

РЕЛЯТИВІСТСЬКИЙ ВОДНЕВОПОДІБНИЙ АТОМ В 2+1 ВИМІРАХ

О.К. Рейтій, В.Ю. Лазур

Ужгородський національний університет, 88000, Ужгород, вул. Волошина 32

e-mail: reiti@univ.uzhgorod.ua,

lazur@univ.uzhgorod.ua

Вперше у (2+1)-вимірному просторі отримано точні розв'язки рівняння Дірака з "обрізаним" кулонівським потенціалом, який враховує скінченні розміри ядра, в докритичній області дискретного спектра. Одержано ВКБ-розв'язки рівняння Дірака в сильному зовнішньому полі у двовимірному випадку. Поле вважається сильним, якщо енергія зв'язку електрона перевищує $2mc^2$ і рівень дискретного спектру може опускатися в нижній континуум. Знайдено хвильові функції в класично дозволеній та забороненій областях, а також отримано умови їх зшивки при переході через точки повороту. Метод ВКБ застосовано до наступних задач: 1) узагальнення умови квантування Бора-Зоммерфельда з урахуванням релятивістських ефектів та спіну в 2+1 вимірах; 2) відшукування енергії та ширини квазістаціонарного рівня в нижньому континуумі.

На даний час в різних областях фізики все сильніше відчувається потреба у вивченні поведінки квантових систем ферміонів в присутності інтенсивних зовнішніх полів в просторах знижених розмірностей. Так, наприклад, ряд ефектів у фізиці конденсованого середовища [1,2] вказує на існування квантових систем зі спектром енергій, який визначається гамільтоніаном рівняння Дірака в 2+1 вимірах (тут перший індекс 2 вказує на число просторових змінних, так що простір-час (2+1)-вимірний). Інший приклад пов'язаний з поведінкою електронів в надсильному однорідному магнітному полі напруженості $B > B_{cr} = m^2 / |e|$. Область руху електрона в перпендикулярній до такого поля площині має лінійний розмір порядку так званої "магнітної довжини" $a = (2 / |eB|)^{1/2}$; це виявляється значно менше, ніж комптонівська довжина хвилі електрона [3]. Таке "виморожування" двох просторових степеней вільності фактично дозволяє звести ряд задач (3+1)-вимірної квантової

електродинаміки (КЕД₃₊₁) до задач КЕД₂₊₁ і КЕД₁₊₁.

Двовимірні системи нерелятивістських заряджених ферміонів, пов'язані з калібровочним електромагнітним полем і калібровочним полем Черна-Саймонса, також привертають увагу в зв'язку з їх властивостями, які дозволяють застосовувати ці моделі до вивчення таких квантових макроскопічних явищ, як ефект Холла та високотемпературна надпровідність [4,5]. Властивості квантових (2+1)-вимірних систем ферміонів викликають і чисто теоретичний інтерес в зв'язку з теорією аніонів – частинок, які описуються дробовою статистикою в 2+1 вимірах [6].

В зв'язку з цим вивчення поведінки заряджених квантових частинок в сильних зовнішніх полях в області релятивістських енергій в просторах нижчої розмірності, а також дослідження обумовлених присутністю сильного поля фізичних ефектів є актуальним на даний час і з точки зору всеможливих практичних застосувань. Одним із таких ефектів є ефект народжен-

ня електрон-позитронної пари з вакууму сильним кулонівським полем, який для тривимірного випадку був передбачений Герштейном та Зельдовичем [7] і потім досліджений в багатьох роботах (див., наприклад, [8-12]).

Метою даної роботи є розробка послідовної схеми отримання ВКБ-розкладів для рівняння Дірака в сильному полі в 2+1 вимірах. Це дає можливість знайти енергію квазістаціонарних станів в нижньому континуумі та обчислити ймовірність спонтанного народження позитронів, а також розглянути широке коло задач в теорії надкритичних атомів. Слід відмітити, що використання методу ВКБ, як правило, дозволяє отримати результати в зручній аналітичній формі, без залучення громіздких чисельних розрахунків. В таких випадках, коли можливо порівняти результати методу ВКБ з точними розрахунками, розбіжність між ними невелика навіть для основного рівня $1s_{1/2}$ і швидко зменшується з ростом Z . Це говорить про хорошу точність квазікласичного наближення для сильного кулонівського поля.

Робота має таку структуру. В розділі 1 знайдено дискретний спектр двовимірного рівняння Дірака для поля точкового заряду. У розділі 2 отримано точні розв'язки рівняння Дірака з урахуванням скінчених розмірів ядра та знайдено величину критичного заряду. За допомогою методу ВКБ у розділах 3, 4 знайдено хвильову функцію, а в наступному розділі – положення та ширину квазістаціонарних станів електрона, що опустився в нижній континуум. В останньому розділі отримані результати порівнюються з аналогічними в (3+1)-вимірному випадку.

В статті використовується ситема одиниць $\hbar=c=m_e=1$ і позначення: ε – енергія рівня в одиницях mc^2 , eZ – заряд ядра атома, $\alpha=e^2 \approx 1/137$ – стала тонкої структури, r_N – радіус ядра.

1. Рівняння Дірака в зовнішньому кулонівському полі в 2+1 вимірах

Оскільки (див., наприклад, [2]) в 2+1 вимірах алгебра матриць Дірака може бути виражена в термінах матриць Паулі

як $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^k = i\sigma^k$, то рівняння Дірака для електрона заряду $-e < 0$ ($e > 0$), взаємодія якого із зовнішнім полем задовольняє принципу “мінімальності” в двох просторових вимірах, можна записати у вигляді

$$(i \partial / \partial t - H_D) \Psi = 0, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} H_D &= \vec{\alpha} \vec{p} + \beta - eA^0 I = \\ &= \sigma^1 p_2 - \sigma^2 p_1 + \sigma^3 - eA^0 I \end{aligned} \quad (2)$$

– гамільтоніан Дірака, $p_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$ – оператор узагальненого імпульсу електрона, A_μ – вектор-потенціал зовнішнього електромагнітного поля, а повний момент імпульсу електрона має тільки одну компоненту $J_z = L_z + S_z$, де $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ і $S_z = \sigma^3/2$. Надалі ми не будемо виписувати явно дворядкову діагональну одиничну матрицю I , вважаючи її присутньою при величинах, які не є матрицями (як, наприклад, $-eA^0$).

Застосуємо рівняння Дірака (1), (2) до вивчення двовимірного водневоподібного іона із зарядом ядра $eZ \gg 1$. Строго кажучи, послідовна теорія навіть таких простих релятивістських систем повинна ґрунтуватися на двочастинкових рівняннях типу Бете-Солпітера, точні розв'язки яких не вдається отримати у аналітичному вигляді. Тому як вихідне наближення для описання іонів з одним електроном природно використовувати рівняння Дірака.

Ми розглянемо задачу в тому наближенні, в якому можна нехтувати розмірами ядра, і будемо вважати, що вектор-потенціал поля ядра в декартових координатах визначається як кулонівський

$$A^0(r) = -Ze/r, \quad A^x = A^y = 0 \quad (3)$$

при всіх значеннях $0 \leq r < \infty$.

