

## Transformation of the Understanding of Creative Mathematical Problems in the Process of Solving Them

### Трансформація розуміння творчих математичних задач у процесі їх розв'язання

#### **Lidiia Moiseienko**

Dr. in Psychology, Professor, Department of Higher Mathematics, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk (Ukraine)

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9288-7355>

Researcher ID: X-7506-2018

E-mail: [Lmoiseyenko@i.ua](mailto:Lmoiseyenko@i.ua)

#### **Лідія Мойсеєнко**

Доктор психологічних наук, професор кафедри вищої математики, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ (Україна)

#### **Liubov Shehda**

Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Department of Higher Mathematics, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk (Ukraine)

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4721-7832>

Researcher ID: Z-2516-2019

E-mail: [shегда.luba@gmail.com](mailto:shегда.luba@gmail.com)

#### **Любов Шегда**

Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ (Україна)

---

Address for correspondence, e-mail: [kpnu\\_lab\\_ps@ukr.net](mailto:kpnu_lab_ps@ukr.net)

Copyright: © Moiseienko Lidiia, Shehda Liubov



The article is licensed under **CC BY-NC 4.0 International**  
(<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

© Moiseienko Lidiia, Shehda Liubov

DOI (article): <https://doi.org/10.32626/2227-6246.2019-46.289-307>

<http://journals.uran.ua/index.php/2227-6246>

The author's contribution: L. Moiseienko – 60%, L. Shehda – 40%.

Авторський внесок: Л. Мойсеєнко – 60%, Л. Шегда – 40%.

## ABSTRACT

*The article deals with questions about psychological nature, place and role of understanding creative mathematical problems in the process of their solving.*

*According to the research of mathematical thinking, its creative character is ascertained and the approach to its study is determined through analysis of the process of solving creative mathematical problems of different classes.*

*The authors identify three process components of creative mathematical thinking: the process of understanding, the process of forecasting and approbation process. Emphasis is placed on the parallel flow of these processes during solving creative mathematical problems.*

*It is established that the process of understanding a creative mathematical problem by students goes through: during all stages of solving problems, through the procedures of recognizing the old in the new, predicting the future or the past for the understood object, combining disparate elements into a whole, explaining the found solution.*

*It is proved that the process of understanding a creative mathematical problem has an open nature: understanding the condition of the problem has its continuation in formation and testing of the solution in the mathematical search process, and the results of the process of understanding the problem contribute to the process of predicting the solution and testing mental results.*

*It is established that in the process of understanding a mathematical problem, the state of understanding is transformed, taking various forms: understanding-recognition, understanding-likening, understanding-forecasting, understanding-combining, understanding-explanation.*

*It is found out that the functioning of a particular form of understanding does not belong to a particular class of problems, but it is rather a qualitative state of understanding any creative mathematical problem when solving it.*

**Key words:** *creative mathematical thinking, process of understanding, forms of understanding, understanding-recognition, understanding-likening, understanding-forecasting, understanding-combining, understanding-explanation.*

## Вступ

Вивчення психологією проблеми творчого мислення зумовлюється тим, що її розробка створює підґрунтя для формування особистості, здатної вирішувати творчі нестандартні завдання, уміти гнучко мислити і перетворювати знання в знаряддя активних дій, привчатися шукати розв'язок у тих випадках, для яких ще не існує розроблених правил дій.

Виходячи з того, що математика активно включається у вирішення завдань у різних галузях науки і техніки, дослідження мисленнєвого математичного процесу є важливим завданням психології. Математика – це продукт особливого виду наукового пізнання дійсності. Вона відкриває природу не так, як це робить, наприклад, мистецтво, не в матеріалі природи (фарби, звуки тощо), а за допомогою своїх абстракцій: чисел, величин, функцій, геометричних фігур тощо. При цьому, творчий математичний процес гармонійно поєднує загальні ознаки інтелектуальної творчості зі специфікою математичної діяльності.

Пошуковий мисленнєвий процес у психології трактується як процес розв'язання задач. М. Д. Мамфорд і С. Б. Густавсон (Mumford & Gustafson, 1988) зауважують, що процес розв'язання задач більшою мірою пов'язаний з інформацією, що здається нерелевантною для розв'язання певної задачі. У цьому випадку осмислення задачі часто базується на латеральному мисленні – «мисленні навколо задачі». Це вимагає активізації різноманітної інформації та здатності її використовувати, щоб творити за межами досвіду. А це відбувається при розумінні, при побудові її розв'язку, при аналізі знайденого розв'язку. Тому *дослідження творчого математичного мислення базуються на аналізі пошуків розв'язку творчих математичних задач.*

Розуміння – це не засіб пізнання світу, а лише засіб отримання знань про дійсність. Якщо розуміння завдання настає відразу, його просто не помічають, коли ж воно не настає, розуміння стає предметом роздумів, предметом вивчення.

