Вісник Ужгородського університету. Серія Фізика № 3 1998

ПРО ТЕРМОДИНАМІЧНІ ОБМЕЖЕННЯ НА ФУНКЦІЇ СТАНУ СЕРЕДОВИЩА ЩО РЕЛАКСУЄ ТА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ОПИСІВ ІНВАРІАНТНИХ ХВИЛЬОВИХ СТРУКТУР

В.А. Владіміров

Інститут геофізики НАН України, 252054, Київ, вул. Б. Хмельницького 63-Б.

Наведено систему, що описує післядію сильних імпульсних навантажень в середовищах із внутрішньою структурою. Одержано обмеження на невідомі функції внутрішньої енергії та спорідненості релаксаційного процесу, що випливають із другого закону термодинаміки. Показано, що інваріантні автохвильові розв'язки цієї системи якісно ідентичні з аналогічними розв'язками наближеної системи, яка описує слабонерівноважні релаксаційні процеси.

В природі та техніці широко розповсюджені структуровані середовища, у яких характерні розміри елементів структури на багато порядків перевищують характерні міжатомні відстані. До таких середовищ належать скельні породи, грунти, шаруваті та блокові геофізичні середовища, емульсії, газорідинні суміші, тощо. Як свідчить експериментальний матеріал [1], динамічна поведінка структурованих середовищ не визначається повністю миттєвими значеннями температури, тиску та інших макроскопових параметрів, оскільки на протязі певного часу після припинення дії навантаження в них відбувається перерозподіл енергії, перебудова внутрішньої структури та інші релаксаційні процеси.

В праці [2] було показано, що в довгохвильовому наближенні рівняння балансу маси та імпульсу структурованих середовищ співпадають з відповідними балансними рівняннями класичних континуальних моделей. При встановленні зв'язків, які необхідні для замикання згаданої системи, перебіг релаксаційних процесів в елементах структури можна врахувати, розглядаючи поряд із зовнішніми термодинамічними параметрами (тиском p, густиною ρ, масовою швидкістю u,) внутрішню змінну λ, яка описує відхилення системи від стану повної термодинамічної рівноваги і формально задовольняє рівнянню хімічної кінетики. В довгохвильовому наближенні, коли можна стосувати гідродинамічний опис, повна система буде мати такий вигляд [5]:

$$\begin{aligned} &\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=\Im, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0, \\ &\frac{dp}{dt}+M\frac{\partial u}{\partial x}=N, \quad \frac{d\lambda}{dt}=Q \equiv aA, \end{aligned} \qquad (1)$$

де a - константа з розмірністю оберненою часові, $d(\cdot)/dt=\partial(\cdot)/\partial t+u\partial(\cdot)/\partial x$ - повна похідна за часом, $\Im=\rho\gamma$ - масова сила, M, N - функції пов'язані з внутрішньою енергією $E(\rho,\ p,\ \lambda\ )$ та спорідненістю релаксаційного процесу $Q(\rho,\ p,\ \lambda\ )=aA(\rho,\ p,\ \lambda\ )$ співвідношеннями

$$\begin{aligned} &M=(p-\rho^2E_p)/(\rho E_p), \\ &N=-E_\lambda Q/E_p \end{aligned} \qquad (2)$$

Цілком очевидно, що система (1) залишається формальною доти, доки не визначені функції внутрішньої енергії $E(\rho,p,\lambda)$ та спорідненості релаксаційного процесу $A(\rho,p,\lambda)$. Визначення цих функцій спряжене з великими труднощами, оскільки ми, як правило, не маємо інформації про деталі релаксаційного процесу. З іншого боку, певні макроскопові прояви релаксаційних процесів чітко спостерігаються при динамічному навантаженні структурованих середовищ [1], тому бажано перейти від системи (1) до іншого представлення, яке б враховувало специфіку релаксаційних процесів, і одночасно не містило невизначених функцій. Перехід до такого представлення стає можливим, якщо обмежитися розглядом процесів, що характеризуються порівняно невеликими відхиленнями від стану повної термодинамічної рівноваги, оскільки зв'язок між "внутрішніми" та "зовнішніми" змінними для них встановлює [3] рівняння Гіббса

$$TdS = dE + pdV + Ad\lambda. \tag{3}$$

Використовуючи це співвідношення, можна одержати у випадку баротропного рівняння стану систему [5]

$$\begin{aligned} &\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\gamma,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\\ &\tau\frac{dp}{dt}-\chi\frac{d\rho}{dt}=\kappa\rho-p, \end{aligned} \tag{4}$$

де τ - час релаксації, який визначається співвідношенням $\tau^{-1}=-a\partial A(\lambda,\rho)/\partial\lambda$, $(\partial p/\partial\rho)_\lambda=\chi/\tau$ - квадрат замороженої швидкості звуку C_∞^2, $(\partial p/\partial\rho)_{A=0}=\kappa$ - квадрат рівноважної швидкості звуку C_0^2. На відміну від системи (1), система (4) містить лише такі параметри, які не залежать явно від деталей релаксаційного процесу.

