. освіти АПН України. – 2011. – Том 26, № 6 (2011). – Режим доступу: <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/ITZN/em5/emg.html>. – Заголовок з екрана.
3. Microsoft Operations Framework [Электронный ресурс]: (портал компании Microsoft). – (2010). – Режим доступа: <http://www.microsoft.com/mof>
4. Н. Г. Коновенко, Ю. С. Федченко, Н. П. Худенко. Математика та інформаційні технології // Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2015”, (2015), С. 25-26.

Н.Г.Коновенко, Ю.С. Федченко, Н.П. Худенко

<http://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

<http://orcid.org/0000-0002-7473-3237>

<http://orcid.org/0000-0002-0876-0691>

ОНАПТ, Одесса, Украина

E-mail: address: konovenko@ukr.net; Fedchenko_Julia@ukr.net;

khudenkon@mail.ru

Nadiia Konovenko, Julia Fedchenko, Nadiia Khudenko

Using of information technologies in ONAFT when studying Mathematics

The rapid development of information technologies and computer technics opens new possibilities for improving educational technology and teaching methods. It is shown that using information and communication technologies and e-learning in teaching of mathematics at the Odessa National Academy of Food Technologies, which is aimed to improve the efficiency and quality of student learning.

Концепція фундаменталізації математичної освіти студентів вищої технічної школи

Ю.Г. Лобода, О.Ю. Орлова

У статті розглянуті проблеми активізації учбово-пізнавальної діяльності студентів вищої школи при вивченні вищої математики. Активізації учбово-пізнавальної діяльності студентів сприяють збудження інтересу до дисципліни, професійна спрямованість, наочність навчання, використання міжпредметних зв'язків, методи активного навчання. Виявлені і описані критерії активізації учбово-пізнавальної діяльності студентів. Детально розглянуто формування базових професійних компетенції студентів вищої школи. Розглянуті можливості для реалізації прикладної спрямованості навчання вищої математики, приділена увага міжпредметним зв'язкам математики з іншими учбовими дисциплінами, розібрані основні функції між предметних зв'язків, роль міжпредметних зв'язків в розвитку самостійного і творчого мислення, у формуванні пізнавальної активності і інтересу до пізнання математики. Сформульовані вимоги до складання професійно-спрямованих і дослідницьких завдань, класифіковані їх функції. Придільена увага традиційним і нетрадиційним методам навчання, в цьому контексті розглянуті поняття "Активне навчання", "розвиваюче навчання", "проблемне навчання". В якості активізуючих методів навчання розглянуті і класифіковані ділові ігри, метод мозкової атаки. Детально розглянута проблема організації і управління самостійною роботою студентів, а так само контролю контролю за її виконанням.

Ключові слова Активне навчання, розвиваюче навчання, проблемне навчання

УДК 372351

Аналіз методів, організаційних форм, заходів і засобів навчання у вищій технічній школі, сучасного стану математичної підготовки студентів нематематичних спеціальностей, а також опрацювання на практиці навчання з проблеми фундаменталізації математичної освіти майбутніх фахівців технічного профілю дали змогу сформулювати її концепцію, що складається з таких положень [8]:

1. Високий динамізм сучасного наукового прогресу і високі вимоги до професійної підготовки інженерів вимагають забезпечення належного рівня математичної підготовки студентів. Разом з тим в останні роки відбулось значне скорочення (до 50 відсотків) кількості навчальних годин на вивчення загального курсу при тому, що залишився незмінний традиційний курс вищої математики. Природно, що за відведену кількість годин неможливо забезпечити ґрунтовне вивчення під час лекцій і практичних занять зазначеного змісту, тому 50 відсотків змісту відноситься на самостійну роботу студентів. Таке скорочення навчальних аудиторних годин відбулося за всіма навчальними дисциплінами загальноосвітнього і загальнонаукового циклу. А це привело до значного збільшення обсягу матеріалу для самостійної роботи студентів, і реально студенти не в змозі виконати такий обсяг без допомоги викладача.

2. Кількість відомостей з математики, яка останнім часом стала досить великою, не може бути засвоєною за відносно короткий термін навчання (2 – 4 семестри в технічному вузі). Тому її треба впорядкувати на принципово новій основі. Цією основою може бути керування СРС, що є одним з шляхів інтенсифікації навчального процесу і підвищення якості математичної підготовки студентів. Самостійна робота збуджує студентів до активної розумової діяльності, сприяє виробленню їх свідомого відношення до систематичної навчальної праці.

В процесі самостійної навчально-пізнавальної діяльності у студентів розвиваються такі якості особистості, як самостійність, витримка, критичність мислення та інші позитивні якості.

Таким чином, при проведенні самостійної роботи досягається єдність процесів «засвоєння знань» та розвитку «уміння мислити».

3. В умовах ступеневої системи вищої технічної освіти можливим шляхом подолання труднощів і негативних явищ, що склалися, є особисто орієнтоване навчання, диференціація та індивідуалізація навчально-виховного процесу.

4. Відведену діючим навчальним планом кількість аудиторних годин можна вважати допустимою, якщо для тих студентів, які після закінчення ВНЗ підуть на виробництво, дещо скоротити обсяг програмного матеріалу, а для тих студентів, які будуть вчитися в магістратурі і займатися науково-дослідною роботою в галузі науки і техніки, вже з першого курсу паралельно загальному курсу математики читати його додаткові розділи і спеціальні математичні курси, зокрема курс математичного моделювання.

5. Активізація навчально-пізнавальної діяльності студентів, зокрема з вищої математики, є важливою складовою навчально-виховного процесу вищої школи.

Критеріями активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів з математичних дисциплін є формування пізнавального інтересу до математики, збільшення активності в процесі навчання, наявність ознак пізнавальної активності, прояв самостійності в навчанні математики, прояв пізнавальної самостійності, участь у студентських олімпіадах і конференціях, самостійний пошук і використання математичних методів розв'язування задач міжпредметного і змісту, професійно спрямованих, задач дослідницького характеру.

Активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів сприяють збудження інтересу до дисципліни, наочність навчання, використання міжпредметних зв'язків, методи активного навчання тощо. Напрямками інтенсифікації навчального процесу й активізації пізнавальної діяльності студентів є активна участь студентів у проведенні лекційних занять, залучення студентів до мотивованої усвідомленої самостійної роботи, створення належного забезпечення, орієнтованого на виконання самостійних індивідуальних і контрольних робіт, модульних завдань, а також методичних розробок для обдарованих студентів, які приймають участь в математичних олімпіадах і студентських конференціях, професійна спрямованість навчання математики, формування математичної компетентності студентів і розвиток їх творчої ініціативи, застосування комп'ютерних технологій з використанням електронних підручників, програмно-методичного комплексу, навчальних курсів, математичних пакетів при розв'язуванні складних математичних задач тощо.

Засвоєні знання, набуті навички і вміння студентів з математики сприяють їх математичному та загальному розвитку, абстрактному і логічному мисленню, що необхідно майбутнім фахівцям.

6. З метою підвищення якості фундаментальної математичної підготовки студентів технічних спеціальностей необхідно систематично впроваджувати принципи професійної спрямованості викладання загального курсу математики, як при вивченні теоретичного матеріалу, так і розв'язуванні системи вправ.

В основу професійної спрямованості навчання мають бути покладені принципи професійної відповідності та наступності, основними засобами яких є математичне моделювання та наявність типових прикладних задач, а також принципи фундаментальності, підготовки до майбутньої професійної діяльності, вихід на нові математичні ідеї при виконанні правил достатньої кількості формальних задач, професійної однозначності, прикладного змісту. Ефективним способом, що сприяє дотриманню цих принципів і правил, є розв'язання задач спеціального змісту на завершальному етапі навчання математичних дисциплін. Забезпечення ж завершення етапу математичної підготовки фахівців в галузі техніки має використання спеціальних математичних курсів, які віддзеркалюють майбутні інтереси спеціаліста. Впровадження професійної спрямованості навчання математики є одним з шляхів усунення існуючої суперечності між потребами суспільства у кваліфікованих фахівцях і сучасним станом математичної підготовки студентів нематематичних спеціальностей.

В умовах компетентісно-орієнтованої парадигми освіти професійна спрямованість навчання математики студентів молодших курсів технічних вузів є компонентом формування у них базових професійних компетенцій.

7. Ефективний засобом реалізації професійної спрямованості є навчання студентів початкам математичного моделювання при вивченні загального курсу математики і спеціальних математичних курсів на завершальному етапі вивчення математики для студентів-спеціалістів і магістрантів.

8. Необхідною умовою забезпечення диференціації навчання є діагностика математичної підготовки і розвитку студентів на початку вивчення курсу вищої математики і протягом всього навчання («нульова» контрольна робота для першокурсників, тестування, різні самостійні і контрольні роботи, модульні завдання, колоквіуми тощо).

Експериментальне дослідження показало, що ефективним засобом самостійної роботи студентів є розрахунково-графічні завдання, індивідуальні домашні завдання, лабораторні роботи та модульний контроль засвоєних знань та набутих умінь і навичок студентів.

9. Міжпредметність є сучасним принципом навчання, що впливає на відбір і структурування навчального матеріалу цілого ряду дисциплін, посилює системність засвоєних знань, активізує методи навчання, орієнтує на застосування комплексних форм організації навчання, забезпечує єдність навчально-виховного процесу. Важливим шляхом міжпредметних зв'язків при вивченні загального курсу математики та спеціальних математичних курсів є участь викладачів математичних кафедр в науково-дослідницьких роботах спеціальних кафедр та залучення до цієї роботи студентської молоді.

10. Ефективна математична підготовка студентів технічних університетів може бути забезпечена лише при реалізації діяльнісного і системного підходів в організації навчального процесу.

11. Математика є особливим методом світопізнання, фундаментом при вивченні інформатики, фізики, теоретичної механіки, хімії, економіки тощо.

Математичні дисципліни формують особистість студента, а саме: впливають на розвиток логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної і інформаційної культури, уваги, пам'яті, позитивних властивостей особистості, а також емоційно-вольової сфери, сприяють розвитку наукового світогляду.

12. Для виховання та формування різнобічно розвинутої особистості, створення умов для інтелектуального, фізичного, морального і естетичного розвитку та саморозвитку студентів необхідно так спланувати й організувати навчально-виховний процес у вищому навчальному закладі освіти,

- щоб навчити та привчити студентів самостійно працювати з навчальною і науковою літературою, самостійно добувати знання,

- щоб студенти свідомо і міцно оволодівали системою класичних математичних знань, умінь і навичок, які були б достатніми для успішного оволодіння іншими навчальними предметами та необхідними в майбутній професійній діяльності й повсякденному житті.

- щоб у студентів формувалися навички у постановці задач професійно спрямованого й прикладного змісту, уявлення про етапи розв'язування цих задач, про можливості і застосування математичних методів в цьому процесі, що сприятиме розумінню студентів, що математика - не тільки навчальна дисципліна, а ще й потужний інструмент для розв'язання актуальних інженерних проблем сучасності,

- щоб студенти навчалися аналізувати отриманий розв'язок проблеми,

- щоб були забезпечені наступність, неперервність освіти і самоосвіти, моральне, трудове, економічне, екологічне, патріотичні виховання, формування позитивних властивостей особистості й рис характеру, професійна і прикладна спрямованість навчання математичних дисциплін, що сприятиме підсиленню мотивації навчання, практичній підготовці студентів,

- щоб були забезпечені умови для розвитку творчих здібностей, математичного і загального розвитку студентів, для набуття нами достатнього рівня математичної культури, необхідного для отримання якісної професійної освіти, для повноцінної участі в повсякденному житті, майбутній професійній діяльності, а також для розвитку та формуванню таких якостей фахівця, як професіоналізм і компетентність.

13. Сучасною стратегією математичної підготовки студентів вищої школи є диференціація та індивідуалізація в умовах особистісно-орієнтованого навчання, яка повинна забезпечуватися підручниками, навчальними посібниками, методичними рекомендаціями, комплектами індивідуальних домашніх завдань, завдань для модульного контролю та оцінювання засвоєних знань і набутих умінь студентів, а також відповідною діяльністю викладача.

14. Потужними засобами інтенсифікації навчального процесу, міцного і свідомого засвоєння студентами великого обсягу математичного матеріалу, підвищення якості їх математичної підготовки є впровадження модульно-рейтингової системи навчання й оцінювання успішності студентів, застосування ІКТ та керівництво СРС.