Досліджуючи творчий мисленнєвий процес, спрямований на розв'язання задачі, науковці виокремлюють його складові процеси: розуміння задачі, формування гіпотези її розв'язку, апробація такої гіпотези; вивчають процесуально-динамічний та особистісний аспекти таких складових, з'ясовують їх сутність і значущість у мисленнєвому процесі тощо (Моляко, 1983; Коваленко, 1999). При цьому вважається, що передумовою успішності будь-якого мисленнєвого процесу є *розуміння* завдання, яке необхідно виконати. У цьому випадку можна говорити про розуміння як про «стартовий майданчик» для розв'язання зовсім або частково нових задач. Однак розуміння творчої задачі є лише одним із процесів, що забезпечує успішність розв'язання задачі. Тому дослідження процесу розуміння при розв'язанні різноманітних математичних задач є важливою складовою *проблеми з'ясування психологічної сутності творчого математичного мислення*.

Увага до феномену розуміння, його природи, ролі й значення в діяльності суб'єкта є однією з характерних особливостей сучасного етапу філософських, психологічних, педагогічних досліджень. Дослідники процесу розуміння не зводять його лише до мислення і включають до нього інші психологічні процеси (пам'ять, уяву) (Знаков, 1994; Моляко, 2007; Коваленко, 1999). Установлено, що розуміння формується у процесі розв'язання задачі, й тому його виникнення не можна віднести лише до якоїсь однієї стадії пошукового мисленнєвого процесу (Susanne & John, 2005; Mayer & Hegarty, 1996; Mahwah, 2015; Yaftian, 2015; Ortiz, 2016; Jaleel, 2015). Оскільки розуміння являє собою не лише результат мислення, але є одним із його процесів (Мойсеєнко, 2003), то воно бере активну участь у розв'язанні задачі, забезпечує успішність цього розв'язання. *Саме з таких позицій проводиться аналіз процесу розуміння у нашій роботі*.

Дослідники в задачі, як правило, виокремлюють умову й вимогу (Ortiz, 2016). Умови задачі мають багатопланову характеристику – це набір фактів і складових об'єктів за-

дачі, які іноді не мають один з одним жодного очевидного зв'язку. Безпосередньо представлений в умові, набір може бути невеликим, але він доповнюється фактами іншого типу, додаючи до умови певні твердження, раніше відомі математичні результати (аксіоми, визначення, теореми тощо). Це вимагає певного розуміння задачі, точніше, певного *стану розуміння*.

Межі активізованої сукупності фактів не є чіткими, позаяк наперед не відомо, які знання будуть потрібні для розв'язання задачі. Щоб розв'язати задачу, перш за все необхідно вибудувати свою сукупність фактів у певну конструкцію. При цьому, пошук розв'язку задачі супроводжується деталізацією такої конструкції, що можливо у разі зміни якості розуміння. І, насамкінець, відповідь задачі повинна обов'язково виявитися елементом цієї конструкції. Це знову ж таки вимагає зміни розуміння задачі. Усе це підводить нас до усвідомлення значущості аналізу *трансформації процесу розуміння творчої математичної задачі*.

З іншого боку, В. В. Знаков (Знаков, 1994; 2005) стверджує, що процес формування мети й постановки задачі веде до виявлення типу мисленневої задачі, яку в цьому випадку розв'язує суб'єкт. Тип мисленневої задачі спричиняє виникнення в суб'єкта конкретних *форм* розуміння: розуміння-впізнання, розуміння-прогнозування, розуміння-об'єднання, розуміння-пояснення. У першому випадку (розуміння-впізнання) розуміння базується, переважно, на минулому досвіді (чинники, що аналізуються, відносяться до категорії відомих чи нових). У випадку, коли об'єкт розуміння новий, суб'єкт починає зіставляти його ознаки з ознаками відомих йому об'єктів, намагаючись віднести цей об'єкт до певного класу. Основний зміст психічної діяльності суб'єкта в цьому випадку полягає у висуванні гіпотез. Так діє розуміння-прогнозування. Якщо ж суб'єкт обирає найсуттєвіші ознаки предмета, окреслює коло взаємозалежних ознак, пов'язує їх у ціле (конструювання цілого з частин), то має місце розу-

міння-об'єднання. Розуміння-пояснення настає при спробі пояснити явище, що пізнається. Ця форма розуміння найскладніша з описаних вище і вбирає в себе всі пізнавальні процеси, що використовувалися на попередніх етапах.

