

УДК 519.711.3

АЖИППО А. Ю.¹, БАЛОНИН Н. А.², ДРУЗЬ В. А.³, СУЗДАЛЬ В. С.⁴¹Харьковская государственная академия физической культуры²Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения³Харьковская государственная академия физической культуры⁴Харьковский институт скантисляционных материалов НАН Украины

Финитные системы оптимизации спортивной техники движений

Аннотация. *Цель:* предложить математическую теорию, которая согласовывалась бы с натурными экспериментами и давала общую ориентацию при оптимизации техники движений в спорте. **Материал и методы:** теория систем, матричное исчисление, ресурсы сети Интернет и математической среды MATLAB. **Результаты:** для элементарных динамических звеньев – инерционного звена первого порядка, интегрирующего звена и двойного интегратора показано, что для входного сигнала в виде собственной функции максимальный коэффициент усиления по амплитуде при прохождении его через звено и квадратичная норма выходного сигнала определяется максимальным ганкелевым сингулярным числом. **Выводы:** предложено использовать математическую теорию финитных систем при оптимизации техники движений в спорте. Численные эксперименты показали существование у линейных динамических систем реальных собственных функций, не искажаемых системой входных сигналов, рассматриваемых в инверсном времени.

Ключевые слова: спортивная техника движения, системы финитного времени, собственная функция, оптимизация, математическое моделирование.

Введение. Достижение максимальных результатов в спорте является основной задачей спортсмена. Она решается за счет спортивной тренировки и достигается рациональной для спортсмена степенью технической, тактической и физической подготовленности, а также оптимальным уровнем функциональных возможностей организма.

Теория спортивной тренировки (ТСТ) – часть общей теории спорта, разрабатывающая систему научных знаний о принципах и технологии построения тренировочного процесса. Методологическая платформа современной научной теории спортивной тренировки исходит из общей теории адаптации, теории систем и теории деятельности.

Теория систем является основой одного из разделов ТСТ, а именно – теории спортивной техники, которая включает и рассматривает два принципиальных понятия: спортивная техника (система движений) и спортивно-техническое мастерство (умение спортсмена эффективно использовать свой моторный потенциал).

Сегодня среди существующих отчетов по научным исследованиям в спорте довольно много констатирующей, фиксирующей движения опытных спортсменов информации. Мы осознаем потребности научных коллективов, занимающихся исследованием математических моделей, приложимых к анализу спортивных движений, в адекватном математическом аппарате и видим таковой в новой и мало известной теории систем конечного времени (финитных систем).

Финитность – это характерная черта динамических систем в спорте. Спортивное движение в принципе не может быть рассматриваемым на бесконечном интервале времени. Оно имеет конечное время приложения воздействия и конечное время реакции, которые разнесены, что можно наблюдать при метании молота. Или частично разнесены, как при поднятии штанги. Оптимальные сигналы, т. е. усилия спортсмена, – это резонансные сигналы, отвечающие резонансам массивного спортивного снаряда на конеч-

ном интервале времени.

Управление как процесс.

Динамическая система – математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения систем, эволюция во времени которых определяется начальным состоянием. Динамическая система представляет собой математическую модель некоторого объекта, процесса или явления. Динамическая система также может быть представлена как система, обладающая состоянием. При таком подходе динамическая система описывает динамику некоторого процесса, а именно: процесс перехода системы из одного состояния в другое.

Кибернетический подход к описанию динамических систем состоит в том, что всякое целенаправленное поведение рассматривается как управление. Управление – в широком, кибернетическом смысле – это обобщение приемов и методов, накопленных разными науками об управлении искусственными объектами и живыми организмами. Язык управления – это использование понятий «объект», «среда», «обратная связь», «алгоритм» и т. д.

Анализ управления заставляет выделить тройку – среду, объект и субъект, внутри которой разыгрывается процесс управления. В общем случае субъект ощущает на себе воздействие среды и воздействие $y(t)$ объекта. Если состояние среды он изменить не может, то состоянием объекта $y(t)$ он может управлять с помощью специально организованного воздействия $y(t)$. Это и есть управление.

Процесс управления как организация целенаправленного воздействия на объект может реализовываться как на интуитивном, так и на осознанном уровне. Первый используют животные, второй – человек. Осознанное формирование управления заставляет декомпозировать алгоритм управления и вводить промежуточную стадию – формулировку цели управления.

Будем в дальнейшем рассматривать спортсмена как субъекта динамической системы, в качестве объекта управления – спортивный снаряд. Одной из целей формирования спортивных движений в этой системе является решение задачи оптимизации.

[dx.doi.org/10.15391/sns.v.2015-2.001](https://doi.org/10.15391/sns.v.2015-2.001)

© АЖИППО А. Ю., БАЛОНИН Н. А., ДРУЗЬ В. А.,

СУЗДАЛЬ В. С. 2015



Критерий оптимизации – передача спортсменом максимальной энергии спортивному снаряду, например, штанге, копыю, ядру или спортивному молоту. Аналогичную задачу решает и спортсмен, который прыгает в высоту или в длину.