Розв'язок рівняння Дірака (1) в полі (3) будемо шукати в полярних координатах r , φ у мультиплікативній формі

$$(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\epsilon t + il\varphi) \psi(r, \varphi), \quad (4)$$

де ϵ – енергія, l – ціле число і

$$\psi(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} F(r) \\ G(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Відмітимо, що хвильова функція (4) є спільною власною функцією операторів Гамільтона H_D і повного моменту J_z , які відповідають власним значенням ϵ і $l+1/2$.

Підставляючи вирази (4) і (5) в рівняння (1) та враховуючи рівності

$$p_x \pm ip_y = -ie^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (6)$$

отримуємо наступну систему рівнянь для радіальних функцій

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} - \frac{l+1/2}{r} F + (\epsilon + 1 - V(r))G &= 0, \\ \frac{dG}{dr} + \frac{l+1/2}{r} G - (\epsilon - 1 - V(r))F &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $V(r) = -Z\alpha/r$.

Знаходження точного розв'язку рівняння Дірака і можливих значень енергії $0 < \epsilon < 1$ можна провести у повній аналогії з розрахунками, зробленими в тривимірному випадку [13]. Для цього функції F і G зображають у вигляді

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{1+\epsilon} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 + Q_2), \\ G &= \sqrt{1-\epsilon} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (8)$$

де введено позначення

$$\begin{aligned} \rho &= 2\lambda r, & \lambda &= \sqrt{1-\epsilon^2}, \\ \gamma &= \sqrt{(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Функції Q_1 і Q_2 виражаються через вироджену гіпергеометричну функцію $F(a, b; z)$ наступним чином:

$$Q_1 = AF(-n_r, 2\gamma+1; \rho), \quad (9a)$$

$$Q_2 = BF(-n_r+1, 2\gamma+1; \rho). \quad (9b)$$

Зв'язок між сталими A і B задається співвідношенням

$$B = \frac{\gamma - \epsilon Z\alpha/\lambda}{l+1/2 + Z\alpha/\lambda} A,$$

а спектр енергій визначається з рівняння

$$\gamma - \epsilon Z\alpha/\lambda = -n_r, \quad (10)$$

причому допустимі наступні значення квантового числа n_r : $0, 1, 2, \dots$ при $l \geq 0$ і $1, 2, 3, \dots$ при $l < 0$.

З умови нормування хвильової функції (t, \vec{x}) на одиницю впливає умова нормування для радіальних функцій $F(r)$ і $G(r)$:

$$\int_0^\infty (F^2 + G^2) r dr = 1.$$

Звідси знаходимо з точністю до фазового множника спільну сталу нормування A :

$$A = \frac{1}{\Gamma(2\gamma+1)} \left\{ \frac{\lambda [Z\alpha + \lambda(l+1/2)]}{2Z\alpha} \times \frac{\Gamma(2\gamma+n_r+1)}{n_r!} \right\}^{1/2}.$$

З рівняння (12) знаходимо наступний вираз для дискретних рівнів енергій:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n_r + \sqrt{(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2} \right)^2}}}. \quad (11)$$

Спектр енергій (11) схожий на спектр безспінової зарядженої частинки в кулонівському полі [13] в трьох просторових вимірах, що і слід було очікувати, так як в (2+1)-вимірній квантовій теорії електрон фактично поводить як безспіновий ферміон. Проте між спектрами справжнього бозона

і безспінового електрона є істотною відмінністю. Зокрема, енергія електрона в основному стані ($l = n_r = 0$) дорівнює

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1 - (2Z\alpha)^2}$$

і обертається в нуль при $Z\alpha = 1/2$, тоді як в тривимірному випадку енергія ферміона $\varepsilon_0 = 0$ при $Z\alpha = 1$, а енергія безспінової зарядженої частинки на найнижчому рівні при $Z\alpha = 1/2$ дорівнює $1/\sqrt{2}$.

Як в (3+1)-вимірній, так і в (2+1)-вимірній квантових теоріях вираз для енергії основного стану електрона в кулонівському полі точкового заряду втрачає зміст, коли $\varepsilon_0(Z)$ обертається в нуль. Відповідні хвильові функції осцилюють при $r \rightarrow 0$, внаслідок чого відсутня гранична умова в початку координат [11,12]. Для відшукування енергетичного спектру електрона в кулонівському полі в цьому випадку необхідно поставити деяку граничну умову при $r = 0$, а це фактично означає, що слід розглядувати потенціал, обрізаний на деякій відстані r_N (див. розділ 2).

До тепер розглядувався випадок дискретного спектру. Хвильові функції неперервного спектру в кулонівському полі точкового заряду в 2+1 вимірах отримуються з функцій дискретного спектру замінами

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \varepsilon} &\rightarrow -i\sqrt{\varepsilon - 1}, \quad \lambda \rightarrow -ip, \\ n_r &\rightarrow iZ\alpha\varepsilon/p. \end{aligned}$$

Зробивши в (8) вказану заміну і заново віднормувавши функції $F(r)$ і $G(r)$ за "шкалою імпульсів" (необхідні обчислення повністю аналогічні проведенням в [13]), приведемо тут тільки кінцеві вирази для радіальних хвильових функцій неперервного спектру:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} r^{-1/2} F(r) \\ r^{-1/2} G(r) \end{aligned} \right\} &= 2^{3/2} \sqrt{\frac{1 \pm \varepsilon}{\varepsilon}} e^{\pi\nu/2} \frac{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)}{\Gamma(2\gamma + 1)} \times \\ &\frac{(2pr)^\gamma}{\sqrt{r}} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \left\{ e^{i(pr+\xi)} F(\gamma - i\nu, 2\gamma + 1; 2ipr) \right\}, \end{aligned}$$

де введено наступні позначення

$$\nu = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}, \quad e^{-2i\xi} = -\frac{\gamma - i\nu}{l + 1/2 + i\nu/\varepsilon}$$

(величина ξ дійсна, оскільки $\gamma^2 + (Z\alpha\varepsilon/p)^2 = (l + 1/2)^2 + (Z\alpha)^2$).

Перейдемо тепер до розгляду ефектів, пов'язаних із скінченністю розмірів ядра, яке створює кулонівський потенціал.

2. Дискретний спектр при $2Z > 137$.

Критичний заряд ядра

Для знаходження енергетичного спектру електрона в кулонівському полі ядра з $Z\alpha > 1/2$ в 2+1 вимірах необхідно поставити деяку граничну умову в нулі (що еквівалентно визначенню самоспряженого розширення оператора енергії); лише після цього задача стає математично коректною [11,12]. Фізично постановка граничної умови в нулі означає обрізування кулонівського потенціалу на малих відстанях, тобто врахування скінчених розмірів ядра. Розглянемо як проявляється цей ефект в релятивістській кулонівській задачі з зарядом $Z \geq 137/2$ у випадку двох просторових вимірів.

Припустимо, що $V(r)$ підлягає закону Кулона впритул до поверхні ядра, а всередині ядра має більш складний вигляд:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Z\alpha}{r}, & r > r_N, \\ -\frac{Z\alpha}{r} f\left(\frac{r}{r_N}\right), & r \leq r_N. \end{cases} \quad (12)$$

Тут $f(x)$ – функція обрізання, яка враховує скінчені розміри ядра, $0 \leq x = r/r_N \leq 1$. Найчастіше використовуються дві найпростіші моделі обрізання [11,12].

