

[0000-0002-1644-7857] **М. В. Костенко**, аспірант,  
[0000-0001-6688-0942] **А. Є. Шевельова**, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
e-mail: shevelevaee@dnu.dp.ua  
[0009-0005-2150-1706] **І. Ю. Гергель**, канд. фіз.-мат. наук, доцент,  
[0000-0002-0432-629X] **В. В. Лобода**, д-р фіз.-мат. наук, професор  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010, Україна

**ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО БІМАТЕРІАЛУ  
З ДВОМА ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМИ ЕЛЕКТРИЧНО ЗАРЯДЖЕНИМИ  
МІЖФАЗНИМИ ТРІЩИНАМИ**

*В роботі розглянуто п'єзоелектричний композит, сформований із двох різнорідних п'єзоелектричних півплощин. Вважається, що на межі поділу матеріалів виникли дві електропровідні тріщини, які можуть мати довільну довжину і відстань між їх вершинами. Допускається також наявність електричного заряду на одній або обох тріщинах. Використано представлення електричних та механічних факторів через кусково-аналітичні функції. З їх використанням проблема зведена до задачі лінійного спряження, для якої представлений точний аналітичний розв'язок. Отримано вирази для механічних та електричних компонент на берегах тріщин та на частинах інтерфейсу поза тріщинами. Побудовано графіки залежності напружень та розкриття тріщин від довжини тріщин та їх сумарного заряду. Показано, що вплив сумарного електричного заряду на тріщині на її розкриття є більш суттєвим, ніж цей вплив на напруження.*

**Ключові слова:** *електрод, тріщина між двома матеріалами, аналітичний розв'язок, п'єзоелектричний композит.*

**Вступ.** Сучасні актуатори та інші електронні пристрої часто створюються з використанням тонкоплівкових електродів, розташованих між п'єзоелектричними шарами. Такі електроди зазвичай виготовляють із металевого порошку, провідних полімерів тощо. Вони не змінюють механічних властивостей матриць. Відшарування таких електродів може призвести до появи електрично провідних міжфазних тріщин. Отже, якщо актуатор має два електроди на межі розділу п'єзоелектричних матеріалів і вони обидва розшаровуються, то виникає проблема взаємодії двох електрично провідних тріщин, яка анонсована в цій статті. Цей факт підтверджує практичну важливість розглянутої проблеми.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Дослідженню пружно-деформівного стану тріщини між двома матеріалами присвячена значна кількість публікацій. Аналізу такої проблеми для випадку зосередженого навантаження на береги тріщини присвячена робота [1]. Значна увага приділялась дослідженню тріщин між двома п'єзоелектричними матеріалами. Зокрема, випадок антиплоского навантаження п'єзоелектричних композитів з

такими тріщинами досліджувався в роботах [2, 3]. При цьому в роботі [2] вивчалась взаємодія електрично провідної тріщини і електрода на межі поділу матеріалів, а в [3] проаналізований вплив напрямку поляризації п'єзоелектричного матеріалу на особливості реалізації моделі зони електричного насичення для електрично провідних тріщин у таких матеріалах. Тріщина між двома п'єзоелектричними матеріалами з однією електрично провідною і двома електрично провідними зонами досліджена в роботі [4].

Системи тріщин між двома п'єзоелектричними матеріалами з різними електричними умовами на їх берегах досліджувались у роботах [5-9]. Зокрема, у [5] метод сингулярних інтегральних рівнянь застосований до аналізу системи тріщин для п'єзоелектричного матеріалу у випадку плоскої задачі, а в [6] вивчалася система тріщин у п'єзоелектричному шарі. Періодичні системи тріщини між двома різнорідними матеріалами досліджувались у роботах [7] та [8] для п'єзоелектричного й ортотропного матеріалів, відповідно. Міжфазна тріщина типу III у п'єзоелектричному біматеріалі вивчалась у

статті [9] з використанням моделі зони електричного пробую берегів тріщини. Проблема зведена до розв'язання комбінованої крайової задачі лінійного спряження Діріхле-Рімана і визначення на основі цього розв'язку фізично реальних довжин зон пробую.

Поодинокі тріщини та системи колінеарних тріщин між двома квазікристалами розглянуто в роботі [10], а ще й з урахуванням п'єзоелектричного ефекту – в роботах [11-14]. При цьому в роботі [12] вивчалась одна тріщина, а в [11] – взаємодія двох міжфазних тріщин для випадку антиплоского навантаження. Змішані електричні граничні умови на берегах тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами під дією антиплоского механічного і плоского електричного навантажень досліджувались у роботі [13], а в статті [14] розглянуто частково роз'єднане кругове включення в одновимірному квазікристалічному матеріалі з п'єзоелектричним ефектом. Досліджено сингулярність у вершині включення та явно виведено коефіцієнти інтенсивності напружень у фононному та фазонному полях і в електричних зміщеннях.