Цель исследования: предложить математическую теорию, которая согласовывалась бы с натурными экспериментами и давала общую ориентацию при оптимизации техники движений в спорте. Фinitные модели новы и могут рассматриваться как объект, интересный для рассмотрения. Мы раскрываем их описанием элементарных динамических звеньев и примерами.

Материалы и методы исследования: теория систем, матричное исчисление, ресурсы сети Интернет и математической среды MATLAB.

Результаты исследования и их обсуждение. Ганкелев оператор и ганкелевы функции. В современной теории систем важную роль играют оператор свертки [1] и ганкелев оператор линейной стационарной системы [2].

Известно, что интегралом свертки описывается реакция линейной динамической системы при нулевом векторе начального состояния:

$$y(t) = \int_0^t q(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где $q(t)$ – весовая функция, реакция на импульсное воздействие. Оператор свертки описывает отображение текущих входов системы в ее текущие выходы.

В случае скалярной системы (один вход и один выход) ганкелев оператор Γ определяется выражением:

$$y(t) = \Gamma u(t) = \int_0^{\infty} q(t+\tau)u(\tau)d\tau, \quad t > 0. \quad (2)$$

По Гловеру (K. Glover), ганкелев оператор Γ описывает отображение прошлых входов в будущие выходы [3]. Однако ганкелев эксперимент Гловера с полным разнесением по времени нам представляется как частный случай. Все эксперименты – ганкелевы, начиная от полного совмещения времен до полного разнесения. Гловерова задача одна из многих и не самая важная. Нам нужно решать оптимизационную задачу, и в этом случае большую роль будет играть версия совмещения интервалов.

Рассмотрим динамическую систему в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(t_0) = x_0, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $y \in R^r$ – выходной вектор, $u \in R^r$ – входной вектор, x_0 – начальные условия, т. е. состояние системы в начальный момент времени t_0 , A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров.

В [5] введены ряд определений и доказаны следующие теоремы.

Определение 1. Вектор функции $R_i(t) \in L_2^r(0, \infty)$ и $S_i(t) \in L_2^r(0, \infty)$, удовлетворяющие операторным уравнениям

$$\Gamma^* \Gamma R_i(t) = \sigma_i^2 R_i(t), \quad \Gamma \Gamma^* S_i(t) = \sigma_i^2 S_i(t), \quad (4)$$

называются правыми и левыми сингулярными функциями ганкелева оператора (2) системы (3), отвечающими его сингулярному числу σ_i или просто – ганкелевыми сингулярными функциями (ГСФ) системы, Γ – сопряженный ганкелев оператор. Таким образом, ганкелевы сингулярные числа σ_i описывают коэффициенты усиления сигналов в так называемом ганкелевом эксперименте, в котором интервал управления системой предшествует интервалу наблюдения.

Теорема 1. Ганкелев оператор линейной системы (2) имеет конечную совокупность линейно независимых сингулярных функций, число которых определяется размерностью системы. Они задаются формулами:

$$R_i^T(t) = G_i e^{At} B, \quad S_i^T(t) = C e^{At} H_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где H_i и G_i – правые и левые собственные вектора матрицы $W = W_c W_0$, W_c – грамиан управляемости, W_0 – грамиан наблюдаемости.

В случае скалярной системы ганкелев оператор Γ осуществляет отображение пространства скалярных функций ограниченной энергии в себя. Вследствие сжимающего характера такого отображения должны существовать функции, не меняющие своего вида при действии оператора Γ .

Определение 2. Скалярные функции $f_i(t) \in L_2(0, \infty)$, удовлетворяющие операторному уравнению $\Gamma f_i(t) = \lambda_i f_i(t)$, называются собственными функциями ганкелева оператора (2) скалярной системы, отвечающими его собственному числу λ_i или просто ганкелевыми функциями системы.

В теории систем возникает задача отыскания собственных функции $f_i(t)$ и установления их связи с правыми и левыми сингулярными функциями, которые в скалярных системах становятся скалярными $r_i(t), s_i(t) \in L_2(0, \infty)$.

Таким образом, согласно определению 2, собственные функции ганкелева оператора динамической системы обладают свойством *сохранять неизменной свою форму*, т. е. в силу симметрии ганкелева оператора нет различия между его собственными и сингулярными функциями.

Для получения ганкелевых функций скалярной системы используется два подхода.

Первый подход. Алгоритм получения ганкелевых функций включает операции вычисления матрицы $W = W_c W_0$, ее собственных векторов и моделирования свободного движения исследуемой системы при различных начальных условиях.

Второй подход основывается на моделировании в реальном масштабе времени ганкелева оператора с помощью флип-метода на основе итерационного алгоритма, описанного в [4].

Системы фinitного времени. Классическая теория линейных динамических систем в значительной степени ориентирована на бесконечный или полубесконечный интервалы времени. Это касается аппарата частотных характеристик, преобразования Лапласа, фильтров Калмана, анализа устойчивости и других областей, где получено много полезных результатов. Однако на практике такой подход применим лишь для динамических систем, время работы которых значительно больше длительности переходных процессов.