Психолог А. Б. Коваленко (Коваленко, 1999; 2015), аналізуючи сутнісні характеристики процесу розуміння творчих задач, розробила свою рівневу організацію цього процесу (розуміння-впізнавання, розуміння-пригадування, розуміння-аналогізування, розуміння-комбінування, розуміння як руйнування стереотипів, найвищий рівень розвитку розуміння), що дає змогу простежити динаміку цього процесу, а також зробити висновок про рівень психічного розвитку особистості.

Тому можна констатувати, що, згідно сучасної точки зору, яка переважає у психології, розуміння творчої задачі формується у процесі її розв'язання, а психологічна сутність процесу вбачається у зіставленні нової інформації зі старою, відомою суб'єкту, для виявлення сутності (часто прихованої) задачі шляхом осмислення й переосмислення її змісту.

*У нашому дослідженні ми аналізуємо трансформацію, місце дії та значущість різних форм і рівнів розуміння у процесі розв'язання творчої математичної задачі.*

Існує низка ґрунтовних досліджень психології математичного мислення, спрямованого на розв'язання задач (Адамар, 1070; Пойа, 1976; Mayer & Hegarty, 1996; Susanne & John; 2005; Giaquinto, 2007; Jaleel & Titus, 2015). Дослідники констатують, що математичне мислення має свої специфічні прояви, пов'язані з: використанням математичної символіки; пануванням логічного методу доведення; наявністю алгоритму розв'язання багатьох задач; одночасним функціонуванням аксіоматичного і конструктивного методів побудови математичних теорій тощо.

**Мета статті** – проаналізувати зміст і психологічну сутність процесу розуміння творчих математичних задач на різних етапах їх розв'язання.

### **Завдання статті**

1. Описати зміст процесу розуміння творчих математичних задач як наскрізного процесу при їх розв'язанні.
2. З'ясувати сутність трансформації різних форм розуміння творчих математичних задач у процесі їх розв'язання.

### **Методи та методики дослідження**

Методом дослідження є аналіз пошукових дій студентів упродовж розв'язання ними творчих математичних задач різних класів.

Попередньо нами було з'ясовано, що аналіз процесу розв'язання математичних задач дає змогу найкраще виявити закономірності й переваги мисленневих дій у математичній творчості. Це привело нас до переконання використати задачний метод дослідження, тобто, розробивши серію відповідних математичних задач, провести аналіз процесу їх розуміння, акцентуючи увагу на предметі нашого дослідження – аналізі зміни форм розуміння творчих математичних задач у процесі їх розв'язання студентами технічних спеціальностей. Центральним положенням дослідження є припущення, що процес розуміння суб'єктом творчої математичної задачі має місце на всіх етапах процесу розв'язання і є його наскрізним процесом, який розпочинається на етапі вивчення умови задачі й завершується перевіркою знайденого розв'язку, а трансформація різних форм розуміння творчих математичних задач відбувається у процесі їх розв'язання.

Було підібрано 23 серії задач так, щоб кожна серія сприяла вивченню певного аспекту математичного мислення. Усього використано 160 задач. Усі задачі, незалежно від серії, було розділено на 4 класи: задачі на знаходження невідомої величини, задачі на доведення, задачі на побудову й евристичні задачі, що поділяються за характером вимоги до задачі.

Ми провели експериментальне дослідження творчого математичного мислення студентів Івано-Франківського націо-

нального технічного університету нафти й газу. Кожен із 220 студентів розв'язав по 10 різних математичних задач (на знаходження невідомої величини, на доведення, на побудову, евристичні задачі). Це дало нам змогу дослідити сутність процесу розуміння при розв'язанні творчих математичних задач і з'ясувати зміст і роль різних форм розуміння.

Завдання підбиралися з таким розрахунком, щоб вони: 1) були достатньо складними, але посильними (рівень достатності й посильної складності завдань був визначений у ході апробації та бесід із викладачами математики); 2) могли (на нашу думку) проілюструвати більш-менш розгорнутий процес розв'язання математичної задачі; 3) дозволили б отримати результат, який можна оцінити.

