УДК 539.18

В.В. Кулиш[1], А.В. Лысенко[2], М.Ю. Ромбовский[2], В.В. Коваль[2], Ю.Ю. Волк[2]
[1]Национальный авиационный университет, пр. Космонавта Комарова, 1, 03058, Киев
[2]Сумской государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007, Сумы
e-mail: yozh92@gmail.com

К ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ШИРОКОГО МУЛЬТИГАРМОНИЧЕСКОГО СПЕКТРА В ДВУХПОТОКОВОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ

Построена квадратическая нелинейная теория мультигармонических взаимодействий гармоник волны пространственного заряда, нарастающей вследствие эффекта двухпотоковой неустойчивости в двухскоростном релятивистском электронном пучке с учетом множественных трехволновых параметрических резонансных взаимодействий. Проведен анализ влияния параметров двухскоростного релятивистского пучка на форму частотного спектра нарастающей мультигармонической волны пространственного заряда, возбуждаемой в исследуемой системе.

Ключевые слова: двухпотоковая неустойчивость, множественные трехволновые параметрические резонансы, мультигармоническая волна пространственного заряда.

Вступление

В последнее время интенсивное развитие в науке и технике получило направление, связанное с созданием и изучением систем, которые способны формировать мощные ультракороткие электромагнитные импульсы (включая фемтосекундные), сигналы с широким частотным спектром [1, 2]. Такие сигналы имеют широкое практическое применение для ряда фундаментальных и прикладных исследований в области физики, химии, биологии, медицины [2].

Как показали исследования [3, 4], двухпотоковые супергетеродинные лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) могут работать в режиме формирования мощных ультракоротких кластеров электромагнитного поля, когда частота первой гармоники много меньше критической частоты двухпотоковой неустойчивости. В этом режиме в двухпотоковом релятивистском электронном пучке возбуждается мультигармоническая нарастающая волна пространственного заряда (ВПЗ) с аномальным участком спектра, в котором высшие гармоники имеют более высокие амплитуды. Благодаря параметрически-резонансным взаимодействиям гармоник мультигармонической ВПЗ с гармониками мультигармонической системы накачки возбуждается мультигармонический электромагнитный сигнал, становится возможным формирование ультракороткого кластера, в том числе и фемтосекундного.

Динамика гармоник мультигармонической нарастающей ВПЗ в двухпотоковом электронном релятивистском пучке с одинаковыми парциальными концентрациями и близкими парциальными скоростями была изучена в работе [4]. Случай, когда парциальные концентрации и скорости пучков являются существенно различными, ранее не рассматривался. Представленная работа ликвидирует этот пробел.

Модель

Рассматриваем двухскоростной релятивистский электронный пучок, движущийся вдоль оси Z, парциальные скорости которого равны u_1 и u_2, а концентрации – n_1 и n_2. Считаем, что в поперечной плоскости такой пучок является однородным, тепловым разбросом скоростей и столкновениями электронов пренебрегаем. Рассматриваем случай, когда в двухпотоковом релятивистском электронном пучке имеет место эффект двухпотоковой неустойчивости. Это означает, что в исследуемой системе существует ВПЗ, амплитуда которой нарастает по экспоненциальному закону (нарастающая ВПЗ) [1, 5]. В общем случае такую волну считаем мультигармонической, напряженность которой имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \sum_{m=1}^{N} \left(E_m \exp(ip_m) + c.c.\right)\boldsymbol{e}_z , \qquad (1)$$

где $p_m = m\omega \cdot t - k_m \cdot z$ – фаза, $m\omega$ и k_m – частота и действительная часть волнового числа m-й гармоники нарастающей ВПЗ; E_m – комплексная амплитуда m-й гармоники; N – число гармоник мультигармонической ВПЗ; $\boldsymbol{e}_z$.- единичный вектор оси z. Если частота первой гармоники ω будет много меньше критической частоты ω_{cr} двухпотоковой неустойчивости, то все гармоники ВПЗ, частота которых меньше критической ($m\omega < \omega_{cr}$) будут усиливаться вследствие двухпотоковой неустойчивости.