Вместе с тем реальные системы часто работают на ограниченных интервалах времени, соизмеримых со временем переходных процессов системы. Это системы финитного времени. Нас интересуют динамические системы финитного времени (ДСФТ) с совмещенным, полусовмещенным и разнесенным интервалами. Будут использованы матричные методы решения задачи. Они хороши для оптимизации техники движения спортсменов, поскольку наглядны при переходах от совмещенного к разнесенному интервалу.

Для финитных систем многие результаты классической теории перестают быть справедливыми или вообще теряют смысл. Это касается, например, вопросов устойчивости систем на конечном интервале времени, а также той роли, которые играют синусоидальные гармонические сигналы в частотном анализе. Поэтому представляется важным изучение, во-первых, тех результатов и положений классической теории, которые сохраняются и на конечных интервалах времени (возможно, с частичной модификацией) и, во-вторых, изучение новых эффектов и свойств, которые здесь появляются [5].

Законы финитного времени и ганкелевы сингулярные функции могут найти применение при анализе широкого класса задач. Например, простая механическая аналогия в спортивной технике – когда хоккеист бросает шайбу на льду, сообщая ей максимальную скорость (т.е. кинетическую энергию), то оптимальное приложении усилия соответствует инверсной, по отношению к ганкелевой, во времени функции. Максимальное усилие прикладывается вначале, иначе энергия рекупируется затратно – не приводит к росту финальной скорости. То же самое касается броска ядра, диска, копья.

Будем в дальнейшем рассматривать скалярные линейные системы. В теории таких систем энергия сигнала определяется квадратичной нормой, основные определения для которой приведены в Приложении. Непрерывному и дискретному представлению линейных систем во временной области можно сопоставить непрерывное и дискретное их представление в частотной области. Дискретное представление линейных аналоговых систем в частотной области в теории финитных систем представлено дискретными частотными характеристиками динамических звеньев. В данном случае эксплуатируется свойство амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) динамических систем иметь парные частоты (при одинаковом коэффициенте их усиления), если не на мнимой оси, так на других осях. Если есть парные частоты, то возникает сумма гармоник с количеством составляющих равным порядку системы.

Рассмотрим ДСФТ на совмещенном интервале времени на примере динамических систем, описываемых оператором свертки (1). Спектральное описание оператора свертки на конечном интервале малопродуктивно. Матрица его дискретного приближения имеет только один собственный вектор, от которого у непрерывной системы остается «рудимент» в виде оконечного дельта-импульса. Строгому определению собственной функции он не отвечает. Динамическая система вносит задержку в сигнал и, казалось бы, собственных функций не имеет. Между тем, положение можно решительно изменить, разрешив инвер-

тировать входной или выходной сигнал во времени флип-оператором F . Рассмотрим этот подход.

Матричное приближение зависимости (1)

$$y(t) = Qu(t), \quad (6)$$

где Q – бесконечномерная матрица Сильвестра.

Матрица Сильвестра – прямоугольная теплицева матрица коэффициентов полинома $a(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$, позволяющая найти коэффициенты произведения $c(p) = a(p)b(p)$, т.е. свести полиномиальные вычисления к матричной алгебре. Матрица Q в (6) построена не на коэффициентах полинома, а на значениях импульсной весовой функции $q(t)$. Поскольку $q(t)$ является ядром интегрального оператора Вольтерра, то верхний предел интегрирования определяет матричную диагональ. В силу этого обстоятельства выходной сигнал $y(t)$ зависит от предыстории входного сигнала $u(t)$ и не зависит от его будущих значений (причинность, каузальность).

$$Q = \begin{bmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{bmatrix} \Delta, \quad (7)$$

Таким образом, теплицева матрица Q линейного оператора системы содержит в нижнем треугольнике отсчеты $Q(i,j) = q(t-j)\Delta$, при $t \leq \tau$, $t = \Delta i$, $\tau = \Delta j$, Δ – шаг дискретизации по времени.

В теории финитных систем исходный несимметричный теплицев оператор свертки Q предварительно симметрируется с использованием флип-оператора [4]. Существуют два метода перехода от несимметричного теплицевого оператора свертки к симметричному ганкелевому его представлениям H . Один из них связан с инверсией по времени входного сигнала, второй – выходного. Спектр такого ганкелева оператора дискретен, но не ограничен порядком динамической системы. Этот спектр можно найти тривиальным обращением к процедуре поиска собственных значений. Теплицева Q и ганкелева H матрицы Сильвестра приведены на рис. 1. Теплицева матрица симметрична относительно второй диагонали. Значения ее элементов зависят только от разности индексов $i-j$.

Ганкелевы матрицы отличаются от теплицевых тем, что они симметричны относительно главной диагонали. Теплицева и ганкелева матрицы, связанные флипом, дают представление о тонкостях трактовки одних и тех же сигналов, как сингулярных, так и собственных векторов (функций), соответствующих родственных между собой линейных операторов.