Завдання виконувалися кожним студентом у присутності експериментатора. Робота проводилася індивідуально. Студенту надавалася можливість працювати самостійно, прямі вказівки на спосіб розв'язання були відсутні. Виконання завдань було необмежене у часі.

Зауважимо, що ми вважаємо творчий мисленнєвий процес, спрямований на розв'язання математичної проблеми, триєдиним процесом, який включає процес розуміння задачі, процес формування її розв'язку і процес апробації знайденого розв'язку. Ці процеси, проникаючи один в одного, взаємодоповнюють їх, а результат одного зі складових процесів має свою значущість і для решти (Мойсеєнко, 2003; 2007). Тому про процес розуміння творчої математичної задачі варто судити, аналізуючи всі складові етапи пошукового процесу (вивчення умови задачі, побудова проекту розв'язку, перевірка знайденого розв'язку). Наголосимо, що для нас розуміння будь-якої задачі означає розуміння умови (основних структурних елементів, функцій, зв'язків між ними), розуміння того, що є розв'язком, і розуміння того, як досягти цього розв'язку.



## Результати та дискусії

Студенти технічного закладу вищої освіти мають багатий досвід розв'язання задач із різних галузей науки (математики, фізики, теоретичної механіки тощо). Тому перше прочитання (без попереднього оголошення розділу, до якого належить задача) має для них велике *орієнтовне* значення, є першим кроком до розуміння запропонованої їм задачі, навіть якщо це перше уявлення не є чітким і переконливим. Читаючи задачу вперше, студенти намагалися зрозуміти її загальний смисл, з'ясувати, чи зустрічалися вони із задачами такого типу, впізнати значення слів, символів: виокремлювали з контексту задачі відомі терміни, пригадуючи їх значення, символи, числа, що мають певні якісні ознаки ( $\int f(x)dx$  – інтеграл певної функції;  $\frac{\partial z}{\partial x}$  – частинна похідна). Тобто, вони виокремлювали певні структури, що не потребують подальшого вивчення, оскільки інформація про них існувала в пам'яті студентів. Такий стан розуміння відповідає першій його формі, зазначеній В. В. Знаковим (Знаков, 1994): розуміння-впізнавання. Ми б сказали точніше – розуміння-пригадування, адже на цьому етапі суб'єкт не виконує активної мисленнєвої діяльності. Отже, є сенс говорити про перший стан розуміння творчої математичної задачі – *розуміння-пригадування*.

Звісно, що основою розуміння-пригадування є когнітивна складова мисленнєвого процесу, до якої відносять знання, попередній досвід, суб'єктивні системи смислів, словниковий запас. Саме вони у подальшому забезпечують вірне розпізнавання структури задачі, функціональних можливостей її складових елементів, віднесення їх до певної математичної категорії.

У процесі розв'язання задач знання відбираються поетапно, щоразу зіставляються з умовою і вимогою задачі й на цій основі знання селекціонуються, а сама задача переформулюється або, точніше кажучи, змінюється певне співвідно-

шення її умови і вимоги на основі єдиної системи понять, тобто, будується певна модель проблемної ситуації, описаної задачею, а, отже, формується певний стан її розуміння.

У процесі переформулювання умова задачі розподіляється на *головну* й *другорядну* частини, при цьому, студенти відносять математичну задачу до певного класу, визначають, що потрібно зробити (обчислити, довести, побудувати) і що для цього відомо. Це особливо яскраво ілюструється при розв'язанні задач із надлишковою чи недостатньою умовою і задач із несформульованим завданням. У першому випадку – на початкових стадіях вивчення умови такий «дефект» не виявляється, тоді як у задачах із несформульованим завданням, як правило, відразу виникає запитання: «Що потрібно виконати?» Тобто, розуміння забезпечує уподібнення структурних елементів задачі з уже відомими математичними об'єктами, а, отже, набуває стану *розуміння-уподібнення*.

Аналізуючи умову математичної задачі, студенти намагалися розчленувати її на прості елементи, зрозумілі для них априорі, та зіставити ознаки нового об'єкта з ознаками відомих об'єктів. Розпочинається *перекодування задачі на «свою» мову*. Виокремлюються вузлові поняття задачі, асоціативно з'являються основні теоретичні відомості, пов'язані із задачею. «Своє» бачення умови задачі полягає у наданні певної знайомої математичної інтерпретації конкретній заданій ситуації, у графічних ілюстраціях тексту задачі чи текстовому описі графічної ілюстрації, поданої умовою задачі. Тобто, відбувається детальніше вивчення частин умови задачі, а роль розуміння в мисленні суб'єкта зводиться, переважно, до розуміння фактів як результатів узагальнення попереднього досвіду, включення їх у систему особистісних знань. Це все – розуміння-уподібнення, хоча й на глибшому рівні. Варто особливо наголосити на тому, що такі пошукові дії водночас визначають деякий напрям пошуку розв'язку, тобто, розпочинається процес прогнозування розв'язку задачі.