Аналітичний розв'язок для п'єзоелектричного біматеріалу з двома електропроникними тріщинами на межі поділу різних компонент було одержано у роботі [15]. В той же час наразі відсутні результати досліджень стосовно взаємодії двох тріщин з електричними берегами при наявності ненульового сумарного заряду їх берегів.

**Метою дослідження** якраз і є аналітичне розв'язання проблеми взаємодії двох електропровідних тріщин між різнорідними п'єзоелектричними матеріалами. При цьому тріщини можуть мати довільну довжину і розташування на межі поділу матеріалів.

**Задачі дослідження** тісно пов'язані з метою дослідження і зводяться до наступного:

- сформулювати задачу лінійного спряження аналітичних функцій для опису сформульованої проблеми;
- побудувати аналітичний розв'язок зазначеної задачі, який має враховувати величину електричних зарядів на тріщинах,
- знайти аналітичні вирази для напружень поза тріщинами, а також їх розкриття і дослідити залежності цих факторів від взаємного розташування тріщин та рівнів їх електричних зарядів.

**Постановка задачі.** Розглянемо дві відкриті електропровідні тріщини  $c \leq x_1 \leq a$ ,  $b < x_1 < d$  на межі поділу двох п'єзоелектричних півпросторів  $x_3 > 0$  і  $x_3 < 0$ , фізичні характеристиками яких включають пружні  $c_{ij}$ , п'єзоелектричні  $e_{ij}$  та діелектричні  $\varepsilon_{ij}$  сталі [16]. Вважаємо, що вектор поперечної поляризації колінеарний осі  $x_3$  (рисунк 1). На нескінченності задані рівномірно розподілені нормальне  $\sigma_{33}^\infty$  та дотичне  $\sigma_{13}^\infty$  напруження, а також горизонтальна складова електричного поля  $E_1^\infty$ . Крім того, приймаємо, що на нескінченності діють також напруження  $(\sigma_{11}^\infty)_m$ , які забезпечують виконання умов зчеплення на межі двох середовищ. Тут і надалі індекси  $m=1, 2$  відносяться до верхнього та нижнього півпросторів, відповідно.



**Рисунок 1.** Відкриті електрично провідні тріщини  $c \leq x_1 \leq a$ ,  $b < x_1 < d$  на межі  $x_2 = 0$  поділу двох п'єзоелектричних матеріалів

Будемо вважати, що вектор  $\mathbf{P}^\infty = [\sigma_{33}^\infty, \tau_{13}^\infty, E_1^\infty]^T$  задає умови на нескінченності. Має місце також відсутність напружень та електричного поля на берегах тріщин і умови неперервності на іншій частині межі поділу матеріалів (біматеріального інтерфейсу).

Отже, граничні умови на різних частинах інтерфейсу мають вигляд

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)} = 0, \quad E_1^{(1)} = E_1^{(2)} = 0$$

для  $x_1 \in [c, a] \cup [b, d]$ ,  $x_1 \in [b, d]$ , (1)

$$\langle u_1(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle u_3(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle D_3(x_1, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle \sigma_{13}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle = 0$$

$$\text{для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}, \quad (2)$$

де вважається, що  $c < a < b < d$ ,  $\langle \cdot \rangle$  означає стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.

Вважаємо також, що ліва та права тріщини мають сумарний електричний заряд  $D_L$  та  $D_R$ , відповідно. Це означає, що

$$\int_c^a \langle D_3(x_1) \rangle dx_1 = D_L, \int_b^d \langle D_3(x_1) \rangle dx_1 = D_R. \quad (3)$$

Крім того, виконуються умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини

$$\int_c^a \langle u'_k(x_1) \rangle dx_1 = 0, \int_b^d \langle u'_k(x_1) \rangle dx_1 = 0 \quad k=1,3. \quad (4)$$

**Основні співвідношення для біматеріальної п'єзоелектричної області.** У роботі [17] для випадку плоскої деформації були отримані такі представлення компонент пружно-деформівного стану на межі поділу матеріалів:

$$ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j4}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (5)$$

$$t_{j1}\langle u'_1(x_1) \rangle + it_{j3}\langle u'_3(x_1) \rangle + t_{j4}\langle D_3(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) \quad (j=1,3,4), \quad (6)$$

де  $F_j(z)$  – функції, аналітичні в кожній півплощині.

Ці співвідношення забезпечують неперервність  $\sigma_{13}, \sigma_{33}$  і  $E_1$  на інтерфейсі.