Флип-оператор, используемый для симметрирования теплицевой матрицы, его применение, как операции – это транспонирование матрицы относительно ее центральной оси. Матрица F , описывающая флип, задает зеркальную инверсию сигнала относительно середины интервала и проводит ортогональное преобразование, переводящее теплицеву матрицу в нижнюю и верхнюю треугольные ганкелевы:

$$H_1 = QF, \quad H_2 = FQ. \quad (8)$$

Флип – это частичное, не доведенное до конца транспонирование, поскольку транспонированная теплицева матрица получается как $T' = FTF$. Верхняя

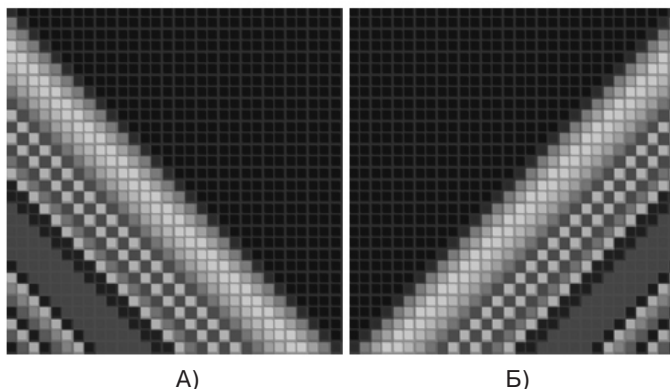


Рис. 1. Формы оператора свертки: а – теплицева, б – ганкелева (симметричный оператор)

треугольная теплицева матрица описывает антикаузальную систему, реагирующую на значение входного сигнала в будущем. Таким образом, теплицевых матриц тоже две, они транспонированы друг к другу, также, впрочем, как и отмеченные ганкелевы.

Для дальнейшей работы введем следующие определения.

Определение 1 (Собственная функция). Не искажаемый системой входной сигнал (рассматриваемый в инверсном времени $\tau=T-t$, T – длительность интервала времени), по аналогии с собственным вектором матриц, называют собственной функцией линейной динамической системы.

В силу новизны, собственные функции, например, элементарных динамических звеньев не широко известны даже среди специалистов по динамике. При этом математическое описание систем вполне классическое, поскольку линейные динамические системы, как и матрицы, разумеется, должны обладать базисом собственных функций.

Определение 2 (Собственное значение). Коэффициент усиления λ не искажаемого входного сигнала (собственной функции) называют собственным значением линейной динамической системы. Совокупность собственных значений динамической системы называется ее спектром.

На бесконечном интервале времени условно пропускаем через систему не искажаемый по форме сигналом является синусоида. Она смещается по фазе на конечную величину, исчезающе малую в сравнении с длительностью всего интервала. Из двух матриц, теплицевой и ганкелевой, собственный базис из ортогональных гармонических функций может быть построен для симметричной второй. Вместе с тем АЧХ системы отвечает энергетической трактовке коэффициентов передачи сигнала и соответствует сингулярному разложению бесконечномерной матрицы Теплица. Поэтому указанные ганкелевы собственные функции являются также сингулярными векторами (функциями) матрицы Q . Между тем, ничто не обязывает нас описывать динамическую систему именно теплицевой матрицей.

Итерационный метод поиска собственных функций. Следующие численные эксперименты должны убедить нас в существовании у линейных динамических систем реальных собственных векторов (функций). В поисках собственных векторов ганкелевой

матрицы обратимся к известным в численном анализе матриц итерационным процедурам нахождения главного собственного вектора. Если матрицу периодически умножать сначала на произвольный вектор, а потом на итог произведения, то главный собственный вектор, отвечающий максимальному собственному числу, будет входить в результат все с большим и большим весом и, в итоге, он и будет превалировать. Отличительным признаком успешного завершения итераций, в соответствии с определением собственного вектора, является совпадение по форме входного и выходного векторов.

Апериодическое звено. Передаточная функция звена $Q(p)=k/(T_1p+b)$. Для нахождения реакции звена в итерационном эксперименте используем нижнюю треугольную ганкелеву матрицу из выражения (8) $H_1=QF$, т. е. входной сигнал предварительно обрабатывается флип-оператором F .

На рис. 2 показан итерационный процесс поиска собственной функции аperiodического звена при $k=10$, $T_1=1$, $b=5$ для промежутка времени $T=20$ секунд. Для большей наглядности сигналы на выходе аperiodического звена выводятся последовательно увеличивающимися в амплитуде графиками. Как видно, итерации действительно приводят к установившемуся сигналу некоторой формы, которая не меняется при прохождении его от входа к выходу.

Итерационный ганкелев эксперимент не снабжает нас никакой аналитикой, а лишь дает уверенность в том, что на ограниченном интервале времени собственные векторы (функции) линейной аналоговой динамической системы существуют, и они не настолько недоопределены, как сигналы на бесконечном интервале времени.

Результаты итерационного процесса поиска собственной функции аperiodического звена приведены на рис. 3, где показаны нормированные графики входного и результирующего выходного процесса для $T=1$ секунда.