Модель I: $f(x) = 1$, тобто прямокутне обрізання, що відповідає рівномірному розподілу заряду по поверхні ядра. Зручна тим, що рівняння Дірака всередині ядра розв'язується в аналітичному вигляді,

однак їй відповідає нереалістична форма густини протонів в ядрі.

Модель II: $f(x) = (3 - x^2)/2$. Така модель близька до реальності і відповідає рівномірному розподілу заряду по всьому об'єму ядра.

Щоб знайти спектр рівняння Дірака і визначити величину критичного заряду Z_{cr} , необхідно розв'язати це рівняння всередині ($0 < r < r_N$) і ззовні ($r > r_N$) ядра, що у

випадку моделі II вимагає при $0 < r < r_N$ чисельних розрахунків. Ми обмежимося моделлю прямокутного обрізання, для якої система Дірака (7) розв'язується в аналітичному вигляді.

Виключаючи із системи (7) функцію $G(r)$, отримуємо рівняння для визначення $F(r)$:

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} - \frac{l^2 - 1/4}{r^2} F(r) + \left[\left(\varepsilon + \frac{Z\alpha}{r_N} \right)^2 - 1 \right] F(r) = 0, \quad r < r_N$$

(тут враховано, що $V(r) = const$). Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$F(r) = \sqrt{r} \left[A_1 J_{|l|}(kr) + B_1 N_{|l|}(kr) \right], \quad r < r_N,$$

де $J_n(x)$ і $N_n(x)$ – функції Бесселя і Неймана цілочисельного порядку n , відповідно, а

$$k = \sqrt{\left(\varepsilon + Z\alpha/r_N \right)^2 - 1}.$$

Виразивши $G(r)$ через $F(r)$ за допомогою (7) і використовуючи рекурентні співвідношення для функцій $J_n(x)$ і $N_n(x)$, отримаємо наступний вираз для нижньої компоненти:

$$G(r) = \operatorname{sgn} \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{k\sqrt{r}}{\varepsilon + Z\alpha/r + 1} \left[A_1 J_{l_1}(kr) + B_1 N_{l_1}(kr) \right], \quad r < r_N,$$

причому $l_1 = |l| + \operatorname{sgn}(l + 1/2)$. З умови скінченності $F(r)$ при $r=0$ випливає, що $B_1=0$. Тоді кінцеві формули для радіальних функцій у внутрішній області $0 < r < r_N$ приймають (з точністю до нормування) більш простий вигляд:

$$F(r) = \sqrt{r} J_{|l|}(kr), \quad (13a)$$

$$G(r) = \operatorname{sgn} \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{k\sqrt{r}}{\varepsilon + Z\alpha/r + 1} J_{l_1}(kr). \quad (13b)$$

В зовнішній області $r > r_N$ потенціал $V(r)$ співпадає з кулонівським і розв'язок системи Дірака (7), експоненційно згасаючий на нескінченності, визначається виразами типу (8), а функції Q_1 та Q_2

виражаються через вироджені гіпергеометричні функції аналогічно (9). Однак тепер необхідно враховувати обидва знаки величини $\gamma = \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2}$. Тому замість (9) маємо зображення

$$Q_j = C_j \Psi(1/2 - \chi_j + \gamma, 2\gamma + 1; \rho), \quad (14)$$

$$\chi_1 = Z\alpha\varepsilon/\lambda + 1/2, \quad \chi_2 = Z\alpha\varepsilon/\lambda - 1/2, \quad (15)$$

де $j = 1, 2$, $\rho = 2\lambda r$, C_1 і C_2 – деякі сталі, $\Psi(a; b; z)$ – іррегулярний розв'язок виродженого гіпергеометричного рівняння; регулярний розв'язок $F(a; b; z)$ цього рівняння тут незастосовний із-за росту на нескінченності. Підставляючи (8), (14), (15) в (7) і використовуючи рекурентні

співвідношення між виродженими гіпергеометричними функціями, знаходимо зв'язок між сталими C_1 and C_2 :

$$C_2/C_1 = Z\alpha/\lambda - l - 1/2.$$

Зшивання внутрішнього та зовнішнього розв'язків на краю ядра (при $r=r_N$) дає рівняння

$$\left. \frac{\sqrt{1-\varepsilon} Q_1 - Q_2}{\sqrt{1+\varepsilon} Q_1 + Q_2} \right|_{r=r_N} = A_l, \quad (16)$$

яке визначає спектр рівняння Дірака. Тут A_l – відношення $G/F|_{r=r_N}$ функцій (13), що описують електрон всередині ядра

$$A_l = \left(\frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=r_N-0} = \operatorname{sgn}(l+1/2) \frac{k}{\varepsilon + Z\alpha/r_N + 1} \frac{J_l(kr)}{J_{|l|}(kr)}. \quad (17)$$

За допомогою рекурентного співвідношення [14]:

$$\frac{d\Psi(a, b; z)}{dz} = \frac{a}{z} [(a-b+1)\Psi(a+1, b; z) - \Psi(a, b; z)]$$

перетворимо рівняння (17) до більш компактного вигляду:

$$x \frac{d}{dx} \ln \Psi(\gamma - \varepsilon Z\alpha/\lambda, 2\gamma + 1; x) = \frac{1 - \beta A_l}{1 + \beta A_l} \left(\frac{Z\alpha}{\lambda} + l + \frac{1}{2} \right) + \frac{\varepsilon Z\alpha}{\lambda} - \gamma, \quad (18)$$

де $x = 2\lambda r_N$, $\beta = \sqrt{(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)}$.

Отриманий точний розв'язок (18) для енергії рівнів має досить непросту структуру і для прямих розрахунків занадто складне. Тому доцільно спробувати по можливості спростити громіздкий вираз (18) по крайній мірі в деяких граничних випадках. Як впливає із розгляду значно більш повно вивченої релятивістської (3+1)-вимірної кулонівської задачі [15], спрощення можливі при використанні наближення гранично малого радіуса обрізання кулонівського поля. Подивимося як працює це наближення у випадку рівняння (18).

Оскільки радіус ядра r_N малий порівняно з комптонівською довжиною хвилі електрона (для реальних ядер $r_N \approx 1.1 \cdot (2.5Z)^{1/3}$ фермі і, наприклад, при $Z=137$ $r_N \approx 0.02$ в одиницях $\hbar/m_e c$), то

можна вважати $k \approx Z\alpha/r_N$. При цьому в виразі (17) зникає залежність від енергії ε і він приймає більш просту форму

$$A_l = \operatorname{sgn}(l+1/2) \frac{J_l(Z\alpha)}{J_{|l|}(Z\alpha)}.$$

Виразивши функцію $\Psi(a, b; z)$ через $F(a, b; z)$ і обмежувачись тільки головним членом в розкладі $F(a, b; z) = 1 + \dots$ (при малому параметрі z , який пропорційний r_N) одержуємо трансцендентне рівняння відносно ε

$$\gamma \frac{D^+ + D^-}{D^+ - D^-} = B_l, \quad (19)$$

$$D^\pm = x^{\pm\gamma} \frac{\Gamma(-\varepsilon Z\alpha/\lambda \pm \gamma)}{\Gamma(1 \pm 2\gamma)}, \quad (20a)$$

$$B_l = \frac{l+1/2 - Z\alpha A_l + \beta [Z\alpha - (l+1/2)A_l]}{1 + \beta A_l}. \quad (20b)$$