Смисл математичної задачі визначається інтерпретацією структурних елементів через яку-небудь гіпотезу, що вимагає від суб'єкта здійснення відповідних мисленнєвих дій. Характер прогнозу гіпотези визначає стан розуміння. Позаяк у студентів виникало багато альтернативних і неальтернативних гіпотез, то виникало й різне розуміння однієї і тієї ж задачі. У зв'язку з цим, на перший план виходить питання про адекватність гіпотези реальному змісту задачі. У цьому випадку доцільно говорити про наступний стан розуміння: *розуміння-прогнозування*.

Навіть перші гіпотези, висунуті у процесі розуміння умови задачі, часто носили ознаки майбутнього розв'язку. Тобто, процес розуміння задачі, його результати неперервно переходив у процес побудови проекту розв'язку. Назагал ситуацію можна описати так. У процесі розуміння висувається перша гіпотеза про те ціле, про яке йдеться у задачі. Подальший пошук керується цією гіпотезою. Коли вступає в дію визначення змісту інших деталей, під їх впливом здійснюється перевірка гіпотези. Не задовільнивши умови, але значно дослідивши зазначені в задачі об'єкти, вона відкидається й замінюється іншою. Перевірка гіпотези, її узгодження з умовою задачі призводить до нового змісту розуміння задачі.

Отже, у процесі розуміння творчої математичної задачі студенти спочатку виокремлювали елементи (числа, символи, операції, геометричні фігури тощо), впізнавали їх призначення, а після цього знаходили зв'язки між ними як шляхом вивчення й перевірки низки гіпотез про ці зв'язки (на етапі вивчення умови), так і шляхом висування гіпотез про шляхи розв'язання (на етапі формування проекту розв'язку). Гіпотези, спрямовані на об'єднання розрізнених елементів умови задачі, у процесі розуміння поступово переплітаються з гіпотезами щодо змісту розв'язку. Процес розуміння йде паралельно з пошуком розв'язку, при цьому його домінуючою формою є *розуміння-прогнозування*. Адже висунуті гіпотези щодо розв'язку є і гіпотезами процесу ро-

зуміння, вони висвітлюють певні сторони об'єктів і процесів, які містить творча математична задача. Унаслідок цього суб'єкт отримує нове бачення задачі загалом і новий рівень проникнення в сутність її умови та вимоги – нову, досконалішу модель задачі.

Експериментальні задачі були запропоновані в текстовій або символній формі, при цьому частина з них була доповнена графіками, кресленнями. На початкових етапах мисленневої діяльності ми спостерігали прагнення студентів зіставляти текст із наявними малюнками або доповнювати задачі «ілюстраціями». Такі дії сприяли переведенню змісту задачі на «свою» мову. Співставлення графічної й текстової інформації у процесі розуміння творчої математичної задачі важко переоцінити. Супроводження текстового завдання «провокаційними» рисунками часто приводило студентів до хибного розуміння завдання, якщо вчасно не виявлялася невідповідність між текстом і рисунком.

У подальшій пошуковій діяльності спостерігається детальне обстеження елементів задачної ситуації, виявлення значної кількості їх властивостей. Виявивши низку елементів у задачі, студенти намагаються їх синтезувати в те ціле, яким є творча математична задача. Мова йде про виявлення деякої суб'єктивної значущості структурних елементів із точки зору їх корисності для подальшого розв'язку. Для математики, що оперує символами і числами, важливим є настання взаємоузгодження семантичного й формального змісту, який містить задача. Потрібно прийняти рішення про необхідність більш-менш широкої інформації про ті об'єкти, які виражені певними символами, або встановити допустимі значення для символів. Наприклад, при встановленні множини точок, що описуються нерівністю  $x^2 + y^2 \leq 1$ , необхідно знати, де ця множина точок розміщена: на площині (круг) чи у просторі (циліндричне тіло).

