

УДК 539.12; 537.8

Ю.В. Волкотруб, І.В. Шарф, В.Д. Русов, Н.О. Чудак, О.С. Потієнко, Д.А. Пташинський, К.К. Меркотан, А.Н. Тихонов, М.А. Делієргієв, В.В. Урбаневич, Ю.В. Шабатура

Одеський національний політехнічний університет, проспект Шевченка, 1, Одеса, 65044  
e-mail: volkotrub\_yura@mail.ru

## МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ МОНТЕ-КАРЛО-ГЕНЕРАТОРІВ ПРОЦЕСІВ РОЗСІЮВАННЯ

У даній роботі запропоновано на основі методу Лапласа, який застосовується для розрахунків перерізів непружного розсіяння і механізмів зростання перерізів, побудувати Монте-Карло-генератор процесу непружного розсіяння адронів, на даний момент в модельній теорії «фі-3». В роботі вдалось продемонструвати можливість застосування методу. В результаті була написана програма Монте-Карло-генератор, яка дала результати, що на якісному рівні співпадають з експериментальними.

**Ключові слова:** модель «фі-3», Монте-Карло-генератори, амплітуда розсіяння, процеси розсіяння, теорія збурень, фейнманівські діаграми, метод Лапласа.

### Вступ

Сучасні Монте-Карло-генератори – це системи автоматичних розрахунків деревних і петлевих діаграм Фейнмана, інтегрування по багатовимірному фазовому простору, генерації подій для колайдерів нового покоління ЛНС та ІЛС. Для усвідомленого порівняння експериментальних даних з передбаченнями теоретичних моделей необхідний точний розрахунок.

На теперішній час існують безліч результатів з пружних і непружних процесів розсіювання. Для теоретичного опису цих процесів використовують розрахунок пружного процесу, а за допомогою оптичної теореми розраховують вклад непружних процесів. Обумовлено це тим, що розрахунок непружних перерізів дуже складний за рахунок фізичної області інтегрування, яка є нелінійною.

Також з експериментальних даних відомо, що основний вклад у переріз вносять непружні процеси, які володіють більш детальною характеристикою усього процесу розсіяння [1]. В рамках моделі «фі-3» при застосуванні методу Лапласа [2] були вирішені проблеми, пов'язані з розрахунком непружних перерізів і на якісному рівні були відтворені

експериментальні графіки протон-протонного розсіяння. Застосувати метод Лапласа було можливо на тій підставі, що амплітуда непружного розсіяння має точку умовного максимуму.

Сучасні програми-генератори, призначені для розрахунку матричних елементів розпаду елементарних частинок чи їх розсіяння при високих енергіях, також застосовуються для розрахунку повних перерізів розсіяння в нижчому порядку теорії збурень та для побудови різних кінематичних розподілів (за псевдобистротами чи поперечними імпульсами) процесів з кількома частинками в кінцевому стані.

У світі проблему з розрахунком амплітуди розсіяння та перерізів розсіяння розв'язують, застосовуючи феноменологічну багатореджеонну модель [3,4]. На основі даної моделі також розраховують діаграми з великим числом ліній (повні набори деревних діаграм), що дає змогу згенерувати число частинок у кінцевому стані. Але дана модель має ряд недоліків [3,4] при розрахунку амплітуди розсіювання та перерізів розсіювання, і не в змозі пояснити поведінку непружних процесів.

Наприклад, програма CompHER, призначена для розрахунку матричних елементів матриці розсіяння і застосовується для розрахунку повних перерізів розсіяння, побудована по даній моделі і не має змоги згенерувати величини для побудови кінематичних розподілів для процесів з достатньою кількістю частинок (не більше 10 частинок) [5-7].

Експерименти на сучасних і майбутніх колайдерах неможливі без детального моделювання очікуваних в їх детекторах фізичних процесів. І тому Монте-Карло-генератори відіграють велику роль при розгляді процесів розсіяння.

### Проблеми, пов'язані з написанням генераторів

Всі розрахунки в квантовій теорії поля ведуться на основі теорії збурень, квантові ефекти в якій представляються схематично у вигляді наборів діаграм Фейнмана. Фізичні процеси розсіяння і розпаду розраховуються в точці з'єднання вершин і пропагаторів можливими способами [8], щоб одержати потрібні початкові і кінцеві стани. Порядок теорії збурень визначається числом вершин у вищевказаних зв'язках. Через те, що виникає велике число вершин, то це призводить до великого числа частинок в кінцевому стані.