Розіб'ємо дискретний спектр електрона на дві ділянки:

1) $Z\alpha < |l+1/2|$. Тут γ є дійсною величиною, і трансцендентне рівняння для ε має вигляд:

$$\frac{\varepsilon Z \alpha}{\lambda} = n_r + \gamma + W, \quad (21)$$

$$W = \frac{(-1)^{n_r}}{\pi} \arcsin \left\{ \frac{\pi (2\lambda r_N)^{2\gamma} \sin[\pi(\varepsilon Z \alpha / \lambda + \gamma)]}{2\gamma \Gamma^2(2\gamma)} \frac{\sin[\pi(\varepsilon Z \alpha / \lambda + \gamma)]}{\sin(2\pi\gamma)} \frac{\Gamma(\varepsilon Z \alpha / \lambda + \gamma) B_l - \gamma}{\Gamma(\varepsilon Z \alpha / \lambda - \gamma) B_l + \gamma} \right\}. \quad (22)$$

Легко побачити, що при $r_N \rightarrow 0$ величина $W \rightarrow 0$ і вираз (21) переходить в формулу (10), а, отже, і в аналог формули Дірака-Зоммерфельда (11) в двовимірному випадку;

$$2) \quad Z\alpha \geq |l + 1/2|. \quad \text{Тут} \quad \gamma = i\theta,$$

$\theta = \sqrt{(Z\alpha)^2 - (l + 1/2)^2}$ – дійсне. Рівні енергії ε є розв'язками трансцендентного рівняння:

$$\Phi - \arctg \frac{B_l}{\theta} = \pi \left(n_r + \frac{\text{sgn}(l + 1/2)}{2} \right), \quad (23)$$

$$\Phi = \arg \frac{\Gamma(1 + 2i\theta)}{\Gamma(-\varepsilon Z \alpha / \lambda + i\theta)} - \theta \ln(2\lambda r_N). \quad (24)$$

Формули (21)-(24) описують дискретний спектр енергій діраківського електрона в області $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. Зауважимо, однак, що для чисельних розрахунків спектру більш придатними є вирази (19), (20). Залежність $\varepsilon(Z)$ для трьох найнижчих рівнів буде показано на рис. 2.

Знайдемо тепер величину критичного заряду Z_{cr} . Для цього не потрібно ще раз розв'язувати рівняння Дірака для випадку $\varepsilon = -1$, а досить скористатися загальними формулами для $-1 \leq \varepsilon \leq 1$. Візьмемо рівності (23) та (24) і попрямуємо в них $\varepsilon \rightarrow -1$. Тоді величини Φ і B_l в цих виразах набудуть вигляду

$$\Phi = \arg \Gamma(1 + 2i\theta) - \theta \ln(2Z\alpha r_N), \quad (25a)$$

$$B_l = l + 1/2 - Z\alpha A_l, \quad (25b)$$

а рівняння (23) переходить в трансцендентне рівняння для Z_{cr} [16].

Чисельні розрахунки для станів $1s_{1/2}$ та $2s_{1/2}$ дають значення критичного заряду

$Z_{cr} \approx 107$ та 188 , відповідно. Нагадаємо, що в (3+1)-вимірному випадку значення Z_{cr} для аналогічної моделі значно більші [12]: для станів $1s_{1/2}$ та $2s_{1/2}$ $Z_{cr} \approx 170$ та 236 . Це означає, що вакуум (2+1)-вимірної квантової електродинаміки в сильному кулонівському полі повинен проявляти нестійкість по відношенню до утворенню до утворення електрон-позитронних пар присуттєво менших значеннях критичного заряду, ніж в КЕД₃₊₁.

3. Метод ВКБ для рівняння Дірака в сильному зовнішньому полі

Для відшукування квазікласичних розв'язків системи рівнянь Дірака (7) зручно переписати її в матричній формі:

$$\psi' = \frac{1}{\hbar} D \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (26a)$$

$$D = \begin{pmatrix} \hbar \aleph / r & -(\varepsilon + 1 - V(r)) \\ \varepsilon - 1 - V(r) & -\hbar \aleph / r \end{pmatrix}. \quad (26b)$$

Тут ми відновили в явному вигляді сталу Планка \hbar ; штрих означає похідну по r , $\aleph = l + 1/2$, а зовнішній електростатичний потенціал $V(r) = -eA^0(r)$. Розв'язок матричного рівняння (26) будемо шукати у вигляді формальних степеневих рядів за \hbar :

$$\psi = \varphi \exp \left(\int y dr \right), \quad (27)$$

$$y(r) = \frac{1}{\hbar} y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \dots, \quad (28a)$$

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \varphi^{(n)}(r), \quad (28b)$$

де верхня (нижня) компонента $\varphi_F^{(n)}$ ($\varphi_G^{(n)}$) вектора $\varphi^{(n)}$ відповідає радіальній хвильовій функції F (G). Підставляючи (27), (28) в (26) і прирівнюючи до нуля члени при однакових степенях \hbar , отримуємо систему рекурентних рівнянь

$$\begin{aligned} (D - y_{-1})\varphi^{(0)} &= 0, \\ (D - y_{-1})\varphi^{(n+1)} &= \varphi^{(n)'} + \sum_{k=0}^n y_{n-k}\varphi^{(k)}, \end{aligned} \quad (29)$$

де $n = 0, 1, \dots$

З першого рівняння системи (29) випливає, що $y_{-1}(r)$ – власне значення, а $\varphi^{(0)} \equiv \varphi_i^{(0)}$ – один з власних (правих) векторів матриці D . Власні значення $y_{-1}(r) = \lambda_i$ є коренями вікового (або характеристичного) рівняння $\det(D - y_{-1}) = 0$, а відповідні власні вектори $\varphi_i^{(0)}$ можна знайти в явному вигляді при діагоналізації матриці $D - y_{-1}$:

$$y_{-1}(r) = \lambda_i = \pm q, \quad (30a)$$

$$q = \left[1 + \mathcal{N}^2/r^2 - (\varepsilon - V(r))^2 \right]^{1/2}, \quad (30b)$$

$$\varphi_i^{(0)} = A_1 \begin{pmatrix} \varepsilon + 1 - V \\ \mp Q_{\mp} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \pm Q_{\pm} \\ \varepsilon - 1 - V \end{pmatrix}, \quad (31)$$

Тут $Q_{\pm} = q \pm \mathcal{N}/r$, індекс i приймає два знаки \pm (“плюс” або “мінус”), що відповідають двом значенням функції $y_{-1}(r) = \pm q$; $A_1(r)$ і $A_2(r)$ – деякі функції, які визначимо пізніше. Оскільки матриця $D(r)$ не є симетричною, то поряд з правими власними векторами $\varphi_i^{(0)}$ потрібно ввести ліві власні вектори $\check{\varphi}_i^{(0)}$:

$$\check{\varphi}_i^{(0)}(D - \lambda_i) = 0, \quad \check{\varphi}_i^{(0)} \neq (\varphi_i^{(0)})^T, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \check{\varphi}_i^{(0)} &= B_1(\varepsilon - 1 - V, \pm Q_{\pm}) = \\ &= B_2(\pm Q_{\pm}, -\varepsilon - 1 + V), \end{aligned} \quad (33)$$

де T – транспонування матриці. Легко перевірити, що ліві і праві власні вектори взаємоортогональні:

$$\left(\check{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_j^{(0)} \right) = \text{const} \cdot \delta_{ij}.$$