Після описаних дій задача набуває вигляду більш-менш цілісної системи математичних об'єктів – завершується фор-

мування певної моделі задачі й напряду пошуку її розв'язку. Розпочинають діяти комплекси математичних символів, що мають свої математичні значення та властивості. У деяких випадках це відбувається на основі підключення реальних кількісних співвідношень, що надалі функціонуватимуть з утвореними символічними виразами. Нерідко на цьому етапі задача одного типу перетворюється в клас задач іншого типу (наприклад, рівняння четвертого степеня стає рівнянням другого степеня). І хоча задача ще містила низку прогалин, які не давали змоги скласти її вичерпну характеристику (існували «зайві» або «відсутні» елементи), студенти намагалися об'єднати структурні елементи у цілісну систему. Тобто, мова йде про функціонування іншого стану розуміння задачі, про *розуміння-об'єднання*, результатом якого часто був розв'язок (проміжний чи кінцевий).

Зауважимо, що описані дії, спрямовані на розуміння математичної задачі, можна віднести і до етапу пошуку розв'язку, і до етапу перевірки розв'язку (проміжного чи кінцевого), тому можна стверджувати, що *процес розуміння «вмонтовується» у процеси прогнозування розв'язку й апробації* мисленневих результатів.

Отриманий розв'язок (як правило, проміжний) піддається перевірці умовою. Саме проміжні розв'язки були найяскравішим індикатором розуміння математичної задачі студентами. Адже, якщо у суб'єкта складається враження, що існує відповідність між умовою задачі та знайденим новоутворенням, то воно оголошується розв'язком задачі. Водночас зміст цього новоутворення надає інформацію про певний стан розуміння задачі.

Нерезультативність проміжного розв'язку виявлялася на етапі його апробації. Зміст мисленневих дій *апробаційного процесу* творчого математичного мислення полягає у зіставленні результату з умовою й вимогою задачі; у перегляді ланцюга мисленневих кроків, що привели до результату; в його апробації в різних умовах, що не виходять за межі умови

задачі й допускаються нею. Такі дії, формуючи суб'єктивну впевненість у правильності (або неправильності) знайденого розв'язку, водночас спрямовані на поглиблення розуміння сутності самої задачі. Вони пояснюють доцільність об'єднання розрізнених математичних елементів попередніми мисленневими діями у цілісну математичну систему, тобто розуміння набуває іншого стану – стану *розуміння-пояснення*.

Словесне чи символічне пояснення є необхідним компонентом розуміння, а також одним із його індикаторів. Часто студенти, знайшовши розв'язок і пояснюючи його експериментатору, відмовлялися від нього, усвідомлюючи його невідповідність. Усе ж пояснення, переважно, свідчать про повноту і глибину розуміння задачі, її розв'язку.

Варто наголосити, що нами не зафіксовано жодної переваги функціонування певної форми розуміння при розв'язанні того чи іншого класу задач. Різні форми розуміння, на нашу думку, є якісними станами розуміння будь-яких творчих математичних задач на певних етапах їх розв'язання.

## Висновки

Процес розуміння творчої математичної задачі у студентів проходить: упродовж усіх етапів розв'язання задач, за допомогою процедур упізнавання старого в новому, прогнозування майбутнього чи минулого щодо об'єкта, який розуміється, об'єднання розрізнених елементів у ціле, пояснення знайденого розв'язку. Причому різні процедури мають домінуючий характер на різних етапах пошукового процесу. Розуміння творчої математичної задачі досягається шляхом співставлення нової інформації із системою знань суб'єкта, завдяки взаємодії числової, символічної та просторової складових математичного мислення. У процесі розуміння математичної задачі стан розуміння, трансформуючись, набуває різних форм: розуміння-впізнавання, розуміння-уподібнення, розуміння-прогнозування, розуміння-об'єднання, розуміння-пояснення.

**Перспективою подальших досліджень окресленої проблеми є дослідження особистісного аспекту процесу розуміння, його впливу на перебіг і взаємоузгодження складових процесів творчого математичного мислення, а також питання, пов'язані з активізацією та оптимізацією процесу розуміння творчих математичних задач шляхом активізації виокремлених форм розуміння.**