Ретельно обмірковане впровадження і систематичне використання нових засобів навчання, зокрема ІКТ має забезпечити ефективне засвоєння студентами математичного матеріалу, інтенсифікувати та оптимізувати навчально-виховний процес, активізувати навчально-пізнавальну діяльність студентів, сприяти розвитку їх образного та творчого мислення, оскільки комп'ютерна підтримка при навчанні математики дає наочні уявлення багатьом поняттям, що вивчаються. Використовувати персональний комп'ютер для виконання функцій контролю засвоєних знань, набутих умінь і навичок студентів; навчальні тренажери, моделюючі стенди, інформаційно-довідкові системи, ігрові навчальні середовища, електронні конструктори, експертні системи тощо. Систематичне використання ІКТ як при вивченні загального курсу математики, спеціальних математичних курсів, так і особливо при розв'язанні професійно спрямованих, прикладних задач і проведенні

науково-дослідної роботи є необхідним сучасним засобом фундаменталізації математичної підготовки студентів.

Зараз ми маємо значну кількість програмних засобів, що дозволяють за допомогою комп'ютера розв'язувати досить широке коло математичних задач різних рівнів складності, серед яких придатними для застосування при вивченні математичних дисциплін є програми Maple, MatCad, MatLAB, Mathematica, Maxima, Numeri, Reduce, EVRIKA, DERIVE, GRAN 1, GRAN-2D, GRAN-3D, GRAN-4D.

15. Органічне поєднання класичних традиційних і нових методів і засобів навчання сприятимуть формуванню практичної, соціально- особистісної, комунікативної, загально-культурної компетентностей, яких студенти набувають протягом всього періоду навчання у вищій школі та за допомогою засобів неформальної освіти, внаслідок впливу середовища та наявності яких свідчить про їх готовність до повсякденного життя, до різних видів суспільної та професійної діяльності, до набуття майстерності й професіоналізму.

16. Для удосконалення навчального процесу мають використовуватися різні типи електронних освітніх ресурсів з точки зору їх ефективності щодо набуття студентами математичних компетентностей.

17. Впливати на духовний світ студентів згідно з принципами гуманізації та гуманітаризації навчання.

Література

1. Т. В. Крилова, О. М. Гулеша, О. Ю. Орлова. Концепція активізації процесу навчання математики студентів вищої технічної школи // Матеріали XVI міжнар. наук.-метод. конф. «Методы совершенствования фундаментального образования в школах и вузах», Севастополь, 19-23 вересня 2011 р. - Севастополь: СевНТУ, (2011), с. 80-83.

Ю.Г. Лобода, О.Ю. Орлова

ОНАПТ, Одесса, Україна

E-mail: address: o_e_u_69@mail.ru

Julia G. Loboda, Olena Y. Orlova

Conception of fundamentalizacii of mathematical education of students of higher technical school.

In the article the problems of activation of educational-cognitive activity of students of higher school are considered at the study of higher mathematics. Activation of educational-cognitive activity of students is assisted by excitations of interest in discipline, professional orientation, evidentness of educating, use of intersubject connections, methods of hands on training. The criteria of activation of educational-cognitive activity of students are educed and described. Forming of base professional competenses of students of higher school is considered in detail. Possibilities are considered for realization of the applied orientation of educating of higher mathematics, paid attention to intersubject connections of mathematics with other educational disciplines, the basic functions of intersubject connections, role of intersubject connections, are taken apart in development of the independent and creative thinking, informing of cognitive activity and interest in cognition of mathematics. Requirements are set forth to drafting of the professionally directed and research tasks, their functions are classified. Paid attention to the traditional and unconventional methods of educating, in this context concepts "Hands, on training" are considered "developing educating" "problem educating". As arousal methods of educating business games, method of brainstorming, are considered and classified. In detail the problem of organization and management is considered by independent work of students, and similarly control of control after her implementation.

Geometry of Chaos: Advanced computational approach to treating chaotic dynamics of some hydroecological systems II

A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, Yu.Ya.Bunyakova,
V.V.Buyadzhi

Abstract This paper goes on our work on application of the chaos theory and non-linear analysis technique to studying chaotic features of different nature systems. Here we present new results of using an advanced chaos-geometric approach to treating chaotic pollution dynamics in the hydroecological systems, in particular, forested watersheds. Generally, an approach combines together application of the advanced mutual information scheme, Grasberger-Procachi algorithm, Lyapunov exponent's analysis etc.

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, nature system

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

In this paper we go on our work on application of the chaos theory and non-linear analysis technique to studying chaotic features of different nature systems (see, for example [1,2]). The theoretical basis's of the chaos-geometric combined approach to treating of chaotic behaviour of complex dynamical systems are in details in series of ref. [1-10]. Generally, an approach combines together application of the advanced mutual information scheme, Grassberger-Procachi algorithm, Lyapunov exponent's analysis etc [1-23]. It is important to note that our advanced approach has been successfully applied to studying dynamics not only mathematical and physical systems. Very impressive application is the investigated dynamics of the atmospheric pollutants concentrations and forecasting

their temporal evolution. Besides, in Ref [2,4] we have numerically studied the chaotic features of the pollutants concentration time series for some hydroecological systems, in particular, nitrates (sulphates) pollution concentration for a number of the forested watersheds of the Small Carpathian (for example, Blatina (Pezinok), Parna (Majdan), Ladamirka (Svidnik), Babie (Olsavka) etc.). It has been noted that the successful application of new chaos-geometrical approach to studying dynamics of the different nature systems demonstrates its universal character. Here we present the analogous numerical results of using an advanced chaos-geometric approach to treating the nitrates pollution dynamics for other forested watersheds with revealing the chaos elements in the temporary sets of the nitrates and sulphates concentrations.