Коефіцієнти в (5) є складовими матриці

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ir_{11} & 1 & ir_{14} \\ ir_{31} & 1 & ir_{34} \\ ir_{41} & 0 & i \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{де } r_{11} = \frac{s_{31}s_{44} - s_{34}s_{41}}{\delta(s_{11}s_{44} - s_{14}s_{41})}, \quad r_{14} = \frac{s_{11}s_{34} - s_{14}s_{31}}{\delta(s_{11}s_{44} - s_{14}s_{41})},$$

$$r_{31} = -r_{11}, \quad r_{34} = -r_{14}, \quad r_{41} = -\frac{s_{43}}{s_{13}} \text{ є всі дійсними.}$$

Крім того,

$$\delta^2 = \frac{s_{13}s_{41}s_{34} + s_{31}s_{43}s_{14} - s_{31}s_{13}s_{44} - s_{11}s_{34}s_{43}}{s_{33}(s_{11}s_{44} - s_{41}s_{14})} \quad \text{та-}$$

$$\text{кож є дійсним і } \gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1.$$

Коефіцієнти в (6) можна знайти через компоненти матриці

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS} \quad (8)$$

за формулами  $t_{j1} = T_{j1}$ ,  $t_{j3} = -iT_{j3}$ ,  $t_{j4} = T_{j4}$ .

Показано, що  $t_{jk}$  ( $j, k=1,3,4$ ) – дійсні і значення  $t_{43} = 0$ .

Коефіцієнти  $s_{ij}$  є складовими матриці

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & S_{14} \\ S_{31} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} is_{11} & s_{13} & is_{14} \\ s_{31} & is_{33} & s_{34} \\ is_{41} & s_{43} & is_{44} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

в якій  $s_{ij}$  дійсні і  $s_{31} = -s_{13}$ ,  $s_{41} = s_{14}$ ,  $s_{43} = -s_{34}$ .

Матриця  $\mathbf{S}$  визначається формулами  $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} (\bar{\mathbf{N}}^{(2)})^{-1} \mathbf{N}^{(1)}$ , в яких  $k=1, 2$  і

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1J}^{(k)} \\ a_{2J}^{(k)} \\ a_{3J}^{(k)} \\ b_{4J}^{(k)} \end{bmatrix}_{J=1,2,3,4}, \quad \mathbf{N}^{(k)} = \begin{bmatrix} b_{1J}^{(k)} \\ b_{2J}^{(k)} \\ b_{3J}^{(k)} \\ -a_{4J}^{(k)} \end{bmatrix}_{J=1,2,3,4} \quad (10)$$

Коефіцієнти  $a_{ij}^{(k)}$  і  $b_{ij}^{(k)}$  є компонентами матриць  $\mathbf{A}^{(k)}$  і  $\mathbf{B}^{(k)}$ , які визначені в [9].

**Формулювання та розв'язання задачі лінійного спряження.** Вибираючи в (5)  $j=1$  і задовольняючи граничним умовам на берегах тріщин, одержуємо

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0. \quad (11)$$

Беручи до уваги, що для  $x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}$  виконується співвідношення  $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1) = F_j(x_1)$ , з рівняння (5) отримуємо

$$(1 + \gamma_j) F_j(x_1) = ir_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3}\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j4}E_1^{(1)}(x_1, 0) \text{ при } x_1 \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Однак, оскільки функції  $F_j(z)$  аналітичні в усій площині, розрізаній вздовж  $[c, a] \cup [b, d]$ , з рівняння (12) отримуємо таку умову на нескінченності

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (13)$$

де

$$\mathcal{G}_k = (1 + \gamma_k), \quad (k=1,3), \quad \mathcal{G}_4 = 2, \quad \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}\sigma^\infty}{\mathcal{G}_j},$$

$$\tilde{\tau}_j = -\frac{1}{\mathcal{G}_j} (r_{j1}\tau^\infty + r_{j4}E^\infty).$$

Співвідношення (11) з умовою на нескінченності (13) при  $j=1$  є задачею Гільберта-Рімана, розв'язок якої будемо розшукувати у вигляді [18]:

$$F_1(z) = \frac{P(z)\omega(z)}{\sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)}}, \quad (14)$$

де  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1$ ,  $P(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$ ,

$$\omega(z) = \left( \frac{(z-c)(z-b)}{(z-a)(z-d)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad c_0, c_1, c_2 - \text{довільні}$$

константи, що визначаються з рівняння (13), з умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин та з використанням величини сумарного заряду на тріщині.

Інтегруючи (6) по кожній із тріщин і враховуючи (3) та (4), отримуємо

$$\int_c^a \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = t_{14} D_L, \\ \int_b^d \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = t_{14} D_R. \quad (15)$$

Враховуючи, що  $F_1^-(x_1) = -\gamma_1^{-1} F_1^+(x_1)$  і підставляючи (14) в (15), одержуємо

$$\int_c^a \frac{P(t)}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \omega(t) dt = -\tilde{D}_L, \quad (16)$$

$$\int_b^d \frac{P(t)}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \omega(t) dt = \tilde{D}_R, \quad (17)$$

де  $\tilde{D}_L = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} t_{14} D_L$ ,  $\tilde{D}_R = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} t_{14} D_R$ .