Нагадаємо, що $\check{\varphi}_i^{(0)}$ – вектор-рядок, а δ_{ij} – символ Кронекера. Для визначення y_0 покладемо в другому рівнянні системи (29) $\varphi^{(0)} = \varphi_i^{(0)}$ і помножимо обидві частини зліва на $\check{\varphi}_i^{(0)}$. Тоді з урахуванням (32) член з $\varphi^{(1)}$ обернеться в нуль, і приходимо до рівняння для $y_0(r)$, з якого знаходимо

$$y_0(r) = - \left(\check{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)'} \right) / \left(\check{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)} \right). \quad (34)$$

Підберемо нормувальні множники $A_{1,2}$ і $B_{1,2}$ в (31) і (33) так, щоб виконувалась рівність

$$\left(\check{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)'} \right) = \left(\check{\varphi}_i^{(0)'}, \varphi_i^{(0)} \right). \quad (35)$$

В цьому випадку $\int y_0 dr$ обчислюється в скінченному вигляді:

$$\int y_0 dr = \ln \left[\left(\check{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)} \right)^{-1/2} \right]. \quad (36)$$

Знайдемо співвідношення між функціями A_1 і B_1 (A_2 і B_2 знаходяться аналогічно). Підставляючи (31) та (33) в (35), приходимо до рівняння

$$\frac{A_1 B_1' - A_1' B_1}{A_1 B_1} = - \frac{V'}{q Q_{\mp}},$$

звідки

$$A_1 = B_1 \exp \left\{ \int \frac{V'}{q Q_{\mp}} dr \right\}. \quad (37)$$

Обчислимо тепер вектор-функцію $\varphi_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \varphi_F^{(1)} \\ \varphi_G^{(1)} \end{pmatrix}$ та y_1 . Оскільки $\det(D - y_{-1}) = 0$, то в другому рівнянні си-

стеми (29) достатньо розглянути тільки одну (верхню або нижню) компоненту. Виразивши з нього $\varphi_G^{(1)}$ через $\varphi_F^{(1)}$, отримуємо

$$\varphi_G^{(1)} = \mp \frac{Q_{\mp}}{1 + \varepsilon - V(r)} \varphi_F^{(1)} + \frac{A_1}{2q} \left[\frac{1 - \varepsilon + V(r)}{Q_{\pm}} V'(r) + q'(r) \pm \frac{\aleph}{r^2} \right]. \quad (38)$$

Для визначення y_1 помножимо третє рівняння системи (29) на $\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}$ зліва. Тоді,

враховуючи (32), (34), приходимо до виразу для y_1 :

$$y_1 = - \left[\left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(1)'} \right) \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)} \right) - \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)'} \right) \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(1)} \right) \right] / \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)} \right)^2. \quad (39)$$

Для того, щоб інтеграл $\int y_1 dr$ обчислювався в простому виді, припустимо, що

$$\int y_1 dr = - \frac{1}{2} \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(1)} \right) / \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(0)} \right). \quad (41)$$

$$\left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)}, \varphi_i^{(1)'} \right) = \left(\overset{\vee}{\varphi}_i^{(0)'} , \varphi_i^{(1)} \right). \quad (40)$$

Умову (40) завжди можна задовольнити вибором $\varphi_F^{(1)}$ або $\varphi_G^{(1)}$. Підставивши (31), (33), (38) в рівність (40), приходимо до виразів для $\varphi_F^{(1)}$ або $\varphi_G^{(1)}$:

Тоді

$$\varphi_F^{(1)} = \frac{A_1}{2} (1 + \varepsilon - V) \left\{ \int \frac{1}{q} \left[\pm \frac{V'(r) \alpha_1(r)}{q Q_{\mp}} - \frac{\aleph (\alpha_1(r))'}{r \left(\frac{Q_{\mp}}{r} \right)'} \right] dr \pm \frac{\alpha_1(r)}{Q_{\mp}} \right\}, \quad (42)$$

$$\varphi_G^{(1)} = \frac{A_1}{2} Q_{\mp} \left\{ \int \frac{1}{q} \left[- \frac{V'(r) \alpha_1(r)}{q Q_{\mp}} \pm \frac{\aleph (\alpha_1(r))'}{r \left(\frac{Q_{\mp}}{r} \right)'} \right] dr + \frac{\alpha_1(r)}{Q_{\mp}} \right\}, \quad (43)$$

де

$$\alpha_1(r) = \pm \frac{1}{2q} \left[\frac{1 - \varepsilon + V(r)}{Q_{\pm}} V'(r) + Q'_{\pm} \right].$$

Розв'язуючи подібним методом наступні рівняння системи (29), можна послідовно знайти члени $y_2, y_3, \dots, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \dots$ в розкладах (28). Але, як ми вже бачимо на

прикладі y_1 та $\varphi^{(1)}$, формули для них виявляються громіздкими, і тому в застосуваннях обмежуються, як правило, першими членами розкладу. Насправді це

пов'язано з тією обставиною, що розклади (28) за степенями \hbar в загальному випадку не збігаються, а є асимптотичними рядами, скінчене число членів яких дає хороше наближення для хвильової функції, якщо параметр розкладу – стала

Планка \hbar – досить малий. Таким чином, обмежуючись в розкладах (28) членами y_{-1} , y_0 та $\varphi^{(0)}$, отримуємо для A_1 і B_1 (з точністю до нормувальної сталої)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{qQ_{\pm}}} \exp \left[\int \left(\pm q + \frac{V'(r)}{2qQ_{\pm}} \right) dr \right] \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon - V(r) \\ \mp Q_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

для A_2 і B_2

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{qQ_{\pm}}} \exp \left[\int \left(\pm q - \frac{V'(r)}{2qQ_{\pm}} \right) dr \right] \begin{pmatrix} \pm Q_{\pm} \\ \varepsilon - 1 - V(r) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Обговоримо зміст одержаних формул. Насамперед зауважимо, що q співпадає (з точністю до i) з радіальним імпульсом релятивістської квазікласичної частинки. Знак $+$ ($-$) в (44) і (45) відповідає розв'язку, зростаючому (спадному) із зростанням r . Для спадного розв'язку (знак $-$) потрібно використовувати формулу (44) при $\aleph > 0$ і формулу (45) при $\aleph < 0$, для зростаючого – навпаки. Вибір зручної форми запису розв'язку визначається тим, щоб величина $Q_{\pm} = q \pm \aleph/r$ була додатня в підбар'єрній області. При іншому виборі розв'язку у виразах для F і G з'являються сингулярності (обертання в нуль множника Q_{\pm} , що наявний в знаменнику). Неважливо помітити, що ця сингулярність фіктивна, так як в цій же точці обертається в нуль і чисельник. Однак одержання формул для F і G , позбавлених від сингулярностей, вимагало б розкриття цієї невизначеності, що пов'язано з додатковими обчисленнями.

Застосуємо отримані вище формули до задачі про квазістаціонарний рівень, що є продовженням дискретного рівня електрона в закритичну область $Z > Z_{cr}$, коли $\varepsilon < -1$.