Особенностью двухпотоковой неустойчивости является то, что нарастающая ВПЗ характеризуется линейным законом дисперсии [1, 3-5] $k_m = 2m\omega/(u_1 + u_2)$. Это значит, что

$$k_m = m \cdot k_1, \qquad p_m = m \cdot p_1. \qquad (2)$$

Поэтому в исследуемой системе возникают трехволновые параметрические резонансные взаимодействия между гармониками волн, условия которых имеют вид

$$p_{m\alpha} = p_{m\beta} + p_{m\gamma} \text{ или же } m_\alpha = m_\beta + m_\gamma. \quad (3)$$

Здесь числа m_α, m_β и m_γ соответствуют номерам гармоник, которые принимают участие в трехволновом параметрическом резонансе. Несложно убедиться, что условию (3) удовлетворяет множество гармоник, например: $7 = 6 + 1$, $7 = 5 + 2$, $7 = 3 + 4$, $7 = 9 + (-2)$ и т.д. Фактически каждая нарастающая гармоника взаимодействует с каждой. О такой ситуации говорим, как о множественном трехволновом параметрическом резонансном взаимодействии [4, 6].

Таким образом, в исследуемой системе реализуется как двухпотоковая неустойчивость, так и множественные трехволновые параметрические резонансные взаимодействия.

Уравнения для полей

Для количественного анализа выше описанных процессов используем квазигидродинамическое уравнение, уравнение непрерывности и уравнения Максвелла. К этим уравнениям применяем методы иерархической теории колебаний и волн [1]. В результате получаем систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд гармоник напряженности электрического поля нарастающей ВПЗ в квадратическом приближении:

$$C_{2,m}\frac{d^2E_m}{dz^2} + C_{1,m}\frac{dE_m}{dz} + D_m E_m =$$
$$= C_{3,m}\left\langle \boldsymbol{E}\int \boldsymbol{E}dp_1\right\rangle_{mp_1}. \qquad (4)$$

Здесь индекс m принимает значение от 1 до N. Дисперсионная функция имеет вид

$$D_m = -ik_m\left(1 - \sum_{q=1}^{2}\frac{\omega_{p,q}^2}{(m\omega - k_m u_q)^2\gamma_q^3}\right). \quad (5)$$

Остальные коэффициенты системы (4) определяются параметрами двухскоростного релятивистского электронного пучка, соответствующими волновыми числами и частотами:

$$C_{1,m} = \frac{\partial D_m}{\partial(-ik_m)}, \quad C_{2,m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 D_m}{\partial(-imk_m)^2},$$
$$C_{3,m} = \sum_{q=1}^{2}\left[\frac{3e\omega_{p,q}^2 k_1}{im(\omega - k_1 u_q)^3 m_e \gamma_q^6}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{k_1}{\omega - k_1 u_q} - \frac{u_q\gamma_q^2}{c^2}\right)\right], \quad \left\langle \boldsymbol{E}\int \boldsymbol{E}dp_1\right\rangle_{mp_1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m_1=1}^{N}\left[E_{m_1}e^{im_1p_1}+c.c.\right]\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{m_1=1}^{N}\left[\frac{E_{m_1}}{im_1}e^{im_1p_1}+c.c.\right]\right)\cdot e^{-imp_1}dp_1, \quad (6)$$

$$\gamma_q = 1/\sqrt{1-(u_q/c)^2}, \ \omega_{p,q}^2 = n_q e^2/(\varepsilon_0 m_e).$$

В этих соотношениях e и m_e – заряд и масса электрона, c – скорость света. Также отметим, что система уравнений (4) справедлива для двухскоростного релятивистского электронного пучка с существенно различными парциальными концентрациями n_1, n_2 и релятивистскими факторами γ_1, γ_2.

Система (4) описывает и экспоненциальное нарастание гармоник ВПЗ вследствие двухпотоковой неустойчивости, и множественные трехволновые резонансные взаимодействия между гармониками нарастающей ВПЗ.