Ці співвідношення можна представити у вигляді:

$$c_0 I_2 + c_1 I_1 + c_2 I_0 = \tilde{D}_L, \\ c_0 \tilde{I}_2 + c_1 \tilde{I}_1 + c_2 \tilde{I}_0 = \tilde{D}_R, \quad (18)$$

де

$$I_k = \int_c^a R(t) dt, \quad \tilde{I}_k = \int_b^d R(t) dt, \quad (19)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left[ \frac{(1 + \gamma_1) P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(x_1 - d)}} \omega(x_1) \right], \quad x_1 > d \cup x_1 < -c \\ -\text{Re} \left[ \frac{(1 + \gamma_1) P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(x_1 - d)}} \omega(x_1) \right], \quad a < x_1 < b \end{array} \right\}, \quad (22)$$

$$\langle u_3'(x_1, 0) \rangle = \frac{1 + \gamma_1}{t_{13} \sqrt{\gamma_1}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{Re}[P(x_1)] \cos[\alpha_1(x_1)] - \text{Im}[P(x_1)] \sin[\alpha_1(x_1)]}{\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)(b - x_1)(d - x_1)}}, \quad x_1 \in (c, a) \\ -\frac{\text{Re}[P(x_1)] \cos[\alpha_2(x_1)] + \text{Im}[P(x_1)] \sin[\alpha_2(x_1)]}{\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)(b - x_1)(d - x_1)}}, \quad x_1 \in (b, d) \end{array} \right\}, \quad (23)$$

$$R(t) = \frac{t^k \omega(t)}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}}.$$

Розкладаючи функцію  $F_1(z)$  в ряд при  $z \rightarrow \infty$  і розглядаючи коефіцієнт цього розкладення при  $z^0$ , з рівняння (13) одержуємо:

$$c_0 = \tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1. \quad (20)$$

Із системи (18) знаходимо

$$c_1 = [c_0(\tilde{I}_2 I_0 - I_2 \tilde{I}_0) - \tilde{D}_R I_0 + \tilde{D}_L \tilde{I}_0] / D, \\ c_2 = [c_0(\tilde{I}_1 I_2 - I_1 \tilde{I}_2) - \tilde{D}_L \tilde{I}_1 + \tilde{D}_R I_1] / D, \quad (21)$$

де  $D = I_1 \tilde{I}_0 - \tilde{I}_1 I_0$ .

**Нормальне напруження поза тріщиною.** Враховуючи, що

$F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$  для  $x_1 \notin [c, a]$  і  $x_1 \notin [b, d]$ , на основі формули (5) одержуємо

$$ir_{j1} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) + r_{j3} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + \\ + ir_{j4} E_1^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_j) F_j^+(x_1) \quad (j = 1, 3, 4).$$

З цієї формули, враховуючи, що  $r_{13} = 1$ , для  $j = 1$  одержуємо представлення (22) для  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) \text{Re}[F_1^+(x_1)]$ .

**Розкриття тріщин.** На основі формули (6) маємо

$$t_{13} \langle u_3'(x_1, 0) \rangle = \text{Im}[F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1)].$$

Враховуючи далі співвідношення  $F_1^-(x_1) = -\frac{1}{\gamma_1} F_1^+(x_1)$  для  $x_1 \in [c, a] \cup [b, d]$ ,

яке впливає з (11), рівність  $(-1)^{i\varepsilon_1} = \sqrt{\gamma_1}$  та формулу (14), одержуємо представлення (23) для  $\langle u_3'(x_1, 0) \rangle$ .

$$\text{де } \alpha_1(x_1) = \varepsilon_1 \ln \left( \frac{(x_1 - c)(b - x_1)}{(d - x_1)(a - x_1)} \right), \quad \alpha_2(x_1) = \left[ \varepsilon_1 \ln \left( \frac{(x_1 - c)(x_1 - b)}{(d - x_1)(x_1 - a)} \right) \right].$$

**Результати досліджень.** Розв’язки, що знайдені в попередніх розділах, представляються досить простими аналітичними формулами. Завдяки цьому чисельний аналіз полягає лише в графічній ілюстрації цих формул. Для його проведення використовувались різні довжини тріщин та відстані між

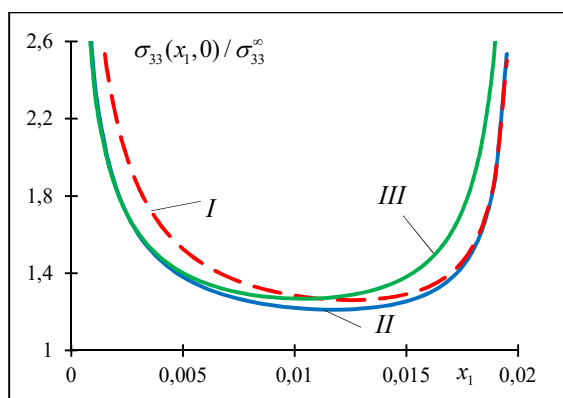
ними, різні механічні та електричні навантаження.

Розглядався біматеріал, складений з п’єзоелектричних компонент PZT-4 (верхній) та PZT-5H (нижній). Механічні, п’єзоелектричні та діелектричні константи цих матеріалів наведені в таблиці 1.