2. An advanced chaos-geometrical approach to hydroecological system dynamics: Short review

As all details of a new chaos-geometric approach have been described in our previous papers (see, for example, [1-8]) below we shortly present only the key positions, which are important for the further listing numerical results. As usually, following to [1-10], further we formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. nitrates pollution concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n + \tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

Let us remind that following to [2,10], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated. One needs to choose some intermediate position

between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent. It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. In ref. [4] it is suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

In [1-4,10] it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent.

$$r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

The fundamental problem of theory of any dynamical system is in predicting the evolutionary dynamics of a chaotic system. Let us remind following to [1-,2,10] that the cited predictability can be estimated by the Kolmogorov entropy, which is proportional to a sum of positive LE. As usually, the spectrum of LE is one of dynamical invariants for non-linear system with chaotic behaviour. The limited predictability of the chaos is quantified by the local and global LE, which can be determined from measurements. The LE are related to the eigenvalues of the linearized dynamics across the attractor. Negative values show stable behaviour while positive values show local unstable behaviour. For chaotic systems, being both stable and unstable, LE indicate the complexity of the dynamics. The largest positive value determines some average prediction limit. Since the LE are defined as asymptotic average rates, they are independent of the initial conditions, and hence the choice of trajectory, and they do comprise an invariant measure of the attractor. An estimate of this measure is a sum of the positive LE. The estimate of the attractor dimension is provided by the conjecture d_L and the LE are taken in descending order. The dimension d_L gives values close to the dimension estimates discussed earlier and is preferable when

estimating high dimensions. To compute LE, we use a method with linear fitted map, although the maps with higher order polynomials can be used too. Non-linear model of chaotic processes is based on the concept of compact geometric attractor on which observations evolve. Since an orbit is continually folded back on itself by dissipative forces and the non-linear part of dynamics, some orbit points $[1,10] \mathbf{y}^r(k)$, $r = 1, 2, \dots, N_B$ can be found in the neighbourhood of any orbit point $\mathbf{y}(k)$, at that the points $\mathbf{y}^r(k)$ arrive in the neighbourhood of $\mathbf{y}(k)$ at quite different times than k . One can then choose some interpolation functions, which account for whole neighbourhoods of phase space and how they evolve from near $\mathbf{y}(k)$ to whole set of points near $\mathbf{y}(k+1)$. The implementation of this concept is to build parameterized non-linear functions $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ which take $\mathbf{y}(k)$ into $\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k), \mathbf{a})$ and use various criteria to determine parameters \mathbf{a} . Since one has the notion of local neighbourhoods, one can build up one's model of the process neighbourhood by neighbourhood and, by piecing together these local models, produce a global non-linear model that capture much of the structure in an attractor itself.

3. The numerical results and conclusions

We continued the investigation of the pollution dynamics of the hydrological systems, in particular, variations of the nitrates concentrations in the forested watersheds of the the Small Carpathian (Slovakia) by using the non-linear prediction approaches and chaos theory method (in versions) [1-10]. As in Refs. [2,4] the initial data have been taken from empirical observations on a number of the watersheds in the region of the Small Carpathians, carried out by coworkers of the Institute of Hydrology of the Slovak Academy of Sciences [11]. The temporal changes in the concentrations of nitrates in the catchment areas are listed in [11]. In Ref. 2 we have listed data on values of the autocorrelation function C_L , the first minimum of mutual information I_{min1} , the correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the concentration of nitrates in some watersheds of the Small Carpathians, for example, Blatina (Pezinok), Parna (Majdan), Lodomirka (Svidnik), Babie (Olsavka) etc. Here we have made a numerical analysis of time series for other watersheds, namely, Gidra (Pila) Vydrica (Spariska) Ondava (Stropkov) Manelo (Gribov).

As usually, the first step is in computing the values of the autocorrelation function C_L , the first minimum of mutual information I_{min1} for the concentration of nitrates in four another watersheds (Blatina, Parna, Lodomirka, Babie). The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ ,

but in [6,9] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using Grassberger-Procaccia method [1,16]. Here the outcome is explained not only inappropriate values of τ but also shortcomings of correlation dimension method. If algorithm [14] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ . If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 6$ for all water pollutants.

In Table 1 we firstly present the advanced data on the time lags, the correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the concentration of nitrates in the above cited watersheds.

Table 1. The Time lag (τ), correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L), and average limit of predictability ($Pr_{max, hours}$) for time series of the concentration of nitrates in the watershed of the Small Carpathians.

| | Gidra (Pila) | Vydrica (Spariska) | Ondava (Stropkov) | Manelo (Gribov) |
|------------|--------------|-----------------------|----------------------|--------------------|
| τ | 20 | 18 | 9 | 7 |
| (d_2) | 5.82 | 5.66 | 5.31 | 3.71 |
| (d_E) | 6 | 6 | 6 | 4 |
| d_L | 5.17 | 5.85 | 4.11 | 3.66 |
| Pr_{max} | 12 | 13 | 8 | 9 |

As usually, the sum of the positive LE determines the Kolmogorov entropy, which is inversely proportional to the limit of predictability (Pr_{max}). Let us remember [1,4] since the conversion rate of the sphere into an ellipsoid along different axes is determined by the LE, it is clear that the smaller the amount of positive dimensions, the more stable is a dynamic system. Consequently, it increases the predictability of it. As the numerical calculation shows the presence of the two (from six) positive λ_i suggests the system broadens in the line of two axes and converges along four axes that in the six-dimensional space. It is worth also to present data on the known Gottwald-Melbourne [23] chaos test parameter K. For the studied four time series K is in range [0.65;0.75] that confirms an availability of the chaos elements.

Therefore, here we have presented new further results of an effective application of an advanced chaos-geometric approach to treating of non-linear dynamics of the complex nature, namely, hydroecological systems with discovery of an availability of the middle-D chaos elements.