Тому при розгляді процесів непружного розсіяння в межах теорії збурень маємо такі технічні проблеми з розрахунком:

- амплітуди розсіювання;
- багатовимірний інтеграл, що виражає переріз розсіювання через квадрат модуля амплітуди розсіювання;
- з генеруванням багатовимірної зкорельованої величини, яка пов'язана з квадратом модуля розсіяння та дельта-функції

$$\delta\left(P_1 + P_2 - \left(P_3 + P_4 + \sum_{b=1}^n p_b\right)\right) |T(n, p_1, \dots, p_n, P_1, P_2, P_3, P_4)|^2 \quad (1)$$

де  $|T(n, p_1, \dots, p_n, P_1, P_2, P_3, P_4)|^2 \equiv |T|^2$  – квадрат модуля амплітуди розсіяння,

$\delta\left(P_1 + P_2 - \left(P_3 + P_4 + \sum_{b=1}^n p_b\right)\right)$  – 4-вимірна дельта-функція, яка враховує закони збереження енергії-імпульсу та масової поверхні всіх частинок в результаті їх взаємодії. Під  $P_1, P_2, P_3, P_4, p_1, \dots, p_n$  – розуміють 4 імпульси вхідних і вихідних протонів та вторинних частинок (піонів) відповідно. Тому формула (1) визначає частоту появи події в різних точках фазового простору.

Основна проблема при написанні генератора полягає в багатовимірності фазового простору, що аналогічний фазовому об'єму і задається великою кількістю змінних. Якщо бажаємо згенерувати величину, що потрапляє в одну з комірок цього фазового простору, то потрібно врахувати те, що дана величина пов'язана з іншими величинами через 4-вимірну дельта-функцію, що робить її складною та багатовимірною. Ясно, що генерування такої величини головним чином є проблема комп'ютера; пояснимо це на прикладі. В результаті непружного розсіяння в рамках моделі «фі-3», крім двох вихідних частинок (протонів), виникають ще  $n$  вторинних частинок (піони), тобто  $n+2$  частинок. Кажучи про стан системи  $n+2$  частинок, ми задаємо їх 4-імпульси. Оскільки енергії всіх частинок в кінцевому стані можуть бути виражені через їх імпульси за допомогою масової поверхні, то для  $n+2$  частинок (рис. 1) ми маємо  $3(n+2)$  компонент імпульсів цих частинок, а тому фазовий простір буде  $3(n+2)$  – вимірним.

Розглядаючи процес розсіяння в системі центра мас первинних частинок (рис. 2), ми задані 4-імпульси частинок виражаємо через величину  $X_b$ , тобто:

$$\begin{aligned} y_1, \dots, y_n &\rightarrow X_1, \dots, X_n \\ p_{1,x}, \dots, p_{n,x} &\rightarrow X_{n+1}, \dots, X_{2n} \\ p_{1,y}, \dots, p_{n,y} &\rightarrow X_{2n+1}, \dots, X_{3n} \\ P_x^a &\rightarrow X_{3n+1} \\ P_y^a &\rightarrow X_{3n+2} \end{aligned} \quad (2)$$

де  $y_n, p_{n,x}, p_{n,y}, P_x^a = \frac{P_{3,x} - P_{4,x}}{2}, P_y^a = \frac{P_{3,y} - P_{4,y}}{2}$  -