Таблиця 1. Фізичні константи п’єзоелектричних матеріалів PZT-4 та PZT-5H

Матеріал	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{15}$	$e_{13}$	$e_{33}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{33}$
	$10^{10} \text{ Па}$				$\text{Кл} / \text{м}^2$			$10^{-10} \cdot \text{Кл} / (\text{В} \cdot \text{м})$		
PZT-4	13.9	7.78	7.43	11.3	2.56	13.4	-6.98	13.8	60	54.7
PZT-5H	12.6	5.5	5.3	11.7	3.53	17	-6.50	23.3	151	130

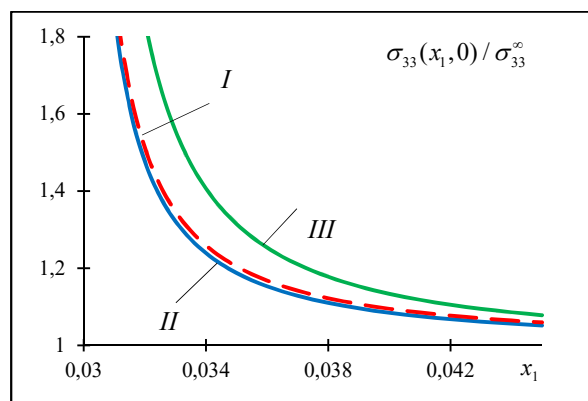
На рисунку 2 зображено графіки зміни нормального напруження  $\sigma_{33}(x_1, 0) / \sigma_{33}^\infty$  на проміжку між вершинами тріщин  $a = 0$  і  $b = 0.02 \text{ м}$  для  $\sigma_{33}^\infty = 10^7 \text{ Па}$ ,  $\sigma_{13}^\infty = 0$ ,  $c = -0.02 \text{ м}$ ,  $d = 0.03 \text{ м}$  та різних значень сумарного електричного заряду на тріщинах. Лінія I відповідає  $D_L = D_R = 0$ , лінія II –  $D_L = 3 \times 10^{-3} \text{ Кл} / \text{м}$ ,  $D_R = 0$  і III –  $D_L = 0$ ,  $D_R = 3 \times 10^{-3} \text{ Кл} / \text{м}$ .



Рисунку 2. Варіація нормального напруження  $\sigma_{33}(x_1, 0) / \sigma_{33}^\infty$  на проміжку між вершинами тріщин

На рисунку 3 зображено графіки зміни нормального напруження  $\sigma_{33}(x_1, 0) / \sigma_{33}^\infty$  на продовженні правої вершини тріщини  $[b, d]$ . Координати вершин тріщин, навантаження і

позначення кривих – ті самі, що і на рисунку 2.

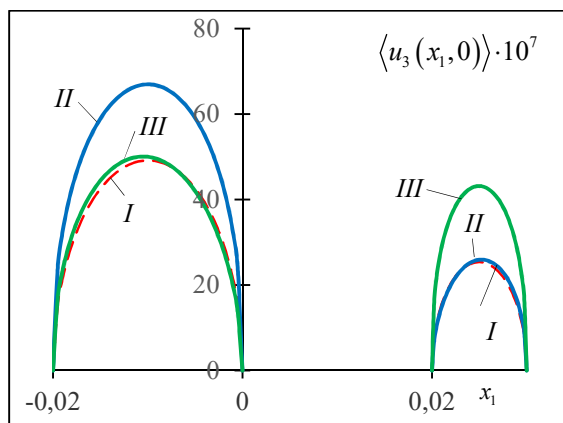


Рисунку 3. Зміна нормального напруження  $\sigma_{33}(x_1, 0) / \sigma_{33}^\infty$  на продовженні правої тріщини

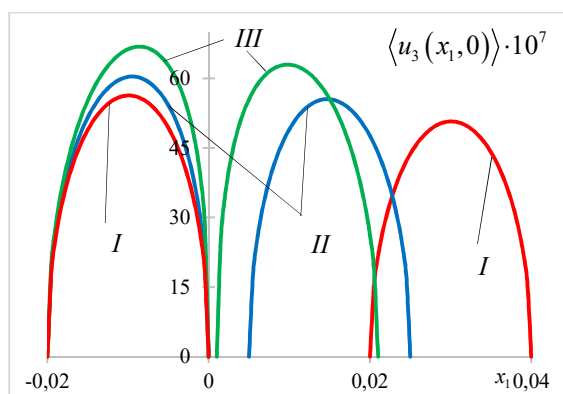
На рисунку 4 зображено графіки розкриття тріщин, отримані при тих самих значеннях координат вершин тріщин і навантажень, що й на двох попередніх рисунках. Навантаження і позначення кривих – ті самі, що й на рисунку 2. Лінію I побудовано для  $D_L = D_R = 0$ , II – для  $D_L = 3 \times 10^{-3} \text{ Кл} / \text{м}$ ,  $D_R = 0$  і III – для  $D_L = 0$ ,  $D_R = 3 \times 10^{-3} \text{ Кл} / \text{м}$ .