References

1. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Analysis and estimation of anthropogenic loading influence on industrial city air basin.-Odessa: Ecology, 2011.-290P.
2. Glushkov A.V., Buyadzhi V.V., Ponomarenko E.L., Geometry of Chaos: Advanced approach to treating chaotic dynamics in some nature systems// Proc. Int. Geom. Centre.-2014.-Vol.7,N1.-P.24-29
3. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-Vol.6,N1.-P.6-12.
4. Glushkov A.V., Kuzakon V.M., Buyadzhi V.V., Solyanikova E.P., Geometry of Chaos: Advanced computational approach to treating chaotic dynamics of some hydroecological systems// Proc. Int. Geom. Centre.-2015.-Vol.8,N1.-P.93-99.
5. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V., Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of coupled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14-17.
6. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya., Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284-7292.
7. Bunyakova Yu.Ya., Khetselius O.Yu., Non-linear prediction statistical method in forecast of atmospheric pollutants//Proc. of the 8th International Carbon Dioxide Conference.-Jena (Germany).-2009.- P.T2-098.
8. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Non-linear prediction method in forecast of air pollutants CO_2 , CO // Transport and Air Pollution. - Zurich: ETH University Press (Switzerland). -2010. - P.131-136.
9. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// Dynamical Systems - Theory and Applications. - Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). -2011.- LIF111 (6p.).
10. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// Proc. of Int. Geometry Center.-2013.-Vol.6,N3.-P.6-14.
11. Pekarova P., Miklanek P., Konicek A., Pekar J.: Water quality in experimental basins. National Report 1999 of the UNESKO.-Project 1.1.-Intern.Water Systems. 1999, 1-98.
12. Kozak K., Saylan L., Sen O., Nonlinear time series prediction of O_3 concentration in CityplaceIstanbul. *AtmosphericEnvironment* (Elsevier) 34, 2000, 1267-1271.
13. Kuznetsov S.P., Dynamical chaos.-Moscow: Fizmatlit.-2006.-356P.
14. Kennel M., Brown R., Abarbanel H., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction//Phys Rev A.-1992.-Vol.45.-P.3403-3411.
15. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//Phys Rev Lett.-1988.-Vol.45.-P.712-716.
16. Grassberger P., SnpliceProcaccia Snl., Measuring the strangeness of strange attractors//Physica D.-1983.-Vol.9.-P.189-208.
17. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys Rev A.-1986.-Vol.33.-P.1134-1140.
18. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366-381
19. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230-242

20. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//Phys Rev.Lett.-1995.-Vol.55.-P.1082–1085
21. Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B., Farmer J., Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data// Physica D.-1992.-Vol.58.-P.77–94.
22. Kaplan J.L., Yorke J.A., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in: Peitgen H.-O., Walter H.-O. (Eds.), Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics No. 730. Springer, Berlin.-1979.-pp.204-227.
23. Gottwald G.A., Melbourne I., A new test for chaos in deterministic systems// Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2004. Vol. 460. P. 603–611.

A.V. Glushkov, V.M. Kuzakon, Yu.Ya.Bunyakova, V.V.Buyadzhi

Mathematics Department

Odessa State Environmental University, Ukraine

E-mail: dirac13@mail.ru

New chaos-geometric and information technology analysis of chaotic generation regime in a single-mode laser system with absorbing cell

G.P. Prepelitsa

Abstract Here we present the results of application of a new chaos-geometric approach and some information technology algorithms to analysis of chaotic generation regime in a single-mode laser system with absorbing cell. Earlier developed chaos-geometric approach to modelling and analysis of nonlinear processes dynamics of the complex systems combines together application of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc.

Keywords geometry of chaos, non-linear analysis, laser system

Mathematics Subject Classification: (2000) 55R01-55B13

1. Introduction

As it is known a chaos theory establishes that apparently complex irregular behaviour could be the outcome of a simple deterministic system with a few dominant nonlinear interdependent variables. The past decade has witnessed a large number of studies employing the ideas gained from the science of chaos to characterize, model, and predict the dynamics of various systems phenomena [1]–[10]. The outcomes of such studies are very encouraging, as they not only revealed that the dynamics of the apparently irregular phenomena could be understood from a chaotic deterministic point of view but reported very good predictions using such an approach for different systems too.

Earlier [1]–[8] we have developed a new, chaos-geometrical and information technology combined approach to treating of chaotic low- and high-D attractor

dynamics of complex dynamical systems and forecasting its temporal evolution. Here we use this approach to carry out an analysis of chaotic self-oscillations in a single-mode laser system with absorbing cell. Such systems have a great practical interest and are used in different technical applications. Our approach combines together application of a few techniques, namely, an advanced information technology, including a mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc.

2. Chaos-geometrical approach to complex self-oscillations in a single-mode laser system with absorbing cell

In this work we study complex self-oscillations in a single-mode laser system with absorbing cell. As an analysis technique use an advanced non-linear prediction approach, based on some chaos theory methods and information technology algorithms (in versions) [1]–[8]. We consider the output data of a theoretical model of a single-mode laser resonator in which the reinforcement is placed along with a nonlinear absorbing medium [9]. Each of the environments consists of identical two-level atoms. The gain and absorption lines are uniformly broadened and their centers align and coincide with one of the frequencies of the cavity. Such a model can describe the real system of five differential equations, which have been numerically solved within different approximations [9]–[10]. At last, let us note that the system studied is used for the experimental observation of a dynamical chaos.

The fundamental aspects of our chaos-geometric approach version have been in details presented earlier. So, here we are limited only by a short description of the key aspects, following to our papers [1]–[8]. As usually, one should formally consider scalar measurements $s(n) = s(t_0 + n\Delta t) = s(n)$, where t_0 is a start time, Δt is time step, and n is number of the measurements. In a general case, $s(n)$ is any time series (f.e. atmospheric pollutants concentration). As processes resulting in a chaotic behaviour are fundamentally multivariate, one needs to reconstruct phase space using as well as possible information contained in $s(n)$. Such reconstruction results in set of d -dimensional vectors $\mathbf{y}(n)$ replacing scalar measurements. The main idea is that direct use of lagged variables $s(n+\tau)$, where τ is some integer to be defined, results in a coordinate system where a structure of orbits in phase space can be captured. Using a collection of time lags to create a vector in d dimensions, $\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau), s(n + 2\tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)]$, the required coordinates are provided. In a nonlinear system, $s(n + j\tau)$ are some unknown nonlinear combination of the actual physical variables. The dimension d is the embedding dimension, d_E .

Let us remind that following, for example, to [7]–[8], the choice of proper time lag is important for the subsequent reconstruction of phase space. If τ is chosen too small, then the coordinates $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are so close to each other in numerical value that they cannot be distinguished from each other. If τ is too large, then $s(n + j\tau)$, $s(n + (j + 1)\tau)$ are completely independent of each other in a statistical sense. If τ is too small or too large, then the correlation dimension of attractor can be under- or overestimated. One needs to choose some intermediate position between above cases. First approach is to compute the linear autocorrelation function $C_L(\delta)$ and to look for that time lag where $C_L(\delta)$ first passes through 0. This gives a good hint of choice for τ at that $s(n + j\tau)$ and $s(n + (j + 1)\tau)$ are linearly independent.