Суттєві обмеження на функції E, A можна отримати з вимог симетрії. У випадку інваріантності системи (1) відносно зміни масштабів функції ці мають такий вигляд [4]:

$$\begin{aligned} &E=\frac{p}{\rho(\sigma-1)}-h(\lambda),\\ &Q\equiv aA=ag(\lambda)\varphi(p,\rho). \end{aligned} \tag{5}$$

Виявляється, що довільні функції $\varphi(p,\rho)$, $g(\lambda)$ та $h(\lambda)$ також можна конкретизувати, якщо скористатися з диференціальних наслідків формули (3). Оскільки $dS(V,p,\lambda)$ є повним диференціалом, мають місце такі співвідношення:

$$(S_p)_{V,\lambda}=T^{-1}(E_p)_{V\lambda}, \tag{6.1}$$

$$(S_V)_{p\lambda}=T^{-1}[(E_V)_{p\lambda}+p], \tag{6.2}$$

$$(S_\lambda)_{pV}=T^{-1}[(E_\lambda)_{pV}+A]. \tag{6.3}$$

Порівнюючи між собою змішані похідні $S_{pV}=S_{Vp}$ знайдемо T:

$$T=V^{-1/\Gamma}\Phi(\Omega,\lambda),\qquad \Omega=pV^\sigma, \tag{7}$$

де

$\Gamma=(\sigma-1)^{-1}$, $V=\rho^{-1}$, Φ - довільна функція. Інтегруючи рівняння (6.1) одержимо:

$$S=S^1(V,\lambda)+\Gamma\int\frac{d\Omega}{\Phi(\Omega,\lambda)}. \tag{8}$$

Підставляючи цей вираз в (6.2) і використовуючи тотожність

$$\frac{\partial}{\partial V}\int\frac{d\Omega}{\Phi(\Omega,\lambda)}=\frac{p(\Gamma+1)}{\Gamma T},$$

можна переконатися в тому, що $S^1=S^1(\lambda)$. Підставляючи (8) в рівняння (6.3) і враховуючи (5), приходимо до такого співвідношення:

$$V^{-1/\Gamma}\Phi(\Omega,\lambda)\left(\dot{S}^1(\lambda)-\Gamma\int\frac{d\Omega}{\Phi^2(\Omega,\lambda)}\Phi_\lambda\right)=$$
$$=-\dot{h}(\lambda)+g(\lambda)\varphi(p,\rho). \qquad (9)$$

Поклавши

$$g(\lambda)=\dot{h}(\lambda)/m, \qquad \varphi(p,\rho)=m+\rho^{1/\Gamma}\Theta(\Omega)$$
$$\Phi(\Omega,\lambda)=f(\lambda)R(\Omega)$$

отримаємо розв'язок:

$$A=g(\lambda)\left(m+\rho^{1/\Gamma}R(\Omega)\left(1-\Gamma\int\frac{d\Omega}{R(\Omega)}\right)\right),$$
$$S=C_2+f^{-1}(\lambda)\left(\Gamma\int\frac{d\Omega}{R(\Omega)}-1\right), \qquad (10)$$
$$E=\Gamma\rho^{1/\Gamma}\Omega-h(\lambda), \qquad T=\rho^{1/\Gamma}R(\Omega)f(\lambda),$$

де

$$f(\lambda)=C_3\exp[g(\lambda)], \qquad g(\lambda)=\dot{h}(\lambda)/m..$$

При $R=C_4\exp(\Omega/r),\ r=const$ функція A описує кінетику ареніусівського типу:

$$A=C_5\dot{h}(\lambda)\left(1+C_6\rho^{1/\Gamma}\exp(\Omega/r)\right).$$

Поклавши в (10) $\Phi=R(\Omega),\ f(\lambda)=1$, одержимо розв'язок

$$A=g(\lambda)\left[m+\rho^{1/\Gamma}R(\Omega)\right],\ \ S=g(\lambda)+\Gamma\int\frac{d\Omega}{R(\Omega)},$$
$$E=\Gamma\rho^{1/\Gamma}\Omega-h(\lambda),\ \ T=\rho^{1/\Gamma}R(\Omega), \qquad (11)$$

де $g(\lambda)=\dot{h}(\lambda)$. Формула (11) за умови що $R(\Omega)=\Phi_0\Omega,\ \ h(\lambda)=-q(\lambda-\lambda_0),\ \ m=-1$ дає такі вирази для визначальних функцій:

$$E=\frac{p}{\rho(\sigma-1)}+q(\lambda-\lambda_0),$$
$$A=q\kappa^{-1}\left(\frac{p}{\rho}-\kappa\right),\ \ \kappa=\Phi_0^{-1}. \qquad (12)$$

Системи (1) та (4), можна звести до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою анзацу

$$u=U(\omega)+D,\ \ \rho=\rho_0\exp[\alpha t+S(\omega)]$$
$$p=Z(\omega)\rho,\ \ \omega=x-Dt, \qquad (13)$$