Они представляют собой инвертированные во времени функции (совпадающие друг с другом при флипировании одной из них). Следовательно, аperiodическое звено располагает вполне определенным старшим собственным вектором (функцией) $f(t)$. Максимальное ганкелево сингулярное число $\sigma_1=1,77$, которое определяет коэффициент усиления входного сигнала по амплитуде при прохождении его через аperiodическое звено. Преобразование энергии

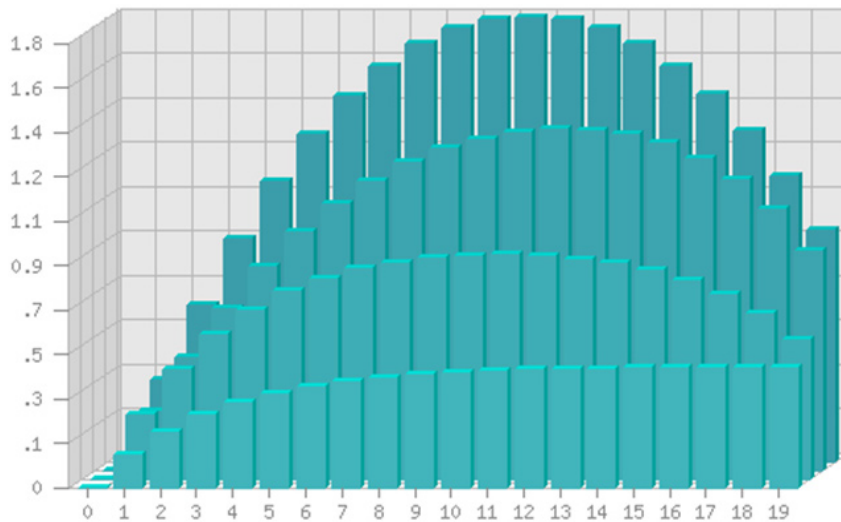
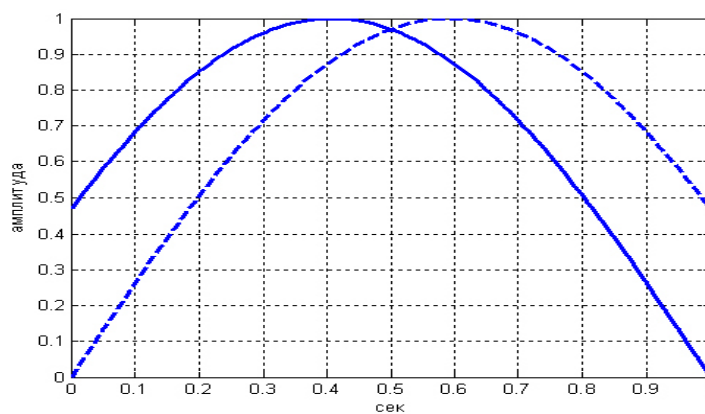
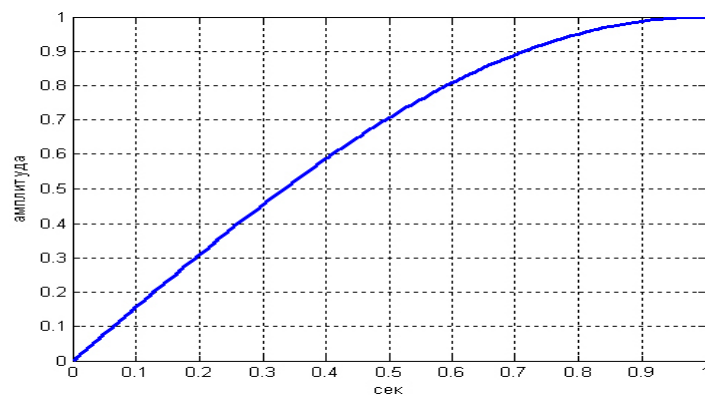


Рис. 2. Итерационный процесс поиска собственной функции

Рис. 3. Нормированные графики входного и результирующего выходного процесса (сплошная кривая), $T=1$, $k=10$, $T_i=1$, $b=5$ Рис. 4. Главная нормированная собственная функция интегрирующего звена, $T=1$, $T_i=1$

при передаче сигнала определим по квадратичным нормам. Квадратичная норма нормированной собственной функции $\|f_n(t)\|=7,572$. Норма выходного сигнала – 13,376. Таким образом, с коэффициентом σ_i усиливается и квадратичная норма сигнала.

Интегрирующее звено. Передаточная функция звена $Q(p)=1/Tp$.

На рис. 4 приведена, полученная в итерационном эксперименте, главная нормированная собственная функция $f_n(t)$ интегрирующего звена для интервала времени $T=1$ секунда при $T_i=1$. Максимальное ганкелево сингулярное число $\sigma_i=0,64$.

Изменение параметра T_i -звена пропорционально

меняет ганкелево сингулярное число σ и не меняет вид главной нормированной собственной функции.

Двойной интегратор. Передаточная функция звена $Q(p)=1/Tp^2$.

На рис. 5 приведена, полученная в итерационном эксперименте, главная нормированная собственная функция $f_n(t)$ двойного интегратора для интервала времени $T=2$ секунды при $T_i=1$. Максимальное ганкелево сингулярное число $\sigma_i=1,38$.