It's better to use approach with a nonlinear concept of independence, e.g. an average mutual information [10]–[12]. The mutual information I of two measurements a_i and b_k is symmetric and non-negative, and equals to 0 if only the systems are independent. The average mutual information between any value a_i from system A and b_k from B is the average over all possible measurements of $I_{AB}(a_i, b_k)$. Earlier it was suggested, as a prescription, that it is necessary to choose that τ where the first minimum of $I(\tau)$ occurs.

Earlier (look [5]–[12]) it has been stated that an aim of the embedding dimension determination is to reconstruct a Euclidean space R^d large enough so that the set of points d_A can be unfolded without ambiguity. The embedding dimension, d_E , must be greater, or at least equal, than a dimension of attractor, d_A , i.e. $d_E > d_A$. In other words, we can choose a fortiori large dimension d_E , e.g. 10 or 15, since the previous analysis provides us prospects that the dynamics of our system is probably chaotic. The correlation integral analysis is one of the widely used techniques to investigate the signatures of chaos in a time series. If the time series is characterized by an attractor, then correlation integral $C(r)$ is related to a radius r as $d = \lim_{r \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$, where d is correlation exponent [13].

3. Some results and Conclusions

As it has been noted above as data for analysis we use the output data of theoretical model of a single-mode laser resonator, more exactly, solutions of a system of five differential equations, which have been numerically solved within different approximations [9]–[10]. The cited system includes the equations for intensity, and simuteniously for absorbing medium. The functions to be determined are amplitude of the laser of the field, polarizations in the environment and difference between populations of the working levels in the two-level atomic ensemble.

The key physical parameters include longitudinal and transverse relaxation rates d_k , related to the half-width of the resonator $dw/2$, the ratio of the coefficients of saturation of the absorbing and amplifying media b . We are interested by a chaotic regime of the system, when there is realized a chaotic attractor. Indeed, according to [9]–[10], strange attractors occur as a result of the sequence of bifurcations of solutions of above cited dynamical equations system, the first of which is the Hopf bifurcation of stationary solutions with zero intensity of the laser field. Appearance of bifurcations is linked with the governing parameter $N = F[d_i, b_i]$ ($i=1,2$). Our analysis shows that the Hopf bifurcation occurs at moderate values N , if the relative width of the absorption line d_2 is quite small, and the relative width of the gain line d_1 is quite large. The numerical calculation showed that in order to get the chaotic lasing it is necessary the following: to saturate the absorber should be saturated stronger than the amplifier ($b > 1$). At low b the limit cycles generated from the stationary solutions with the zeroth intensity is stable up to very large values of N .

In table 1 we list the values of the autocorrelation function C_L and the first minimum of mutual information I_{min1} for time series of the output function (amplitude, polarization) for the studied single-mode laser system with absorbing cell (four sets of data).

Table 1. Time lags subject to different values of C_L , and first minima of average mutual information, I_{min1} , (see text).

| | Series 1 | Series 2 | Series 3 | Series 4 |
|------------|----------|----------|----------|----------|
| $C_L=0.1$ | 42 | 53 | 68 | 96 |
| $C_L=0.5$ | 7 | 8 | 10 | 16 |
| I_{min1} | 8 | 10 | 12 | 112 |

The values, where the autocorrelation function first crosses 0.1, can be chosen as τ , but in [10]–[13] it's showed that an attractor cannot be adequately reconstructed for very large values of τ . So, before making up final decision we calculate the dimension of attractor for all values in Table 1. The large values of τ result in impossibility to determine both the correlation exponents and attractor dimensions using Grassberger-Procaccia method [13]. Here the outcome is explained not only by inappropriate values of τ but by shortcomings of correlation dimension method too. If algorithm [4] is used, then a percentages of false nearest neighbours are comparatively large in a case of large τ . If time lags determined by average mutual information are used, then algorithm of false nearest neighbours provides $d_E = 8$.

Table 2 shows the time lags, correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L) for time series of the output function (amplitude, polarization) for the studied single-mode laser system with absorbing cell (two sets of data, accordingly, regimes: chaos 1 and chaos 2).

Table 2. The Time lag (τ), correlation dimension (d_2), embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L) for time series of the the output function for the studied single-mode laser system with absorbing cell.

| | Chaos 1 | Chaos 2 |
|---------|---------|---------|
| τ | 7 | 8 |
| (d_2) | 4.7 | 4.7 |
| (d_E) | 5 | 5 |
| d_L | 4.15 | 4.17 |

The further computing give the following values for two Lyapunov's exponents (LE) λ_i , namely, one LE pair for chaos 1 regime: 0.215 and 0.154 and for the chaos 2 regime: 0.218 and 0.152). Naturally, the positive values of the first two Lyapunov's exponents confirm a chaotic feature of the system dynamics [14]–[16]. So, in this paper we have presented results of computing and numerical analysis of the strange attractor dynamics of the single-mode laser system with absorbing cell with using an advanced chaos-geometrical and information technology approach (combinatin of the advanced mutual information approach, correlation integral analysis, Lyapunov exponent's analysis etc). The numerical data on the time lags, correlation dimension, embedding dimension (d_E), Kaplan-Yorke dimension (d_L) and the LE for time series of the output function for the studied single-mode laser system with absorbing cell are listed.

References

1. Glushkov A.V., Kuzakon' V.M., Khetselius O.Yu., Prepelitsa G.P. and Svinarenko A.A., Geometry of Chaos: Theoretical basis's of a consistent combined approach to treating chaotic dynamical systems and their parameters determination// Proc. Int. Geom. Centre.-2013.-Vol.6.-N1.-P6–12.
2. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Florko T.A., Prepelitsa G.P., Chaos-Geometric approach to analysis of quantum-generator systems// Proc. Int. Geom. Centre.- 2014.-Vol.7,N4.-P.77–82.
3. Bunyakova Yu.Ya., Glushkov A.V.,Fedchuk A.P., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Tsenenko I.A., Sensing non-linear chaotic features in dynamics of system of couled autogenerators: standard multifractal analysis// Sensor Electr. and Microsyst. Techn.-2007.-N1.-P.14–17.
4. Prepelitsa G.P., Chaos-Geometric approach to analysis of chaotic attractor dynamics for the one-ring fibre laser// Proc. Int. Geom. Centre.- 2015.-Vol.8,N1.-P.100–105.
5. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Buyadzhi V.V., Zaichko P.A., Ternovsky V.B., Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics during perception process// Advances in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Series: Recent Advances in Computer Engineering (Gdansk,EU, World Sci.)-2014.-Vol.21.-P.143–150.