На рисунку 5 зображено графіки розкриття тріщин, отримані при  $\sigma_{33}^\infty = 10^7 \text{ Па}$ ,  $\sigma_{13}^\infty = 0$ ,  $D_L = 1 \times 10^{-3} \text{ Кл} / \text{м}$ ,  $D_R = 0$  та різних відстанях між тріщинами. Всі лінії побудовано для  $c = -0.02 \text{ м}$ ,  $a = 0$  і довжини правої тріщини, рівної  $0.02 \text{ м}$ . При цьому положен-

ня точки  $b$  варіювалось і вибиралось рівним  $0.02$  м (лінія I),  $0.005$  м (II) і  $0.001$  м (III).



**Рисунок 4.** Зміна розкриття тріщин  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$  при  $a = 0$  і  $b = 0.02$  м,  $c = -0.02$  м,  $d = 0.03$  м,  $\sigma_{33}^{\infty} = 10^6$  Па,  $\sigma_{13}^{\infty} = 0$  для різних значень заряду на тріщині



**Рисунок 5.** Зміна розкриття тріщин  $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$  для різних відстаней між тріщинами

**Обговорення результатів.** З результатів, зображених на рисунках 2, 3, випливає, що величини напружень різко зростають при підході до вершин тріщини. Така поведінка добре узгоджується із формулами (22), з яких очевидно, що напруження мають кореневу особливість у вершинах тріщин. Причому у цьому випадку ця особливість є ще й осцилюючою. Але осциляція проявляється тільки в дуже малих околах тріщин і не впливає на зростання напружень при підходах до їх вершин. Крім того, видно, що електричний заряд на тріщині має вплив на напруження в околі тріщини. Однак цей вплив проявляється при досить великих значеннях електричного заряду, причому найбільш суттєвий вплив має міс-

це в околі тих тріщин, на яких відбувається зміна заряду.

З рисунка 4 видно, що вплив сумарного електричного заряду на тріщині на її розкриття є більш суттєвим, ніж цей вплив на напруження. Зокрема, збільшення величини електричного заряду приводить до збільшення розкриття тріщин. При цьому видно, що значна відмінність у розкриттях проявляється для тих тріщин, на яких має місце збільшення або зменшення сумарного заряду (див. криві II і III).

Рисунок 5 ілюструє зміну розкриття тріщин при зміні відстані між ними. Видно, що для досить віддалених тріщин (криві I) розкриття є найменшим. Це розкриття збільшується при зближенні тріщин (криві II і III). До того ж, при дуже малій відстані між тріщинами розкриття перестають бути симетричними відносно своїх середніх точок, а незначно зближуються у їх верхніх частинах (крива III).

**Висновки.** Розглянуто дві електропровідні тріщини на межі поділу п'єзоелектричних матеріалів, тобто вважається, що їх береги покриті дуже тонким електродним шаром, який не впливає на механічні характеристики. Тріщини можуть мати довільні довжини і можуть бути довільним чином розташованими на інтерфейсі. Така задача є **новою** і раніше не розглядалась. Її аналітичний розв'язок вдалось побудувати завдяки використанню представлень (5), (6) електромеханічних факторів через кусково-аналітичну вектор-функцію та зведенню проблеми до задачі лінійного спряження. Одержано точний розв'язок цієї задачі у вигляді досить простих аналітичних формул. При цьому вперше враховано електричний заряд на тріщинах, що має суттєве практичне значення. Крім того, **практичне значення** одержаних аналітичних результатів полягає в можливості їх використання як еталонних при проведенні експериментальних досліджень чи розробці та апробації чисельних методів для тіл кінцевих розмірів за проблематикою цієї роботи.

Отримано формули для розкриття тріщин, а також для напружень поза тріщинами. Проведено чисельну ілюстрацію отриманих розв'язків. Зокрема, показано залежність розкриття тріщин від величини електричного заряду на тріщині. Встановлено, що найбільш суттєвий вплив електричного заряду на напруження та розкриття проявляється в околі тих тріщин, на яких відбувається зміна заряду.

Проведене дослідження та розроблена аналітична методика відкривають **перспективи подальших досліджень** систем міжфазних тріщин з різними електричними умовами на їх берегах, зокрема міжфазних тріщин з урахуванням електричної проникності їх заповнювача.