який одержується з міркувань симетрії [4], [5]. Очевидно, що співвідношення (13) описують розв'язки типу біжучої хвилі. Підстановка анзацу (13) до системи (1), з урахуванням (12), дає одну квадратуру та двомірну динамічну систему [5]

$$W\Delta\dot{W}=W[\gamma W+\alpha Z-\psi(Z)]\equiv Wf,$$
$$W\Delta\dot{Z}=\Delta\psi(Z)+(1-\sigma)Zf, \qquad (14)$$

де

$$\Delta=W^2-\sigma Z,\ f=\gamma W+\alpha Z-\psi(Z),$$
$$\psi(Z)=\xi(Z-\kappa),\ \ \xi=-aq^2\kappa^{-1}(\sigma-1).$$

У випадку системи (4), стосуючи анзац (13) одержимо динамічну систему

$$W\Delta\dot{W}=W(\tau\gamma W+(1+\tau\alpha)Z-\kappa)\equiv WF,$$
$$W\Delta\dot{Z}=(Z-W^2)F+(\gamma W+\alpha Z)\Delta, \qquad (15)$$

де $\Delta=\tau W^2-\chi$.

Надалі будемо вважати, що $\gamma=\kappa\alpha/D$. Динамічні системи (14) та (15) характеризуються тим, що в околі особливої точки $A(-D,\ \kappa)$ за певних умов в них народжуються періодичні розв'язки. Для системи (14) граничний цикл народжується в околі критичного значення $D_{cr}=\sqrt{\kappa\xi^{-1}(\xi+\sigma\alpha)}$ коли $\alpha<0$ і виконуються такі нерівності [5]:

$$\frac{\xi}{\alpha}>\frac{\sigma}{\sigma-1}>1. \qquad (16)$$

У випадку системи (15) цикл існує в околі значення $D_{cr}=\sqrt{\kappa-\chi\alpha}$ коли $\alpha<0$ і мають місце нерівності

$$\frac{\chi}{\tau}>\frac{\kappa}{1+\tau\alpha}>\kappa\ . \qquad (17)$$

Щоб порівняти умови виникнення періодичних траєкторій в системах (14) та

(15) необхідно здійснити перехід від визначальних рівнянь системи (1) до динамічного рівняння стану, тобто останнього (замикаючого) рівняння системи (4). Рівняння стану для малих відхилень від рівноваги одержимо, записуючи рівняння балансу енергії у вигляді скінчених різниць:

$$p - p_0 + \sigma\kappa V_0^{-2}(V - V_0) + \\ + q(\sigma - 1)V_0^{-1}(\lambda - \lambda_0) = 0, \tag{18}$$

де $V = \rho^{-1}$, $V_0 = \rho_0^{-1}$, $p_0 = \kappa\rho_0$, p_0, ρ_0, λ_0 - рівноважні значення відповідних параметрів. Використовуючи формули (12) та (18) одержимо коефіцієнти динамічного рівняння стану з представлення (4):

$$\tau^{-1} = -a(A_\lambda)_V = a(\sigma - 1)q^2 / \kappa, \\ C_\infty^2 = \kappa\sigma, \quad C_0^2 = \kappa. \tag{19}$$

Підставляючи (19) у формулу (17) переконуємось у тому, що умови які вона визначає співпадають з (16). Якісна ідентичність періодичних автохвильових розв'язків точної та наближеної моделі свідчить про адекватність опису системою (4) слабонерівноважних хвильових процесів

1. А.В. Михалюк. Скальные породы при неравномерных динамических нагружениях. Наук. думка, Киев (1980), 280 с.
2. В.А. Вахненко, В.В. Кулич. ПМТФ, **32**, 814 (1992).
3. А.В. Лыков. ИФЖ. **9**, 3, 287 (1965).
4. В.А Владимиров, В.А. Даниленко, Т.Б.Даневич Качественный анализ уравнений гидродинамики релакси-рующих и реагирующих сред // Препринт АН УССР. Институт геофизики. Киев (1989), 42 с.
5. V.A.Danylenko, V.V.Sorokina and V.A.Vladimirov. Journ. of Physics A: Math. and Gen., **26**, 9, 7125 (1993)

ON THE THERMODYNAMIC RESTRICTIONS FOR RELAXING MEDIUM CONSTITUTIVE EQUATIONS AND EQUIVALENCE OF TWO DESCRIPTIONS OF THE INVARIANT WAVE STRUCTURES

V.A. Vladimirov

NAS of Ukraine. S.I. Subbotin Institute of Geophysics, B. Khmelnicki Str. 63-B, 252054 Kiev

A system describing strong pulse loading afteraction in structured media is presented. Restrictions for unknown functions of internal energy and affinity of relaxing process, arising from the second law of thermodynamics, are obtained. There is also shown that a set of invariant autowave solutions for the system under consideration is qualitatively the same as that satisfying an approximated system, that describes a weakly non-equilibrium processes