Отметим, когда частота m-й гармоники ВПЗ меньше критической частоты двухпотоковой неустойчивости ω_{cr}, то дисперсионное уравнение $D_m(m\omega, k_{\rm m}) = 0$ имеет комплексные решения

$$k_{compl,m} = k_m + i\Gamma_m, \quad (7)$$

где k_m и $i\Gamma_m$ – действительная и мнимая составляющие комплексного волнового числа. О величине Г говорят как об инкременте нарастания, так как Г определяет экспоненциальное нарастание гармоник. Фазы волн $p_m = m\omega\cdot t - k_m\cdot z$ определяются исключительно действительной частью комплексного волнового числа. Поэтому слагаемое $D_m\cdot E_m = D_m(m\omega, k_m)\cdot E_m$ в (4) также определяется действительной частью k_m комплексного волнового числа и из-за этого не равно нулю. Это приводит к тому, что слагаемые $D_m\cdot E_m$ и $C_{2,m}\cdot d^2E_m/dz^2$ в системе (4) являются ответственными за экспоненциальное нарастание ВПЗ вследствие двухпотоковой неустойчивости. Действительно, если амплитуду нарастающей ВПЗ представить в виде $E_m \propto \exp(\Gamma_m z)$, подставить в уравнение (4), в котором удержать только линейные по E_m слагаемые, то для Γ_m получим уравнение

$$C_{2,m}\Gamma_m^2 + C_{1,m}\Gamma_m + D_m = 0. \quad (8)$$

Отсюда легко получить

$$\Gamma_m = -\frac{C_{1,m}}{2C_{2,m}} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{1,m}}{2C_{2,m}}\right)^2 - \frac{D_m}{C_{2,m}}} \approx \pm\sqrt{-\frac{D_m}{C_{2,m}}}. \quad (9)$$

Здесь учтено, что, как показывают численные оценки, $|C_{1,m}/(2C_{2,m})|^2 << |D_m/C_{2,m}|$. Таким образом, в системе уравнений (4) слагаемые $D_m\cdot E_m$ и $C_{2,m}\cdot d^2E_m/dz^2$ отвечают за экспоненциальное нарастание волн.

За множественные трехволновые параметрические резонансы в системе (4) ответственны слагаемые $C_{1,m}$ и $C_{3,m}$, которые по своей структуре совпадают со стандартными уравнениями, описывающие параметрические трехволновые взаимодействия [7].

Анализ

Используя систему уравнений (4), проведем анализ формы спектра мультигармонической ВПЗ в зависимости от параметров двухскоростного релятивистского электронного пучка в слабосигнальном приближении, когда процесссами насыщения можно пренебречь. Рассматриваем случай, когда на входе (z = 0) возбуждена только одна гармоника ВПЗ, частота которой в 27 раз меньше критической частоты двухпотоковой неустойчивости ω_{cr}. С одной стороны, вследствие параметрических резонансных взаимодействий в двухскоростном электронном пучке происходит возбуждение и усиление высших гармоник. С другой стороны, эти гармоники будут также усиливаться из-за эффекта двухпотоковой неустойчивости. Так как инкременты усиления, которые определяются эффектом двухпотоковой неустойчивости, гораздо больше инкрементов усиления трехволнового параметрического резонанса, то результирующее усиление гармоник будет, по сути, определяться инкрементами нарастания двухпотоковой неустойчивости Γ_m. В итоге следует ожидать, что спектр гармоник, или же зависимость амплитуды гармоники от частоты при некотором значении продольной координаты z будет определяться зависимостью инкремента нарастания от частоты $\Gamma = \Gamma(\omega)$.