Изменение параметра T_i двойного интегратора пропорционально меняет максимальное ганкелево сингулярное число σ_i и не меняет вид функции $f_n(t)$. Квадратичная норма этой собственной функции

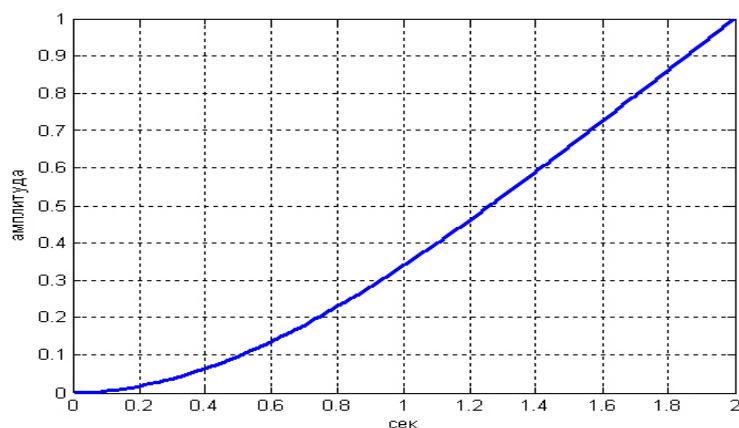


Рис. 5. Главная нормированная собственная функция двойного интегратора, $T=2$, $T_i=1$

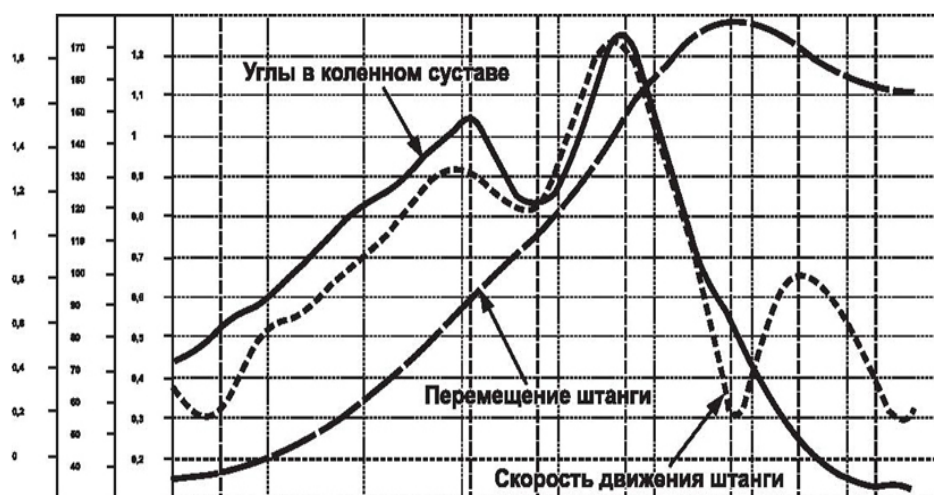


Рис. 6. Пример биомеханического анализа движений штангиста

$\|f_n(t)\| = 5,025$. Она не зависит от времени T и параметров звена.

На рис. 6 приведен взятый из сети пример биомеханического анализа движений штангиста в реальных условиях. Из этого примера по реальной кривой перемещения штанги до ее излома (первый участок перемещения) видно, что начальный разгон штанги проходит по траектории $f_n(t)$, близкой к главной собственной функции двойного интегратора (рис. 5).

Однако сравнение траектории $f_n(t)$ с главной нормированной собственной функцией двойного интегратора (рис. 5) показывает, что на первом участке перемещения штанги спортсмен затянул начальный участок подъема, что привело к некоторой потере энергии, передаваемой снаряду от рук спортсмена, и, следовательно, к ухудшению результата.

Аналогичный анализ и оптимизацию техники движений можно проводить и в других случаях, например, при оздоровительной работе с школьниками, взрослым населением страны с ограниченными двигательными способностями, в паралимпийском движении.

Выводы. Финитность – это характерная черта динамических систем в спорте, так как спортивное движение в принципе не может быть рассматриваемым на бесконечном интервале времени. Предложено использовать математическую теорию финитных систем при оптимизации техники движений в спорте.

Системы финитного времени рассмотрены на примере динамических систем, описываемых оператором свертки. Численные эксперименты на основе итерационного метода показали существование у линейных динамических систем реальных собственных функций – не искажаемых системой входных сигналов, рассматриваемых в инверсном времени. Исследования проведены для элементарных динамических звеньев – инерционного звена первого порядка, интегрирующего звена и двойного интегратора. Показано, что для динамического звена максимальное ганкелево сингулярное число σ_1 определяет коэффициент усиления входного сигнала по амплитуде при прохождении его через звено, с коэффициентом σ_1 усиливается и квадратичная норма сигнала.

Для моделирования динамических систем, работающих на конечном интервале времени, авторы использовали ресурсы сети Интернет [6] и пакет Control System Toolbox математической среды MATLAB.

Дальнейшие исследования будут направлены на создание информационно-управляющей системы для оптимизации техники движения в реальном масштабе времени на основе работ по моделированию собственных функций и разработки компьютерной трехмерной системы регистрации движения.

Приложение.

Нормы сигналов.