### Список використаних джерел

- [1] А. С. Шевельова, "Про моделювання привершинних зон тріщини між двома анізотропними матеріалами при дії зосереджених сил", *Вісник Дніпропетровського університету, Серія: Механіка*, т. 22, № 5, вип. 18 (2), с. 196-206, 2014.
- [2] О. Onopriienko, V. Loboda, A. Sheveleva, and Y. Lapusta, "Interaction of a conductive crack and of an electrode at a piezoelectric bimaterial interface", *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 346, pp. 449-459, 2018.
- [3] P. R. Verma, and R. R. Verma, "Poling angle effect on two mode-III semi-permeable collinear cracks in a piezoelectric strip: Strip-saturation model", *Appl. Math. Modelling*, vol. 88, pp. 573-588, 2020.
- [4] V. Govorukha, M. Kamlah, and S. Zhao, "An interface crack in piezoelectric bimaterial with one electrically conductive and two electrically permeable zones at its faces", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 17 (5), pp. 455-468, 2022.
- [5] T. Cao, X. Feng, and T. Qin, "Analysis for multiple cracks in 2d piezoelectric bimaterial using the singular integral equation method", *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 35, pp. 261-272, 2022.
- [6] A. H. Fartash, M. Ayatollahi, and R. Bagheri, "Transient response of dissimilar piezoelectric layers with multiple interacting interface cracks", *Appl. Math. Modelling*, vol. 66, pp. 508-526, 2019.
- [7] P. Pei, G. Yang, Y. Shi, and C.-F. Gao, "Periodic interfacial cracks in dissimilar piezoelectric materials under the influence of Maxwell stress", *Meccanica*, vol. 55, pp. 113-124, 2020.
- [8] A. Tafreshi, "Analytical stress intensity factors and Jk-integrals of periodic and collinear interface cracks between dissimilar orthotropic materials", *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 44, pp. 317-332, 2021.
- [9] V. Govorukha, and M. Kamlah, "Analysis of a mode III interface crack in a piezoelectric bimaterial based on the dielectric breakdown model", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 90 (5), pp. 1201-1213, 2020.
- [10] H. Y. Dang, S. Y. Lv, C. Y. Fan, C. Lu, J. L. Ren, and M. H. Zhao, "Analysis of anti-plane interface cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystal coating", *Appl. Math. Modelling*, vol. 81, pp. 641-652, 2020.
- [11] K. Q. Hu, C-F. Gao, Z. Zhong, and Z. T. Chen, "Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals", *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 101, p. e202000360, 2021.
- [12] K. Q. Hu, H. Jin, Z. Yang, and X. Chen, "Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect", *Acta Mech.*, vol. 230, pp. 2455-2474, 2019.
- [13] V. Loboda, A. Sheveleva, O. Komarov, and Y. Lapusta, "An interface crack with mixed electrical conditions at its faces in 1D quasicrystal with piezoelectric effect", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 29, iss. 23, pp. 3334-3344, 2022.
- [14] K. Q. Hu, S. A. Meguid, Z. Zhong, and C.-F. Gao, "Partially debonded circular inclusion in one-dimensional quasicrystal material with piezoelectric effect", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, vol. 16, pp. 749-766, 2020.
- [15] М. В. Костенко, В. Б. Сіліч-Балгабаєва, А. С. Шевельова, та В. В. Лобода, "Плоска деформація п'єзоелектричного біматеріалу з двома електропроникними тріщинами на межі поділу різних компонент", *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій*, вип. 34, т. 1, с. 59-70, 2022.
- [16] В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, и Н. А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т., т. 5, Электроупругость*, Гузь А. Н., Ред. Киев, Украина: Наукова думка, 1989.
- [17] V. Loboda, A. Sheveleva, and Y. Lapusta, "An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric biomaterial", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 51, pp. 63-73, 2014.
- [18] Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва: Наука, 1966.