6. Glushkov A.V., Prepelitsa G.P., Lepikh Ya.I., Buyadzi V.V., Ternovsky V.B., Zaichko P.A., Chaotic dynamics of non-linear processes in atomic and molecular systems in electro-magnetic field and semiconductor and fiber laser devices: new approaches, uniformity and charm of chaos// *Sensor Electronics and Microsystems Techn.*-2014.-Vol.11,N4.-P.43–57.
7. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Bunyakova Yu.Ya., Prepelitsa G.P., Solyanikova E.P., Serga E.N., Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos// *Dynamical Systems – Theory and Applications*. – Lodz: Lodz Univ. Press (Poland). –2011.- LIF111 (6p.).
8. Glushkov A.V., Bunyakova Yu.Ya., Zaichko P.A., Geometry of Chaos: Consistent combined approach to treating chaotic dynamics atmospheric pollutants and its forecasting// *Proc. of Int. Geometry Center*.-2013.-Vol.6,N3.-P.6–14.
9. Vladimirov A.G., Fradkin E., Dynamical chaos in the generation of laser is absorbed by the cell//*Opt.Spectr.*-1989.-Vol.67.-P.219–224.
10. Prepelitsa G.P., Nonlinear dynamics of quantum and laser systems with elements of a chaos//*Photoelectronics*.-2014.-Vol.23.-P.96–106.
11. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R., Geometry from a time series//*Phys Rev Lett.*-1988.-Vol.45.-P.712–716.
12. Fraser A., Swinney H., Independent coordinates for strange attractors from mutual information// *Phys Rev A*.-1986.-Vol.33.-P.1134–1140.
13. Grassberger P., Procaccia I., Measuring the strangeness of strange attractors//*Physica D*.-1983.-Vol.9.-P.189–208.
14. Takens F (1981) Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand DA, Young LS (eds) *Dynamical systems and turbulence*, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg New York, pp 366–381
15. Mane R (1981) On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps. In: Rand DA, Young LS (eds) *Dynamical systems and turbulence*, Warwick 1980. (Lecture notes in mathematics No 898). Springer, Berlin Heidelberg N.-Y., p. 230–242
16. Sano M, Sawada Y (1985) Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series//*Phys Rev.Lett.*-1995.-Vol.55.-P.1082–1085

G.P. Prepelitsa

Information Technologies Department

State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail: quantpre@mail.ru

Геометрические величины на плоскости Лобачевского

Надежда Григорьевна Коновенко
<http://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

Аннотация В этой работе описываются локальные структуры геометрических величин на плоскости Лобачевского. Это описание содержит как линейные, например тензоры, так и нелинейные геометрические величины и существенным образом используется при нахождении базисных дифференциальных инвариантов ([1]).

Ключевые слова плоскость Лобачевского, геометрические величины, дифференциальные инварианты, изометрии.

УДК 514.132

1 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действие на плоскости Лобачевского

В стандартной модели геометрия Лобачевского реализуется на верхней полуплоскости \mathbf{L}^2 с метрикой

$$\Theta = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Группа движений плоскости Лобачевского изоморфна группе Ли $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$, а ее алгебра Ли порождена векторными полями

$$\begin{aligned} A &= \partial_x, \\ B &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ H &= 2x\partial_x + 2y\partial_y, \end{aligned} \tag{1}$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Под однородным расслоением над плоскостью Лобачевского мы понимаем такое расслоение

$$\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}^2 \rightarrow \mathbf{L}^2,$$

где $\pi : (u, x, y) \mapsto (x, y)$, в которое поднято $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действие.

Иначе говоря, в тотальном пространстве расслоения π , указаны векторные поля \bar{A} , \bar{B} , \bar{H} , удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$

$$[\bar{H}, \bar{A}] = -2\bar{A}, \quad [\bar{H}, \bar{B}] = 2\bar{B}, \quad [\bar{A}, \bar{B}] = \bar{H},$$

и такие что

$$\pi_*(\bar{A}) = A, \quad \pi_*(\bar{B}) = B, \quad \pi_*(\bar{H}) = H.$$

Геометрической величиной на плоскости Лобачевского называется гладкое сечение однородного $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -расслоения. Размерность геометрической величины называется размерность соответствующего однородного расслоения.

2 Локальная классификация геометрических величин

Предположим, что векторные поля в рассматриваемой области порождают гладкое распределение \mathfrak{F} размерности r .

В данном случае векторные поля A и B линейно независимы, поэтому векторные поля \bar{A} , \bar{B} - также линейно независимы.

Следовательно $r = \dim \mathfrak{F}$ может принимать только два значения $r = 2$ или $r = 3$. В любом из этих случаев, мы можем выбрать координаты $(u, w^2, \dots, w^m, x, y)$ в расслоении π так, чтобы w^2, \dots, w^m - были первыми интегралами для векторных полей \bar{A} , \bar{B} , \bar{H} , а функция u дополнительно являлась первым интегралом векторных полей \bar{A} и \bar{H} . Действительно, это очевидно в случае, когда $r = 2$, поскольку тогда u может быть выбрана как первый интеграл векторных полей \bar{A} , \bar{B} , \bar{H} .

Если же $r = 3$, то на 3-х мерных многообразиях $w^2 = \dots = w^m = \text{const}$ векторные поля \bar{A} и \bar{H} определяют 2-мерное распределение, которое вполне интегрируемо, в силу коммутационного соотношения $[\bar{H}, \bar{A}] = -2\bar{A}$. Функция u может быть выбрана как первый интеграл этого распределения. При таком выборе координат представление примет вид:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + yb(x, y, u, w)\partial_u, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y.\end{aligned}\tag{2}$$

Из коммутационных соотношений следует, что функция b имеет следующий вид:

$$b(x, y, u, w) = y\tilde{b}(u, w).$$

Отметим также, что если $r = 2$, или, иначе говоря, если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 2, то $\tilde{b}(u, w) \equiv 0$. Если же размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 3, то $\tilde{b}(u, w) \neq 0$ и заменой переменных вида:

$$(u, w) \mapsto (U(u), W(u, w))$$

векторное поле $\tilde{b}\partial_u$ может быть выпрямлено.

Суммируя сказанное приходим к следующему результату.