Виразу (30) відповідає ефективний потенціал

$$U(r, \varepsilon) = \varepsilon V - 1/2V^2 + \aleph^2/2r^2, \quad (46)$$

який відповідає притяганню на малих відстанях від ядра $r < r_-$ (при $Z\alpha > |\aleph|$) і відштовхуванню при $r > r_-$. Таким чином, ефективний потенціал (46) має вигляд потенціалу з бар'єром, зображений на рисунку 1, де r_0 , r_- і r_+ – точки повороту.

Хвильова функція квазістаціонарного стану має різний вигляд в різних областях: I) $r_0 < r < r_-$ – класично дозволена

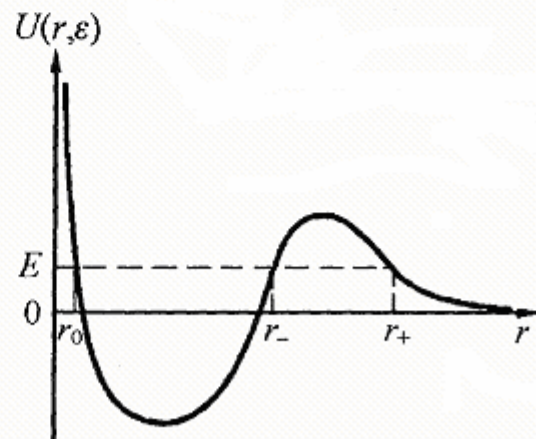


Рисунок 1. Вид ефективного потенціал $U(r, \varepsilon)$ при $\varepsilon < -1$, $E = (\varepsilon^2 - 1)/2$ енергія зв'язку електрона.

область, II) $r_- < r < r_+$, – підбар’єрна область, III) $r > r_+$. Розглянемо в наступному розділі поведінку радіальних хвильових функцій $F(r)$ і $G(r)$ в цих областях.

4. Хвильова функція діраківського електрона в класично дозволеній та забороненій областях

I. Область $r_0 < r < r_-$ – класично дозволена; в ній хвильові функції (44), (45) осцилюють

$$G = C_1^\pm \left(\frac{\varepsilon - V + 1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \Theta_1, \quad (47a)$$

$$F = C_1^\pm \operatorname{sgn} \aleph \left(\frac{\varepsilon - V - 1}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \Theta_2. \quad (47b)$$

Тут

$$p(r) = \sqrt{(\varepsilon - V)^2 - 1 - \frac{\aleph^2}{r^2}} \quad (48)$$

квазікласичний імпульс для радіального руху частинки, C_1^\pm – стала нормування,

$$\Theta_1 = \int_{r_0}^r \left(p - \frac{\aleph w}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \quad (49a)$$

$$\Theta_2 = \int_{r_0}^r \left(p - \frac{\aleph \tilde{w}}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4}, \quad (49b)$$

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{c^2 + E_l - V} - \frac{1}{r} \right),$$

$$\tilde{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{c^2 - E_l + V} - \frac{1}{r} \right).$$

Знаки \pm відповідають значенням $\aleph > 0$ і $\aleph < 0$. Якщо ширина рівня γ мала (що виправдовується відповіддю), то хвильову функцію квазістаціонарного стану можна нормувати на одну частинку, локалізовану в області I, нехтуючи її проникненням в класично заборонені області $r < r_0$ і $r > r_+$ [17]. При цьому $\cos^2 \Theta_i(r)$ замінюється на середнє значення 1/2:

$$|C_1^\pm| = \left\{ \int_{r_0}^{r_+} \frac{\varepsilon - V(r)}{p(r)} dr \right\}^{-1/2} = \left(\frac{2}{T} \right)^{1/2}, \quad (50)$$

де T – період коливань релятивістської частинки всередині потенціальної ями. Відмітимо, що в точках повороту r_0 і r_+ виконується рівність $\varepsilon - V = [1 + \aleph^2/r^2]^{1/2}$ і $\varepsilon - V > 1$ в області I.

II. Підбар’єрна область $r_- < r < r_+$ – класично заборонена. Тут $p=iq$, а величини q , y_1 і y_0 – дійсні. Як відомо [17], хвильова функція повинна спадати в глиб цієї області. Отже, розв’язками системи рівнянь Дірака (7) в підбар’єрній області для $\aleph < 0$ є

$$\psi = \frac{C_2^-}{\sqrt{qQ_-}} \exp \left[\int_{r_+}^r \left(-q - \frac{V'(r)}{2qQ_-} \right) dr \right] \begin{pmatrix} -Q_- \\ \varepsilon - 1 - V(r) \end{pmatrix}, \quad (51)$$

для $\aleph > 0$

$$\psi = \frac{C_2^+}{\sqrt{qQ_+}} \exp \left[\int_{r_+}^r \left(-q + \frac{V'(r)}{2qQ_+} \right) dr \right] \begin{pmatrix} \varepsilon - V(r) + 1 \\ Q_+ \end{pmatrix}, \quad (52)$$

III. В області $r > r_+$ квазістаціонарному стану відповідає розбіжна хвиля (виліта-

ючий позитрон):

для $\aleph < 0$

$$\psi = \frac{C_3^-}{\sqrt{pP_-}} \exp \left[\int_{r_+}^r \left(ip + \frac{V'(r)}{2pP_-} \right) dr \right] \begin{pmatrix} iP_- \\ \varepsilon - 1 - V(r) \end{pmatrix}, \quad (53)$$

для $\aleph > 0$

$$\psi = \frac{C_3^+}{\sqrt{pP_+}} \exp \left[\int_{r_+}^r \left(ip - \frac{V'(r)}{2pP_+} \right) dr \right] \begin{pmatrix} \varepsilon - V(r) + 1 \\ -iP_+ \end{pmatrix}, \quad (54)$$

де $P_{\pm} = p \pm i\aleph/r$.

Формулами (48)-(54) охоплюється весь діапазон значень r (крім області $r < r_0$, для якої вид хвильової функції тут не виписаний), за винятком околів точок повороту r_- і r_+ . Для обходу цих точок і зшивки розв'язків застосовуємо звичний метод [17]. Поблизу точок r_- і r_+ система

Дірака (7) зводиться до рівняння Шредінгера з ефективним потенціалом, який лінійно залежить від $r - r_{\pm}$ (розв'язок виражається через функцію Ейрі); можна також зшивати більш елегантним методом Цваана. Таким чином, зв'язок між константами в різних областях має вигляд

$$C_2^{\pm} = iC_3^{\pm} = \sigma C_1^{\pm} \left[\frac{|\aleph|}{(r_-^2 + \aleph^2)^{1/2} + r_-} \right]^{\sigma} \exp \left[- \int_{r_-}^{r_+} \left(q - \sigma \frac{V'(r)}{qQ_{\mp}} \right) dr \right], \quad (55)$$

де $\sigma = \text{sgn} \aleph / 2$.

Хоча формули (48)-(55) істотно відрізняються від формул нерелятивістської квазікласики і складніші від останніх, їх застосування до конкретних задач не зустрічає труднощів, оскільки всі величини в функціях F і G виражаються в квадратах.