## References

- [1] A. E. Sheveleva, "On the modeling of the near crack tip zones between two anisotropic materials under the action of concentrated forces", *Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu, Seriya: Mekhanika*, vol. 22, no. 5, iss. 18 (2), pp. 196-206, 2014 [in Ukrainian].
- [2] O. Onopriienko, V. Loboda, A. Sheveleva, and Y. Lapusta, "Interaction of a conductive crack and of an electrode at a piezoelectric bimaterial interface", *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 346, pp. 449-459, 2018.
- [3] P. R. Verma, and R. R. Verma, "Poling angle effect on two mode-III semi-permeable collinear cracks in a piezoelectric strip: Strip-saturation model", *Appl. Math. Modelling*, vol. 88, pp. 573-588, 2020.
- [4] V. Govorukha, M. Kamlah, and S. Zhao, "An interface crack in piezoelectric bimaterial with one electrically conductive and two electrically permeable zones at its faces", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 17 (5), pp. 455-468, 2022.
- [5] T. Cao, X. Feng, and T. Qin, "Analysis for multiple cracks in 2d piezoelectric bimaterial using the singular integral equation method", *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 35, pp. 261-272, 2022.
- [6] A. H. Fartash, M. Ayatollahi, and R. Bagheri, "Transient response of dissimilar piezoelectric layers with multiple interacting interface cracks", *Appl. Math. Modelling*, vol. 66, pp. 508-526, 2019.
- [7] P. Pei, G. Yang, Y. Shi, and C.-F. Gao, "Periodic interfacial cracks in dissimilar piezoelectric materials under the influence of Maxwell stress", *Meccanica*, vol. 55, pp. 113-124, 2020.
- [8] A. Tafreshi, "Analytical stress intensity factors and Jk-integrals of periodic and collinear interface cracks between dissimilar orthotropic materials", *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 44, pp. 317-332, 2021.
- [9] V. Govorukha, and M. Kamlah, "Analysis of a mode III interface crack in a piezoelectric bimaterial based on the dielectric breakdown model", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 90 (5), pp. 1201-1213, 2020.
- [10] H. Y. Dang, S. Y. Lv, C. Y. Fan, C. Lu, J. L. Ren, and M. H. Zhao, "Analysis of anti-plane interface cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystal coating", *Appl. Math. Modelling*, vol. 81, pp. 641-652, 2020.
- [11] K. Q. Hu, C-F. Gao, Z. Zhong, and Z. T. Chen, "Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals", *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 101, p. e202000360, 2021.
- [12] K. Q. Hu, H. Jin, Z. Yang, and X. Chen, "Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect", *Acta Mech.*, vol. 230, pp. 2455-2474, 2019.
- [13] V. Loboda, A. Sheveleva, O. Komarov, and Y. Lapusta, "An interface crack with mixed electrical conditions at its faces in 1D quasicrystal with piezoelectric effect", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 29, iss. 23, pp. 3334-3344, 2022.
- [14] K. Q. Hu, S. A. Meguid, Z. Zhong, and C.-F. Gao, "Partially debonded circular inclusion in one-dimensional quasicrystal material with piezoelectric effect", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, vol. 16, pp. 749-766, 2020.
- [15] M. V. Kostenko, V. B. Silich-Balhabaieva, A. E. Sheveleva, and V. V. Loboda, "Plane deformation of piezoelectric bimaterial with two electrically permeable cracks on the interface of different components", *Problemy obchysluvalnoi mekhaniky ta mitsnosti konstruktivii*, iss. 34, vol. 1, pp. 59-70, 2022.
- [16] V. T. Grinchenko, A. F. Ulitko, and N. A. Shulga, *Mechanics of coupled fields in structural elements: in 5 vol.*, vol. 5, Electroelasticity, Guz A. N., Ed. Kiev, Ukraine: Naukova dumka, 1989 [in Russian].
- [17] V. Loboda, A. Sheveleva, and Y. Lapusta, "An electrically conducting interface crack with a contact zone in a piezoelectric bi-material", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 51, pp. 63-73, 2014.
- [18] N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Moscow, Russia: Nauka, 1966 [in Russian].

**M. V. Kostenko**, *Postgraduate Student*,  
**A. E. Sheveleva**, *Dr. Phys.-Math. Sc., Professor*,  
e-mail: shevelevaae@dnu.dp.ua  
**I. Yu. Gergel**, *Ph. D., Associate Professor*,  
**V. V. Loboda**, *Dr. Phys.-Math. Sc., Professor*  
Oles Honchar Dnipro National University  
Gagarina ave., 72, Dnipro, 49010, Ukraine

## PLANE DEFORMATION OF A PIEZOELECTRIC BIMATERIAL WITH TWO ELECTRICALLY CONDUCTIVE AND CHARGED INTERFACE CRACKS

*The paper considers a piezoelectric composite formed from two heterogeneous piezoelectric half-planes, on the border of which electrically conductive cracks are arbitrarily located. Consideration of such a problem is approved by the fact that modern actuators and other electronic devices are often created using thin-film electrodes located between piezoelectric layers. Such electrodes are usually made of metal powder, conductive polymers, etc. They do not change the mechanical properties of matrices. Peeling of such electrodes can lead to the appearance of electrically conductive interfacial cracks. So, if the actuator has two electrodes at the interface of piezoelectric materials and they both delaminate, then the problem of the interaction of two electrically conductive cracks arises, which is considered in this paper. The presence of an electric charge on one or both cracks is also allowed. Such a situation can occur if the electroded crack surfaces are connected to electrical sources. Representations of electrical and mechanical factors through piecewise analytical functions have been used for the solution. With their use, the problem is reduced to the problem of linear conjugation. An exact analytical solution of this problem is presented, which indicates the presence of oscillating root singularities near the crack tips. The expressions for mechanical and electrical components on the crack faces and on the parts of the interface outside the cracks are derived. In particular, quite simple analytical formulas for the stresses at the interface of materials between cracks and outside of them have been obtained. Formulas for the displacement jumps along the crack region (crack opening) have been also found. The last formulas clearly show the oscillating nature of the specified factors when approaching the crack tips. A numerical illustration of the obtained solutions is carried out. In particular, graphs of stress and crack opening dependences along the crack lengths and on their total charge have been constructed. It is shown that the effect of the total electric charge on the crack along its opening is more significant than this effect on stresses.*

**Keywords:** *electrode, crack between two materials, analytical solution, piezoelectric composite.*

*Стаття надійшла 14.04.2023*

*Прийнято 07.05.2023*