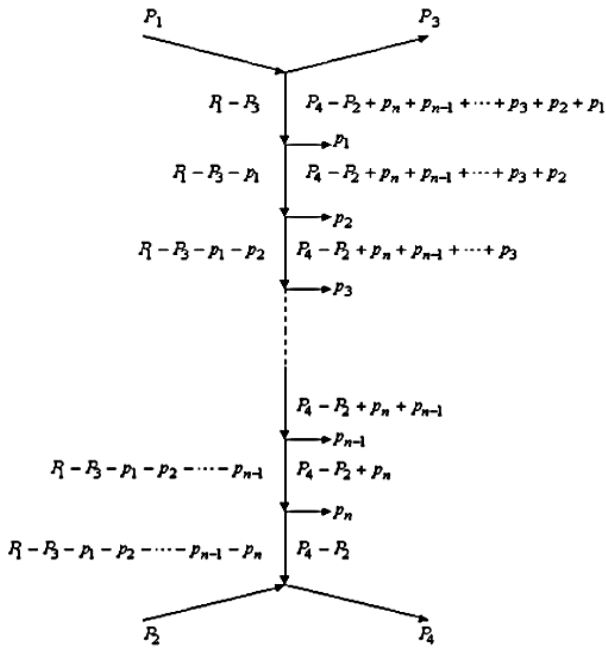


Рис. 1. Фейнманівська діаграма непружного процесу розсіювання з утворенням  $n$  вторинних частинок.

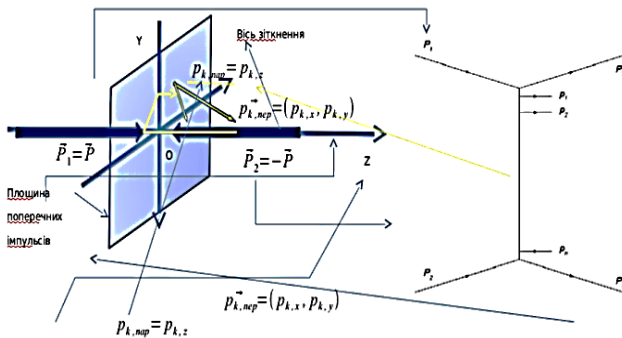


Рис. 2 Процес розсіювання в системі центра мас первинних частинок

бистроти вторинних частинок,  $x, y$  - компоненти поперечних імпульсів вторинних частинок, симетрична та антисиметрична компоненти імпульсів вихідних частинок, виражених через масову поверхню. Повздовжні і поперечні компоненти імпульсів вторинних частинок виразили із умов масової поверхні (в системі одиниць, де  $c=1$ ) через бистроти:

$$(p_b^0)^2 - (p_{b,\square})^2 - (p_{b,\perp})^2 = m^2 \quad (3)$$

$$(p_b^0)^2 - (p_{b,\square})^2 = m^2 + (p_{b,\perp})^2 \equiv m_\perp^2(p_{b,\perp}) \quad (4)$$

$$p_b^0 = m_\perp(p_\perp)ch(y_b) \quad (5)$$

$$p_{b,\square} = m_\perp(p_\perp)sh(y_b) \quad (6)$$

Дана величина  $X_b$  має для нас важливе значення, так як нашим завданням є отримати за допомогою генератора масив згенерованих значень бистрот частинок в кінцевому стані. Величина  $X_b$  є багатовимірною і скорельваною через закон збереження енергії-імпульсу, масову поверхню та квадрат модуля амплітуди розсіяння.

Якщо будемо розбивати по кожній змінній на 10 відрізків, то даний простір буде містити в собі  $10^{3(n+2)}$  комірок. Тоді потрібно врахувати, що величина, яка відповідає кожній окремо взятій комірці фазового простору, з'являлась відносно число разів згідно квадрату модуля амплітуди розсіяння, яка сама також залежить від цих  $3(n+2)$  величин. У цьому і полягає проблема затрат великого обсягу пам'яті комп'ютера і часу.

Отже, з сучасними генераторами подій пов'язана проблема генерування багатовимірної скорельваної величини (4-імпульсів частинок в кінцевого стану) при фіксованій кількості вторинних частинок. Бо якщо ми можемо згенерувати величину при тій кількості частинок, що спостерігається в експерименті, ми зможемо отримати, наприклад, якісний розподіл інклюзивних перерізів по бистротам чи поперечним імпульсам. І це дає змогу отримати більшу інформацію про процес розсіяння, так як в результаті непружного розсіяння можуть виникати сотні, а то і тисячі частинок, які дають великий вклад в переріз.

### Застосування методу Лапласа для побудови Монте-Карло-генератора

Для генерації кількості частинок потрібно реалізувати розрахунок перерізів розсіяння, щоб мати змогу визначити частоту появи то чи іншої кількості вторинних частинок.