В теории систем энергия сигнала определяется

квадратичной нормой – интегралом от квадрата функции [1]

$$\|u(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt}$$

Соответственно, для дискретных сигналов:

$$\|u(t)\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} u^2(n)}$$

Для комплексных сигналов:

$$\|u(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)u^*(t) dt}$$

где $u^*(t)$ – величины, комплексно сопряженные с $u(t)$.

Линейное пространство сигналов L является нормированным, если каждому сигналу пространства $u(t)$ однозначно сопоставлена его числовая норма $\|u(t)\|$ и выполняются следующие аксиомы:

1. Норма неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда сигнал равен нулю ($\|u(t)\|=0$, при $u(t)=0$).

2. Для любого числа b должно быть справедливо равенство: $\|bu(t)\|=|b|\cdot\|u(t)\|$.

3. Если $v(t)$ и $u(t)$ – сигналы из пространства L , то должно выполняться неравенство треугольника: $\|v(t)+u(t)\|\leq\|v(t)\|+\|u(t)\|$.

Линейное пространство сигналов L является метрическим, если каждой паре сигналов $u(t)\in L$ и $v(t)\in L$ однозначно сопоставляется неотрицательное число $\rho(u(t),v(t))$ – метрика или расстояние между векторами. Для метрик сигналов в метрическом пространстве любой размерности должны выполняться следующие аксиомы:

1. $\rho(u(t),v(t)) = \rho(v(t),u(t))$ – рефлексивность метрики.

2. $\rho(u(t),u(t)) = 0$ для любых $u(t)\in L$.

3. $\rho(u(t),v(t))\leq\rho(u(t),a)+\rho(a,v(t))$ для любых $a\in L$.
Метрика определяется нормой разности двух сигналов:

$$\rho(u(t),v(t)) = \|u(t)-v(t)\|.$$

В свою очередь норму можно отождествлять с расстоянием от выбранного элемента пространства до нулевого: $\|u(t)\| = \rho(u(t),0)$.

По метрике сигналов можно судить, например, о том, насколько точно один сигнал может быть аппрок-

симирован другим сигналом, или насколько изменяется выходной сигнал относительно входного при прохождении через динамическую систему.

Скалярное произведение произвольных сигналов $u(t)$ и $v(t)$ отражает степень их связи (сходства) по форме и положению в пространстве сигналов и обозначается как $\langle u(t),v(t) \rangle$.

$$\langle u(t),v(t) \rangle = \|u(t)\| \cdot \|v(t)\| \cos\varphi$$

Физическая сущность скалярного произведения векторов в двумерном пространстве – это произведение «длины» (нормы) одного вектора на проекцию второго вектора по «направлению» первого вектора.

Обобщая выражение для аналоговых сигналов:

$$\langle u(t),v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt$$

Соответственно для дискретных сигналов в N -мерном пространстве будет:

$$\langle u_n, v_n \rangle = \sum_{n=1}^N u_n v_n$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$1. \langle u, v \rangle \geq 0$$

$$2. \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$3. \langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle, \text{ где } a - \text{ вещественное число.}$$

$$4. \langle u + v, a \rangle = \langle u, a \rangle + \langle v, a \rangle$$

Линейное пространство аналоговых сигналов с таким скалярным произведением называется *гильбертовым пространством* L_2 . При определении функций в пространстве $L_2[a,b]$ вычисление скалярного произведения производится соответственно с пределами интегрирования от a до b . Линейное пространство дискретных и цифровых сигналов называется *пространством Евклида* R_2 . В этих пространствах справедливо фундаментальное неравенство Коши-Буняковского

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Для комплексного гильбертова пространства скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\langle u(t),v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t) dt$$

Список использованной литературы:

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы / Н. Н. Красовский. – Москва: Наука. – 1966 г. – 476 с.
2. Мироновский Л. А. Ганкелев оператор и ганкелевы функции линейных систем / Л. А. Мироновский // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №9. – С. 73–86.
3. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems // Intern. J. Control. – 1984. – V. 39, № 6. – P. 1115–1193.
4. Мироновский Л. А. Флип-метод определения сингулярных функций ганкелева оператора и оператора свертки / Л. А. Мироновский, Н. А. Балонин // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 11. – С. 3–18.
5. Балонин Н. А. Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени / Н. А. Балонин, Л. А. Мироновский // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 6. – С. 3–22.
6. Balonin N. A. Finite time interval dynamic system, available at. – Access mode: <http://mathscinet.ru/systems/finite-time/>.

Стаття надійшла до редакції: 10.03.2015 р.

Опубликовано: 30.04.2015 р.

Анотація. Ажиппо О. Ю., Балонин М. О., Друзь В. А., Суздаль В. С. Фінітні системи оптимізації спортивної техніки рухів. **Мета:** запропонувати математичну теорію, яка узгоджувалася б з натурними експериментами та надавала загальну орієнтацію при оптимізації техніки рухів у спорті. **Матеріал і методи:** теорія систем, матричне вираховування, ресурси мережі Інтернет і математичне середовище MATLAB. **Результати:** для елементарних динамічних ланок – інерційної ланки першого порядку, ланки, що інтегрує, й подвійного інтегратора показано, що для вхідного сигналу у вигляді власної функції при проходженні його через ланку, максимальний коефіцієнт підсилення по амплітуді й квадратична норма вихідного сигналу

визначається максимальним ганкелевим сингулярним числом. **Висновки:** запропоновано використовувати математичну теорію фінитних систем при оптимізації техніки рухів у спорті. Чисельні експерименти показали існування у лінійних динамічних систем реальних власних функцій – вхідних сигналів, що не спотворюються системою, розглянутих в інверсному часі.