Теорема 1 Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского в однородном $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -расслоении локально эквивалентно одному из следующих:

1)

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y,\end{aligned}\tag{3}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 2, или

2)

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + y\partial_u, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y,\end{aligned}\tag{4}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 3.

3 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действия на геометрических величинах

Рассмотрим векторное поле $\nabla = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y$ на плоскости Лобачевского и пусть

$$\bar{\nabla} = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y + \sum_{i=1}^m A_i(x, y, u)\partial_{u_i}$$

его поднятие в расслоение геометрических величин. Обозначим через φ_t однопараметрическую группу сдвигов вдоль векторного поля ∇ , а через $\bar{\varphi}_t$ группу сдвигов вдоль $\bar{\nabla}$. Тогда каждая геометрическая величина

$$s : \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_2$$

определяет путь s_t в пространстве геометрических величин

$$s_t = \bar{\varphi}_{-t} \circ s \circ \varphi_t.$$

Скорость изменения

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{s}(0)$$

мы называем действием ∇ на геометрическую величину s . Несложно проверить ([3]), что

$$\nabla(s) = as_x + bs_y - A(x, y, s).$$

Используя предыдущую теорему и эту формулу мы получаем следующие нормальные формы $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -действий на геометрических величинах.

Теорема 2 Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского на геометрических величинах локально эквивалентно следующему:

1)

$$\begin{aligned} A(s) &= s_x, \\ B(s) &= (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y, \\ H(s) &= 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{5}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 2.

2)

$$\begin{aligned} A(s) &= s_x, \\ B(s) &= (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y - y, \\ H(s) &= 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{6}$$

если размерность $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -орбит в расслоении π равны 3.

4 Примеры

В качестве примеров геометрических величин мы рассмотрим тензоры на плоскости Лобачевского с \mathfrak{sl}_2 -действием, определяемым производной Ли.

4.1 Функции

Пусть $s = s(x, y)$ является гладкой функцией на плоскости Лобачевского, и

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) = as_x + bs_y.$$

В этом случае поднятие $\bar{\nabla}$ имеет вид:

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y,$$

где $A = 0$.

Это действие совпадает с (5).

4.2 Векторные поля

Пусть $s = s_1\partial_x + s_2\partial_y$ является векторным полем на плоскости Лобачевского, и

$$\begin{aligned} \nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) &= (as_{1,x} - s_1a_x + bs_{1,y} - a_ys_2)\partial_x + \\ &+ (as_{2,x} - s_1b_x + bs_{2,y} - b_ys_2)\partial_y. \end{aligned}$$

Если записывать векторное поле s в виде столбца

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

то указанное действие примет следующий вид:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Соответственно поднятие векторного поля $\bar{\nabla}$ имеет вид:

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y + (a_xu_1 + a_yu_2)\partial_{u_1} + (b_xu_1 + b_yu_2)\partial_{u_2}.$$

Очевидно, что длина вектора $|s|^2 = y^{-2}(s_1^2 + s_2^2)$ является инвариантом \mathfrak{sl}_2 -действий, а поэтому размерность \mathfrak{sl}_2 -орбит в касательном расслоении равна 3.

Таким образом, \mathfrak{sl}_2 -действие, задаваемое производной Ли (8) локально эквивалентно (6).

4.3 Дифференциальные 1-формы

Пусть теперь $s = s_1 dx + s_2 dy$ является дифференциальной 1-формой на плоскости Лобачевского, а действие, как и выше, дается производной Ли ([2]):

$$\begin{aligned} \nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\nabla}(s) &= (as_{1,x} + bs_{1,y} + a_x s_1 + \\ &+ b_x s_2) dx + (as_{2,x} + bs_{2,y} + a_y s_1 + b_y s_2) dy. \end{aligned}$$

Записав дифференциальную 1-форму s в виде столбца (7) мы получаем следующую форму действия:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, поднятие векторного поля $\bar{\nabla}$ имеет вид:

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y - (a_x u_1 + b_x u_2)\partial_{u_1} - (a_y u_1 + b_y u_2)\partial_{u_2}.$$

Соответствующее \mathfrak{sl}_2 -действие также сохраняет длину дифференциальной формы $|s|^2 = y^2(s_1^2 + s_2^2)$. Поэтому размерность \mathfrak{sl}_2 -орбит в кокасательном расслоении равна 3, а фундаментальное \mathfrak{sl}_2 -действие локально эквивалентно (6).

Список литературы

1. Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и \mathfrak{sl}_2 -геометрии // Київ: "Наукова Думка" НАН України, (2013), 192 с.
2. В. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., <http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf>
3. Коновенко Н.Г., Лычагин В.В. Алгебры дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера. // Доклады академии наук Украины. – 2010. – № 1. – С. 13–16.

Надежда Григорьевна Коновенко

<http://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

ОНАПТ, Одесса, Украина

E-mail: konovenko@ukr.net

Nadiia G. Konovenko

The geometrical sizes on Lobachevski plane

In this paper we investigate a local structure of geometrical quantities on the Lobachevski plane. This structure is used to describe metric differential invariants on the Lobachevski plane ([1]).

Українською, російською та англійською мовою

Зареєстровано Міністерством юстиції України

Свідоцтво : Серія КВ № 13819 - 2793Р від 19.11.2007

Журнал є науковим фаховим виданням України в галузі
математичних наук
(перелік № 1-05/3 від 14.04.2010 Бюлетень ВАК України. 2010. №
4)

Наклад 300 примірників. Зам. №

Адреса редакції:

Одеська національна академія харчових технологій,

кафедра вищої математики,

вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65 039 Україна

E-mail: geom-odessa@ukr.net

website: <http://geometry-center.com>

ISSN 2072-9812 (print). ISSN 2409-8906 (Online).

ПРАЦІ МІЖНАРОД. ГЕОМЕТР. ЦЕНТРУ.

2015. ТОМ 8. №2. 1-79

Журнал індексується в WorldCat;



Журнал індексується в Bielefeld Academic Search Engine (BASE);



Журнал індексується в Research Bible;



Журнал індексується в Google Scholar;



Журналу присвоєно Міжнародний номер наукових періодичних видань ISSN для друкованих видань ISSN print 2072-9812, а також для онлайн версії журналу ISSN online 2409-8906



Журнал сертифікований за стандартом якості ISO 26324:2012