На завершення вкажемо положення точок повороту для потенціалу (47). При $r_N < r_-$ точки r_{\pm} лежать за межами ядра і не залежать від моделі обрізання:

$$r_{\pm} = \frac{-\varepsilon Z \alpha \pm \mu}{k^2}, \quad k = (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}, \\ g = (Z^2 \alpha^2 - \aleph^2)^{1/2}, \quad \mu = \sqrt{(\varepsilon Z \alpha)^2 - (kg)^2}.$$

Для того, щоб знайти r_0 , припустимо, що $|\varepsilon| \ll Z\alpha/r_N$ (радіус ядра атома $r_N \sim 0.02$). Тоді r_0 визначається з рівняння $f(x) - \rho/x = 0$, де $x = r/r_N$,

$\rho = |\aleph|/Z\alpha$. Звідси для моделі обрізання I $x_0 = \rho$, а у випадку моделі II

$$x_0 = 2 \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \rho \right).$$

Для потенціалу (47) при $r > r_N$

$$p(r) = \frac{g}{r} \left[\left(1 - \frac{r}{r_-} \right) \left(1 - \frac{r}{r_+} \right) \right]^{1/2}.$$

Тому умова застосовності квазікласики набуває вигляду

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{p} \right) = g^{-1} \left(1 - \frac{r}{r_m} \right) \left[\left(1 - \frac{r}{r_-} \right) \left(1 - \frac{r}{r_+} \right) \right]^{1/2} \ll 1, \\ r_m^{-1} = (r_+^{-1} + r_-^{-1})/2$$

і виконується при $g \gg 1$. Тут r_m – точка максимуму ефективного потенціалу (46).

Фактично метод ВКБ застосовний аж до $g \sim 1$, в чому можна перекоонатися, порівнюючи квазікласичні формули з точними розрахунками.

5. Положення і ширина квазістаціонарних рівнів в нижньому континуумі

Знайдемо енергію квазістаціонарних станів, які є продовженням рівнів дискретного спектру в закритичну область $Z > Z_{cr}$, $\epsilon < -1$. Нехтуючи проникністю бар'єра в області $r_- < r < r_+$, отримуємо з (47) умову квантування:

$$\int_{r_-}^{r_+} \left(p - \frac{\kappa w}{pr} \right) dr = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (56)$$

$$\epsilon Z \alpha / \lambda - \gamma = n_r = n + [1 - \text{sgn} \kappa] / 2 = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \kappa > 0, \\ 1, 2, 3, \dots, \kappa < 0. \end{cases} \quad (58)$$

Добре видно, що формула (58) співпадає з виразом (10) (а, отже, й з (11)). Тобто, як і слід було чекати для кулонівського поля, умова квантування (56) відтворює точний результат для енергії.

Рівняння (56) визначає дійсну частину енергії рівня $\epsilon_{nl} = \epsilon - i\gamma/2$. Воно відрізняється від звичайного правила квантування Бора-Зоммерфельда [17] релятивістським виразом для квазіімпульсу $p(r)$ і включенням поправки $\sim w$, зумовленої спин-орбітальною взаємодією. Врахування цієї поправки не перевищує точності методу ВКБ. Покажемо це на прикладі кулонівського поля $V(r) = -Z\alpha/r$, $0 < \epsilon < 1$. Тоді після інтегрування умова (56) запишеться у вигляді

$$\pi [\epsilon Z \alpha / \lambda - \gamma + \text{sgn} \kappa / 2] = \pi (n + 1/2), \quad (57)$$

з якої випливає, що

Обчислюючи інтеграли в (56) для потенціалу (47) і враховуючи, що $|\epsilon| \ll Z\alpha/r_N$, отримуємо трансцендентне рівняння відносно ϵ :

$$\frac{\epsilon Z \alpha}{2k} \ln \left| \frac{\epsilon |Z\alpha + kg}{\epsilon |Z\alpha - kg} \right| - g \ln \frac{r_N e \mu}{2g^2} + \sigma \arccos \frac{g^2 - \epsilon \kappa^2}{Z \alpha \mu} + I = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (59)$$

де

$$I = Z \alpha \int_{x_0}^1 \left[\sqrt{f^2(x) - \frac{\rho^2}{x^2}} + \frac{\kappa}{2(Z\alpha)^2} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 f^2(x) - \rho^2}} \right] dx, \quad e = 2.718 \dots \quad (60)$$

Розглянемо, як і в розділі 2, модель I, для якої функція обрізання $f(x) = 1$. В цьому випадку інтеграл (60) обчислюється в аналітичному вигляді:

$$I = g + (\sigma - |\kappa|) \arccos \frac{|\kappa|}{Z\alpha}.$$

На рисунку 2 подано числові розв'язки трансцендентних рівнянь (21)-(24) для, а

також рівняння (59) для трьох найнижчих станів $1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ та $2s_{1/2}$. Проаналізуємо хід (залежність від Z) енергетичних рівнів у всій області дискретного спектра $\epsilon \leq 1$ на прикладі основного стану $1s_{1/2}$. Починаючи з $Z = 0$, $\epsilon = 1$ рівень енергії $\epsilon_0(Z)$ опускається до $Z \approx 137/2$, де роз'язки рівняння Дірака для точкового ядра втрачають зміст (пунктирна лінія). Енергетичний рівень електрона у

водневоподібному атомі із скінченими розмірами ядра перетинає поріг $\varepsilon = 0$ при $Z \approx 83$ (суцільна лінія) і при $Z_{cr} \approx 107$ опускається в нижній континуум, де стає квазістаціонарним.

Для глибоких рівнів $1 \ll |\varepsilon| \ll Za/r_N$ рівняння (59) розв'язується в явному вигляді:

$$\varepsilon = -\frac{2g^2}{|N|r_N} \left(\frac{|N|}{Z\alpha - g} \right)^{-\frac{2\alpha}{g}} \exp \left\{ \frac{1}{g} - 1 - \frac{\pi}{g} \left[n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\sigma \arccos \rho}{\pi} \right) \right] \right\}. \quad (61)$$

Перейдемо до обчислення ширини рівня $\gamma = -2 \text{Im} \varepsilon_n$, яка співпадає з ймовірністю спонтанного народження позитронів. Для цього потрібно перше рівняння системи (7) домножити на G^* , а друге рівняння взяти комплексно спряжене і домножити його на F . Після цього отримані рівності треба додати і результат проінтегрувати по r в межах від 0 до ∞ . Тоді враховуючи, що $F(0) = G(0) = 0$, уявна частина одержаного рівняння дасть вираз

для γ

$$\gamma = 2 \text{Im} [G^*(r)F(r)]_{r \rightarrow \infty}. \quad (62)$$

За допомогою формул (50), (53)-(55) отримуємо

$$\gamma = \frac{1}{T} \exp \left[-2 \int_{r_-}^{r_+} \left(q + \frac{Nw}{qr} \right) dr \right]. \quad (63)$$