Вираз для перерізу розсіювання має вигляд:

$$\sigma_n = \frac{1}{(2\pi)^5 4n! l} \sum_{P(i_1, i_2, \dots, i_n)} \int \frac{d\vec{p}_a}{2P_{3,0}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{d\vec{P}_a}{2P_{a,0}} \prod_{a=1}^n \frac{d\vec{p}_a}{2p_{a,0}} \delta(P_i - P_f) \times \\ & \times a(P_1, \dots, P_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \times \\ & \times a^*(P_1, \dots, P_n, p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}). \end{aligned} \quad (7)$$

Амплітуда розсіювання в загальному випадку є функцією *не симетричною* відносно перестановок своїх аргументів.

З правого боку діаграми (рис. 1) бачимо пронумеровані та упорядковані лінії, що відповідають вторинним частинкам. З'єднаємо ці лінії з аналогічним чином пронумерованими вершинами діаграми. Тобто  $p_1 \rightarrow 1, p_2 \rightarrow 2, p_3 \rightarrow 3, \dots, p_n \rightarrow n$ .

Кожний доданок виразу (7) будемо називати інтерференційним внеском в парціальний переріз непружного розсіювання, його можна представити за допомогою *розрізаних діаграм* (рис. 3).

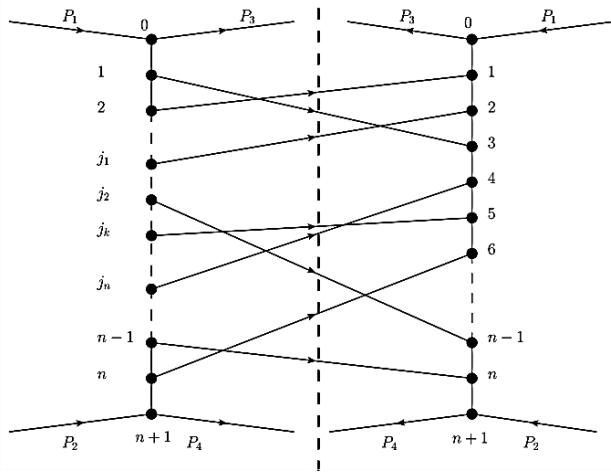


Рис. 3. Розрізана діаграма непружного розсіювання з утворенням  $n$  вторинних частинок

Для розрахунку такого інтеграла застосовуємо метод Лапласа. Доведено, що квадрат модуля амплітуди розсіювання має точку умовного максимуму. Тоді суть цього метода полягає в тому, що квадрат модуля амплітуди розсіювання представляється у виді

$$|T(X)|^2 = \exp\left(\ln|T(X)|^2\right) \quad (9)$$

Після чого показник експоненти розкладається в околі точки максимуму

амплітуди розсіювання в ряд Тейлора до других похідних

$$\begin{aligned} |T(X)|^2 &= \exp\left(\ln|T(X_0)|^2\right) \times \\ & \exp\left(\frac{\partial \ln|T|^2}{\partial X_a \partial X_c}(X_0)(X-X_0)_a(X-X_0)_c\right) \end{aligned} \quad (10)$$

де  $X_0$  – точка максимуму квадрата модуля амплітуди розсіювання, а індекси  $a$  та  $c$  означають суму по всіх індексах змінних  $X(3(n+2))$ .

В результаті такої дії отримаємо, що багатомірний інтеграл розбивається на суму одномірних гаусівських інтегралів, які легко розраховуються. Таким чином, метод Лапласа розв'язує проблему розрахунку багатовимірних інтегралів.

На основі нового методу врахування інтерференційних внесків ми застосовуємо метод Лапласа не до кожного окремого інтерференційного внеску, а до суми усіх інтерференційних внесків, або суми певної їх кількості.

Таким чином, ми враховуємо ймовірність виникнення тієї чи іншої кількості вторинних частинок та вклади в амплітуду розсіювання, які виникають в результаті перестановок «ліній» на діаграмі-гребінці, що означає ми задаємо правильно амплітуду розсіювання.