### Література

- Адамар Ж. Исследования психологии процесса изобретения в области математики. Москва : Соврадио, 1970. 152 с.
- Знаков В. В. Понимание в познании и общении. Москва : Изд-во Института психологии РАН, 1994. 237 с.
- Знаков В. В. Психология понимания: проблемы и перспективы. Москва : Изд-во Института психологии РАН, 2005. 448 с.
- Клайн М. Математика. Поиск истины. Москва : Мир, 1988. 295 с.
- Коваленко А. Б. Проблема розуміння в працях українських психологів. *Теоретичні і прикладні проблеми психології*. 2015. № 1 (36). С. 190–197.
- Коваленко А. Б. Психологія розуміння. Київ : Геропринт, 1999. 184 с.
- Мойсеєнко Л. А. Психологія творчого математичного мислення. Івано-Франківськ : Факел, 2003. 481 с.
- Моляко В. А. Творческая конструкторология (пролегомены). Киев : Освита Украины, 2007. 388 с.
- Пойа Д. Математическое открытие. Москва : Наука, 1976. 336 с.
- Jaleel, S., & Titus, B. (2015). Effectiveness of Gaming Strategy on Mathematical Creativity of Students at Secondary Level. *Indian Journal of Applied Research*, 5 (10), 243–245. DOI 10.15373/2249555X.
- Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. R. J. Sternberg, T. Ben-Zeev (Eds.). *The nature of mathematical thinking*, 29–53.
- Mumford, M. D., & Gustafson, S. B. (1988). Creativity syndrome: Integration, application and innovation. *Psychological Bulletin*, 27–43.
- Ortiz, E. (2016). The Problem-Solving Process in a Mathematics Classroom. *Transformations*, 1 (1), 257–289. Retrieved from <https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol1/iss1/1>.
- Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R. (2015). Drawings and Tables as Cognitive Tools for Solving Non-Routine Word Problems in Primary School. *American Journal of Educational Research*, 3 (11), 1387–1397. DOI 10.12691/education-3-11-7.

Yaftian, N. (2015). The outlook of the Mathematicians' Creative Processes. *Procedia. Social and Behavioral Sciences*, 191, 2515–2519. Retrieved from <https://www.journals.elsevier.com/procedia-social-and-behavioral-sciences/special-issues>.

Ziff, P. (1972). *Understanding*. London Ithaca.

## References

- Adamar, Zh. (1970). *Issledovaniia psikhologii protsessa izobretenii v oblasti matematiki [Study on the psychology of the processes of research in the field of mathematics]*. Moskva: Sovradio [in Russian].
- Znakov, V.V. (1994). *Ponimaniie v poznanii i obshchenii [Understanding in cognition and communication]*. Moskva: Izd-vo RAN Instituta psikhologii [in Russian].
- Znakov, V.V. (2005). *Psikhologiia ponimaniia: Problemy i perspektivy [Psychology of Understanding: Problems and Prospects]*. Moskva: Izd-vo Instituta psikhologii RAN [in Russian].
- Klain, M. (1988). *Matematika. Poisk istiny [Mathematics. Search for truth]*. Moskva : Mir [in Russian].
- Kovalenko, A.B. (1999). *Psikhologiiia rozuminnia [The Psychology of Understanding]*. Kyiv: Heroprynt [in Ukrainian].
- Kovalenko, A.B. (2015). Problema rozuminnia v pratsiakh ukrainskykh psikhologiv [The problem of understanding in the works of Ukrainian psychologists]. *Teoretychni i prykladni problemy psikhologii – Theoretical and applied problems of psychology*, 1 (36), 190–197 [in Ukrainian].
- Moiseienko, L.A. (2003). *Psikhologiiia tvorchoho matematychnoho myslennia [Psychology of creative mathematical thinking]*. Ivano-Frankivsk: Fakel [in Ukrainian].
- Moliako, V.A. (2007). *Tvorcheskaia konstruktologiia (prolegomeny) [Creative Constructology (prolegomena)]*. Kyiv: Osvita Ukrainy [in Ukrainian].
- Poia, D. (1976). *Matematicheskoe otkrytiie [Mathematical discovery]*. Moskva: Nauka [in Russian].
- Jaleel, S., & Titus, B. (2015). Effectiveness of Gaming Strategy on Mathematical Creativity of Students at Secondary Level. *Indian Journal of Applied Research*, 5(10), 243–245. Retrieved from 10.15373/2249555X.
- Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The Process of Understanding Mathematical Problems. R. J. Sternberg, T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking*, 29–53.



- Mumford, M.D., & Gustafson, S.B. (1988). Creativity syndrome: Integration, application and innovation. *Psychological Bulletin*, 27–43.
- Ortiz, E. (2016). The Problem-Solving Process in a Mathematics Classroom. *Transformations*, 1 (1), 257–289. Retrieved from <https://nsu-works.nova.edu/transformations/vol1/iss1/1>
- Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R. (2015). Drawings and Tables as Cognitive Tools for Solving Non-Routine Word Problems in Primary School. *American Journal of Educational Research*, 3(11), 1387–1397. DOI: 10.12691/education-3-11-7.
- Yaftian, N. (2015). The outlook of the Mathematicians' Creative Processes. *Procedia. Social and Behavioural Sciences*, 191, 2515–2519. Retrieved from <https://www.journals.elsevier.com/procedia-social-and-behavioral-sciences/special-issues>.
- Ziff, P. (1972). *Understanding*. Ithaca. London.