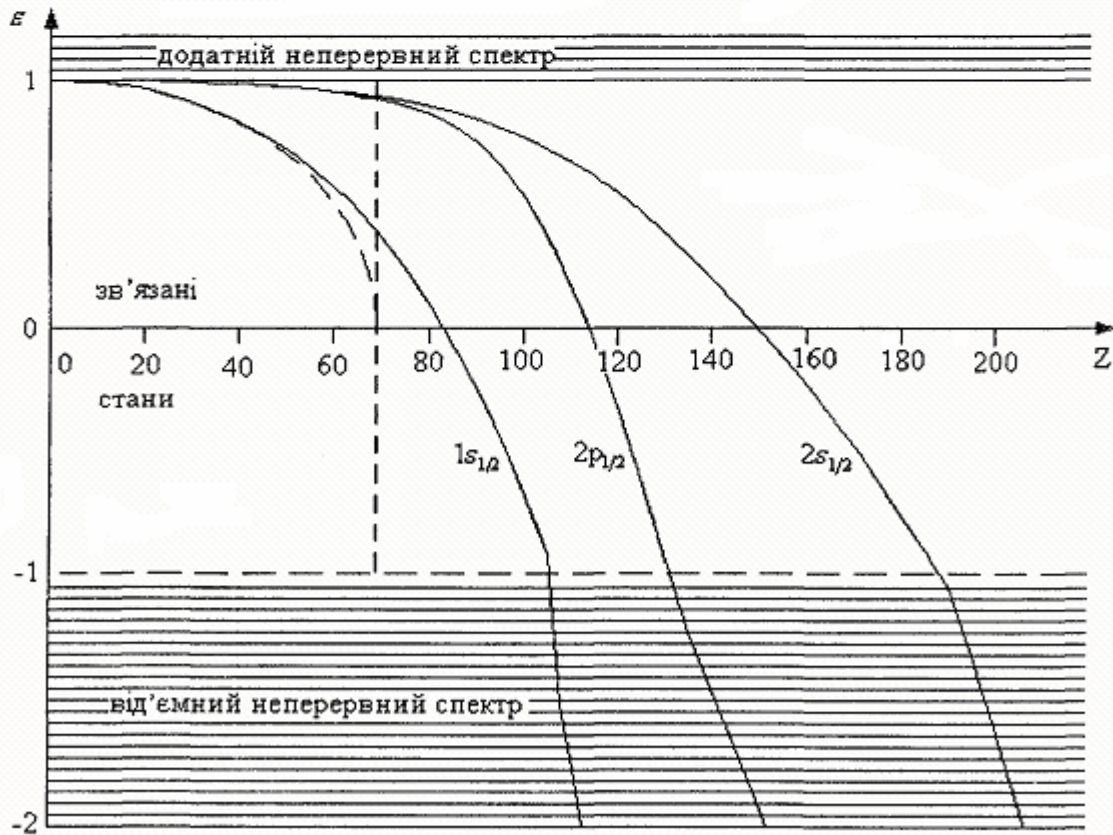


Рисунок 2. Хід енергетичних рівнів $\varepsilon(Z)$ для трьох найнижчих станів $1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ та $2s_{1/2}$.

У випадку кулонівського поля всі інтеграли беруться точно, і ми знаходимо

$$\gamma = \gamma_0 \exp\left\{2\pi Z\alpha \left[\frac{\varepsilon}{k} + \sqrt{1 - \rho^2} \right]\right\}, \quad (64)$$

$$T = \frac{1}{\gamma_0} = -\frac{2}{k^2} \left[\varepsilon g + \frac{Z\alpha}{2k} \ln \left(\frac{|\varepsilon|Z\alpha + kg}{|\varepsilon|Z\alpha - kg} \right) \right]. \quad (65)$$

Отриманими формулами описується спектр квазістаціонарних рівнів в нижньому континуумі (їх положення і ширина) для сферичного надважкого ядра з зарядом $Z > Z_{cr}$.

6. Заключні зауваження

В даній роботі побудовано точні розв'язки (2+1)-вимірного рівняння Дірака в сильному кулонівському полі в докритичній області $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ та ВКБ-розв'язки в закритичній області $\varepsilon < -1$. За допомогою отриманих квазікласичних формул знайдено спектр квазістаціонарних рівнів (їх

положення та ширина) в нижньому континуумі $\varepsilon < -1$ для сферичного надважкого ядра з зарядом $Z > Z_{cr}$. Порівняння величин критичного заряду Z_{cr} , отримані з точних розв'язків рівняння Дірака з результатами, отриманими із квазікласичної формули (59) вказує на їх хорошу узгодженість. Зауважимо, що в основному стані для моделі прямокутного обрізання критичний заряд рівний 107 в (2+1)- і 173 в (3+1)-вимірних КЕД, відповідно. Таким чином, діраківський вакуум в двох просторових вимірах в присутності сильного кулонівського поля є нестабільним по відношенню до народження електрон-позитронних пар при значно меншому критичному заряді, ніж у тривимірному випадку.

Робота виконана при підтримці міжнародної організації INTAS (Ref. № 99-01326).

Література

1. A.M.J. Schakel, G.M. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 2653, (1991).
2. A. Neagu, A.M.J. Schakel, *Phys. Rev. D.*, **48**, 1785, (1993).
3. V.R. Khalilov, *Electrons in Strong Electromagnetic Fields: an Advanced Classical and Quantum Treatment*, (Gordon & Breach Sci. Publ., Amsterdam, 1996).
4. *The Quantum Hall Effect*, 2nd ed. Eds R.E. Prange, S.M. Girvin. (Springer-Verlag, New York, 1990).
5. F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, (World Scientific, Singapore, 1990).
6. J.M. Leinaas, J. Myrcheim, *Nuovo Cimento B*, **66**, 1 (1977); G.A. Goldin, R. Menikoff, D.H. Sharp, *J. Math. Phys.*, **43**, 1664 (1981); F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **48**, 1144 (1982); **49**, 957 (1982).
7. С.С. Герштейн, Я.Б. Зельдович, *ЖЭТФ*, **57**, 654 (1969).
8. J. Reinhardt, W. Greiner, *Rep. Prog. Phys.*, **40**, 219, (1977).
9. J. Rafelski, L.P. Fulcher, A. Klein, *Phys. Rep. C*, **38**, 227, (1978).
10. M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, *Phys. Rep. C*, **85**, 51, (1982).
11. В.С. Попов, *Электродинамика сверхсильных кулоновских полей (Z>137)*. Препринт ИТЭФ-169, (ИТЭФ, Москва, 1980).
12. А.А. Гриб, С.Г. Мамаев, В.М. Мостапенко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, (Энергоатомиздат, Москва, 1988).
13. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, (Наука, Москва, 1989).
14. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, I*, (Наука, Москва, 1973) 294 с.
15. В.С. Попов, Д.Н. Воскресенский, В.Л. Елецкий, В.Д. Мур, *ЖЭТФ*, **76**, 431 (1979).
16. В.Р. Халилов, *ТМФ*, **116**, 277 (1998).
17. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, (Наука, Москва, 1989).

THE RELATIVISTIC HYDROGEN-LIKE ATOM IN 2+1 DIMENSIONS

O.K. Reity, V.Yu. Lazur

Uzhgorod National University, 88000 Uzhgorod, Voloshina St. 32

e-mail: reity@univ.uzhgorod.ua,

lazur@univ.uzhgorod.ua

In (2+1)-dimensional space the exact solutions of the Dirac equation with cutoff Coulomb potential that takes into account the nucleus size is obtained in the undercritical region of the discrete spectrum. Solutions of the Dirac equation in a strong external field are obtained in the WKB approximation. A field is considered strong if the electron binding energy exceeds $2mc^2$ and the discrete spectrum levels may be lowered into the lower continuum. The wave functions in the classically allowed and forbidden regions are found and the conditions for matching them on transition through the turning point are obtained. The WKB method is applied to the following problems: 1) generalization of the Bohr-Sommerfeld quantization conditions with allowance for relativistic effects and the spin in 2+1 dimensions; 2) finding energy and width of the quasistationary level in the lower continuum.