Тепер, коли амплітуда розсіювання має точку умовного максимуму, ми можемо вважати, що з найбільшою частотою будуть виникати події не ті, що «розмазані по всьому фазовому простору», а ті, які лежать в околі точки максимуму. І тому наша задача спрощується тим, що не потрібно генерувати багатовимірну зкорельовану величину, а достатньо розглядати добуток незалежних одновимірних гаусових величини, ймовірність виникнення яких співпадає з квадратом модуля амплітуди розсіювання.

**Результати побудови Монте-Карло-генератора**

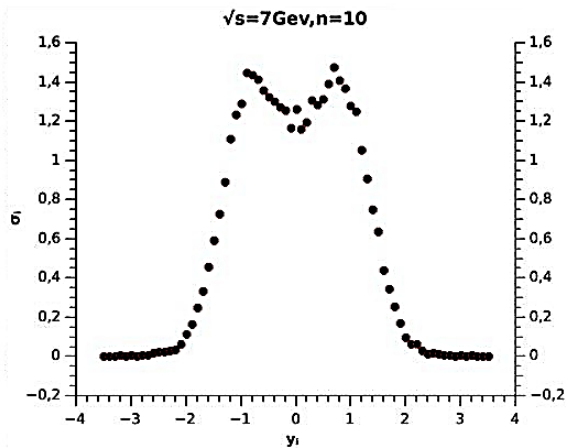


Рис. 4. Теоретичний розрахунок залежності інклюзивних перерізів по згенерованим бистротам при  $\sqrt{s} = 7\text{GeV}$  та  $n = 10$  вторинних частинок

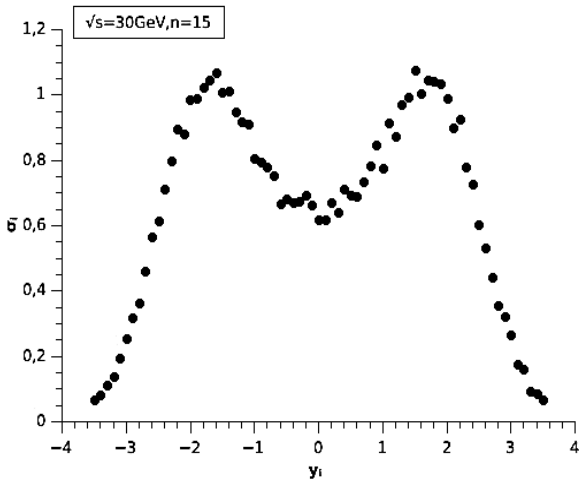


Рис. 5. Теоретичний розрахунок залежності інклюзивних перерізів по згенерованим бистротам при  $\sqrt{s} = 30\text{GeV}$  та  $n=15$  вторинних частинок.

У процесі виконання роботи, користуючись методом Лапласа та новим методом врахування інтерференційних внесків, були розраховані інклюзивні перерізи по бистротах для достатньо великої кількості вторинних частинок. Розрахунки проводились у безрозмірних величинах. Отримані результати (рис. 4,5) якісно співпадають з експериментальними даними (рис. 6).

Порівнявши рис. 4,5 (результати були отримані нашим генератором) та рис. 6 (експериментальні дані), можна сказати, що нам вдалось на якісному рівні описати розподіл інклюзивних перерізів по згенерованим бистротам. Нам вдалось отримати розподіл інклюзивних перерізів по бистротам в рамках моделі “фі-3”.