Ключові слова: спортивна техніка руху, системи фінитного часу, власна функція, оптимізація, математичне моделювання.

Abstract. Aghyppo O., Balonin N., Druz V., Suzdal V. **Finite system optimization sports equipment movements.**
Purpose: to provide mathematical theory coordinated with physical experiments, and gave the general orientation in the optimization technique of movements in sport. **Material and Methods:** theory of systems, matrix theory, Internet resources and mathematical environment MATLAB. **Results:** for simple dynamic blocks – first order inertial block, integrator and double integrator shown that the input signal in the form of the Eigen-function a maximum gain in amplitude when it passes through the block and the quadratic norm of the output signal is determined by the maximum Hankel singular value. **Conclusions:** proposed to use a mathematical theory of finite time systems in the optimization techniques of movement in sport. The numerical experiments have shown the existence for linear dynamic systems of real Eigen-functions – does not distort the system inputs are considered in reverse time.

Keywords: the movement technique in sports, the finite time systems, Eigen-functions, the optimization, the mathematical modeling.

References:

1. Krasovskiy N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniyem. Lineynyye sistemy* [The theory of motion control. Linear Systems], Moscow, 1966 g, 476 p. (rus)
2. Mironovskiy L. A. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1992, vol. 9, pp. 73–86. (rus)
3. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems // *Intern. J. Control.* – 1984. – V. 39, № 6. – P. 1115–1193.
4. Mironovskiy L. A., Balonin N. A. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 1999, vol. 11, p. 3–18. (rus)
5. Balonin N. A., Mironovskiy L. A. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and telemechanics], 2002, № 6, p. 3–22. (rus)
6. Balonin N. A. *Finite time interval dynamic system*, available at. – Access mode : <http://mathscinet.ru/systems/finite-time/>.

Received: 10.03.2015.

Published: 30.04.2015.

Ажиппо Олександр Юрійович: д. пед. н., професор; Харківська державна академія фізичної культури: вул. Клочківська 99, Харків, 61058, Україна.

Ажиппо Александр Юрьевич: д. пед. н., профессор; Харьковская государственная академия физической культуры: ул. Клочковская 99, г. Харьков, 61058, Украина.

Oleksandr Aghyppo: Doctor of Science (Pedagogical), Professor; Kharkiv State Academy of Physical Culture: Klochkivska str. 99, Kharkiv, 61058, Ukraine.

ORCID.ORG/0000-0001-7489-7605

E-mail: aghyppo@yandex.ua

Балонін Микола Олексійович: д. т. н., професор; Державний університет аерокосмічного приладобудування: вул. Велика Морська 67, Санкт-Петербург, 190000, Росія.

Балонин Николай Алексеевич, д. т. н., профессор; Государственный университет аэрокосмического приборостроения: ул. Большая Морская 67, Санкт-Петербург, 190000, Россия.

Nikolay Balonin: Doctor of Science (Technical), Professor; State University of Aerospace Instrumentation: Bolshaya Morskaya str. 67, Saint-Petersburg, 190000, Russia.

E-mail: korbends@mail.ru

Друзь Валерій Анатолійович: д. б. н., професор; Харківська державна академія фізичної культури: вул. Клочківська 99, м. Харків, 61058, Україна.

Друзь Валерий Анатольевич: д. б. н., профессор; Харьковская государственная академия физической культуры: ул. Клочковская 99, г. Харьков, 61058, Украина.

Valeriy Druz: Doctor of Science (Biology); Professor; Kharkiv State Academy of Physical Culture: Klochkivska 99, Kharkiv, 61058, Ukraine.

ORCID.ORG/0000-0002-4628-6791

E-mail: valeriidruz@gmail.com

Суздаль Віктор Семенович: д. т. н.; Інститут сцинтиляційних матеріалів НАН України: пр. Леніна 60, Харків, 61001, Україна.

Суздаль Виктор Семенович: д. т. н.; Институт сцинтилляционных материалов НАН Украины: пр. Ленина 60, Харьков, 61001, Украина.

Viktor Suzdal: Doctor of Science (Technical); Institute for Scintillation Materials NAS of Ukraine: Lenin ave. 60, Kharkiv, 61001, Ukraine.

E-mail: suzdal_v@mail.ru

Бібліографічний опис статті:

Финитные системы оптимизации спортивной техники движений / [Ажиппо А. Ю., Балонин Н. А., Друзь В. А., Суздаль В. С.] // Слобожанський науково-спортивний вісник. – Харків : ХДАФК, 2015. – № 2(46). – С. 11–18. – dx.doi.org/10.15391/sns.v.2015-2.001