**Мойсеєнко Лідія, Шегда Любов. Трансформація розуміння творчих математичних задач у процесі їх розв'язання**

**АНОТАЦІЯ**

У статті розглянуто питання стосовно психологічної сутності, місця і ролі розуміння творчих математичних задач у процесі їх розв'язання.

За результатами досліджень математичного мислення констатовано його творчий характер та означено підхід до його вивчення шляхом аналізу процесу розв'язання творчих математичних задач різних класів.

Авторами виокремлено три складові процеси творчого математичного мислення: процес розуміння, процес прогнозування й апробаційний процес. Наголошено на паралельному перебігу цих складових процесів при розв'язанні творчих математичних задач.

В експерименті взяли участь 220 студентів технічного університету, проаналізовано 2200 процесів розв'язання творчих математичних задач.

Установлено, що процес розуміння творчої математичної задачі студентів проходить: упродовж усіх етапів розв'язання задач, за допомогою процедур упізнання старого в новому, прогнозування майбутнього чи минулого щодо об'єкта, який розуміється, об'єднання розрізних елементів у ціле, пояснення знайденого розв'язку.

Доведено, що процес розуміння творчої математичної задачі носить наскрізний характер: розуміння умови задачі має своє продовження при формуванні й апробації розв'язку в математичному пошуковому про-

цесі, а результати процесу розуміння задачі сприяють процесу прогнозування розв'язку й апробації мисленнєвих результатів.

Установлено, що у процесі розуміння математичної задачі стан розуміння, трансформуючись, набуває різних форм: розуміння-впізнання, розуміння-уподібнення, розуміння-прогнозування, розуміння-об'єднання, розуміння-пояснення.

З'ясовано, що функціонування певної форми розуміння не належить до певного класу задач, а є якісними станами розуміння будь-яких творчих математичних задач на певних етапах їх розв'язання.

**Ключові слова:** творче математичне мислення, процес розуміння, форми розуміння, розуміння-впізнання, розуміння-уподібнення, розуміння-прогнозування, розуміння-об'єднання, розуміння-пояснення.

**Мойсеєнко Лидія, Шегда Любовь. Трансформація розуміння творчих математических задач в процесі їх рішення**

## АННОТАЦІЯ

В статті розглянуто питання психологічної сутності, місця і ролі розуміння творчих математических задач в процесі їх рішення.

По результатам досліджень математического мислення констатировано його творчий характер і визначено підхід до його вивчення шляхом аналізу процесу рішення творчих математических задач різних класів.

Авторами виділено три складові частини процесу творческого математического мислення: процес розуміння, процес прогнозування і апробаційний процес. Акцентовано увагу на паралельному проходженні цих складових процесів при рішенні творчих математических задач.

В експерименті брало участь 220 студентів техніческого університета, проаналізовано 2200 процесів рішення творчих математических задач.

Установлено, що процес розуміння творчих математических задач студентів проходить: через всі етапи рішення задач, з допомогою процедур розуміння старого в новому, прогнозування будучого або минулого відносно розумімого об'єкта, об'єднання розрознених елементів в ціле, об'яснення знайденого рішення.

*Доказано, что процесс понимания творческой математической задачи имеет сквозной характер: понимание условия задачи имеет свое продолжение при формировании и апробации решения в математическом поисковом процессе, а результаты процесса понимания задачи содействуют процессу прогнозирования решения и апробации мыслительных результатов.*

*Установлено, что в процессе понимания математической задачи состояние понимания, трансформируясь, приобретает разные формы: понимание-узнавание, понимание-уподобление, понимание-прогнозирование, понимание-объединение и понимание-объяснение.*

*Определено, что функционирование определенной формы понимания не относится к определенному классу задач, а является качественным состоянием понимания любых творческих математических задач на определенном этапе их решения.*

**Ключевые слова:** *творческое математическое мышление, процесс понимания, формы понимания, понимание-узнавание, понимание-уподобление, понимание-прогнозирование, понимание-объединение, понимание-объяснение.*

Original manuscript received September 06, 2019

Revised manuscript accepted October 09, 2019