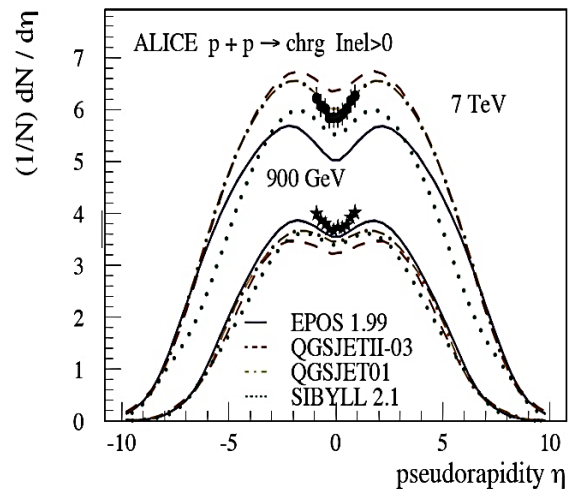


Рис. 6. Експериментальні дані залежності інклюзивних перерізів по бистротам від бистрот при різних енергіях та кількостях вторинних частинок.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Дрёмин И.М., Ройзен И.И., Чернавский Д.С. Роль неупругих процессов при высоких энергиях и теория фэйрболов // Успехи физических наук. - 1970. - Т.101, №3.
2. Шарф І. В., Тихонов А. В., Сохранний Г. О., Яткін К. В., Делієргієв М. А., Подолян Н. О., Русов В.Д. Метод Лапласа для опису непружного розсіяння адронів і нові механізми зростання перерізів // Український фізичний журнал (УФЖ). – 2011. - Т.56, №11.- С.1151-1164.
3. I. Sharf, A. Tykhonov, G. Sokhrannyi, K. Yatkin, and V. Rusov. Mechanisms of proton-proton inelastic cross-section growth in multi-peripheral model with in the framework of perturbation theory. Part3 // J.Mod.Phys. – 2012. - Vol.3. – P. 129–144.
4. I. Sharf, A. Haj Farajallah Dabbagh, A. Tikhonov, and V. Rusov. Mechanisms

- of proton-proton inelastic cross-section growth in multi-peripheral model within the framework of perturbation theory. Part 2. // J.Mod.Phys. -2012. - Vol. 3. - P. 16–27.
5. B.S. Acharya, F. Cavallari, G. Corcella, R. Di Sipio, G. Petrucciani. Monte-Carlo-generators for top quark physics at the LHC // arXiv:0804.4122 [hep-ph]. - 2008.
  6. David d'Enterria, Ralph Engel, Tanguy Pierog, Sergey Ostapchenko, Klaus Werner. Constraints from the first LHC atonhadronic event generators for ultra-high energy cosmic-ray.
  7. Anna Julia Zsigmond on behalf of the CMS Collaboration. Inelastic proton-proton cross section measurements in CMS at  $\sqrt{s} = 7$  TeV. // arXiv:1205.3142v [hep-ex]. - 2012.
  8. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей.- М.: Наука, 1984. - 600 с.

Стаття надійшла до редакції 09.06.2015

Y.V.Volkotrub, I.V.Sharf, V.D.Rusov, N.O.Chudak, O.S.Potienko,  
D.A. Ptashynskyy, K.K. Merkotan, A.N.Tikhonov, M.A. Deliyergiyev,  
V.V. Urbanevych, Y.V.Shabatura  
Odessa national polytechnic university, av. Shevchenko, 1, Odessa, 65044

## LAPLACE METHOD FOR MONTE-CARLO GENERATORS SCATTERING PROCESS

We proposed based on a method Laplace, which is used to calculate the cross-sections of inelastic scattering and explanation mechanisms of increase cross section to construct Monte Carlo generator of process of inelastic scattering of hadrons, yet in model theory of “fi-3”. In this work managed to demonstrate the applicability of the method. As the result has been written a program by Monte Carlo generator, which gave results that qualitatively consistent with experimental data.

**Keywords:** model theory «fi-3», Monte Carlo generator, amplitude of inelastic scattering process, theory perturbative, diagrams of Feynman, Laplace’s method.

Ю.В. Волкотруб, И.В. Шарф, В.Д. Русов, Н.А. Чудак, А.С. Потиеенко,  
Д.А. Пташинский, К.К. Меркотан, А.Н. Тихонов, М.А. Делиергиев,  
В.В. Урбаневич, Ю.В. Шабатура  
Одесский национальный политехнический университет,  
проспект Шевченка, 1, Одесса, 65044

## МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ МОНТЕ-КАРЛО-ГЕНЕРАТОРОВ ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ

В данной работе предложено использовать метод Лапласа, который используется для расчета сечений при процессах неупругого рассеяния и объяснения механизмов роста сечений, для построения Монте-Карло-генераторов рассеяния адронов в рамках модели “фи-3”. В работе удалось показать возможность использования данного метода. В результате была написана программа, которая даёт результаты, совпадающие с экспериментальными на качественном уровне.

**Ключевые слова:** модель «фи-3», Монте-Карло-генераторы, амплитуда рассеяния, процессы рассеяния, теория возмущений, диаграммы Фейнмана, метод Лапласа.