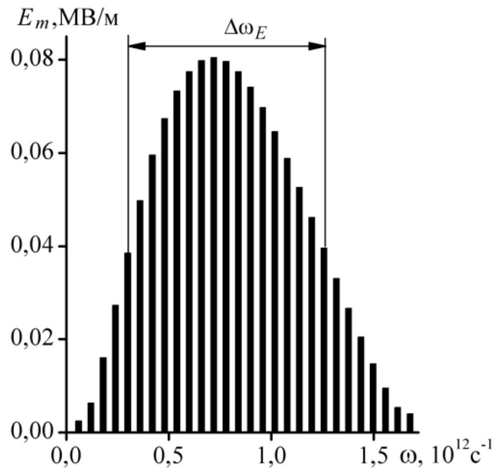

Рис. 1. Зависимость модулей комплексных амплитуд гармоник напряженности электрического поля ВПЗ E_m от частоты ω для продольной координаты $z = 120$ см. Параметры системы: $\omega_{p,1} = \omega_{p,2} = 3{,}0\cdot10^{10}$ с$^{-1}$; $\gamma_1 = 3{,}65$; $\gamma_2 = 3{,}35$.

Выше сформулированное утверждение подтверждают результаты численного анализа. Так на рис. 1 представлен спектр мультигармонической ВПЗ в точке $z = 120$ см двухскоростного релятивистского электронного пучка. На рис. 2 представлена зависимость инкремента нарастания от частоты $\Gamma = \Gamma(\omega)$, полученная в результате численного решения дисперсионного уравнения $D(\omega,k) = 0$ для двухскоростного электронного пучка с теми же параметрами (дисперсионная функция $D(\omega,k)$ определяется соотношением (5)). Сопоставляя зависимости, представленные на рис. 1 и 2, видим, что они коррелируют друг с другом. Определим ширину спектра мультигармонической ВПЗ исходя из рис. 1 и 2. При этом под шириной спектра будем понимать частотный интервал $\Delta\omega_E$ между точками на рис. 1, в которых модуль комплексной амплитуды принимает половинное значение от максимального. В случае рис. 2 под шириной спектра понимаем частотный интервал $\Delta\omega_\Gamma$ между точками, в которых инкремент нарастания Γ принимает половинное значение от максимального. Из рис. 1 и 2 следует, что $\Delta\omega_E = 1{,}1\cdot10^{12}$ с$^{-1}$, $\Delta\omega_\Gamma = 1{,}2\cdot10^{12}$ с$^{-1}$. Видим, что ширина спектра, определенная двумя разными способами, практически совпадает. Это значит, что анализируя зависимость инкремента нарастания от частоты $\Gamma = \Gamma(\omega)$ при различных параметрах двухпотокового релятивистского электронного пучка, мы можем оценить ширину спектра мультигармонической ВПЗ, которая формируется в исследуемой системе.

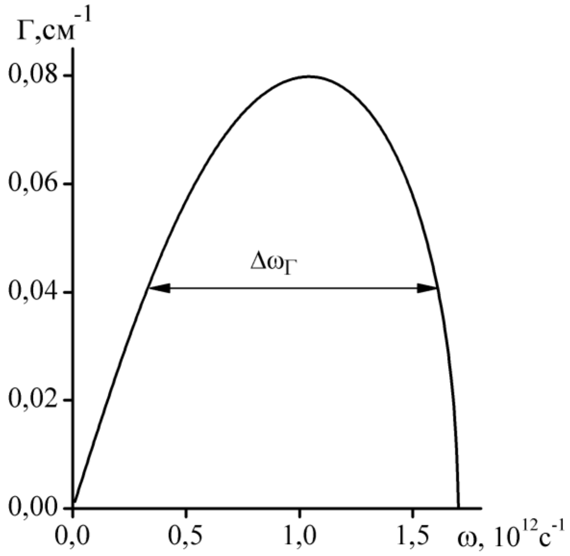

Рис. 2. Зависимость инкремента нарастания Γ от частоты ω для двухскоростного релятивистского пучка. Параметры системы такие же, как и в случае рис. 1.

Используя выше изложенный подход, проведем анализ зависимости ширины спектра мультигармонической ВПЗ от параметров двухскоростного релятивистского электронного пучка. Выясним, при каких условиях можно получить спектры мультигармонической ВПЗ с наибольшей шириной.

Двухскоростной релятивистский электронный пучок будем характеризовать парциальными плазменными частотами $\omega_{p,1}$, $\omega_{p,2}$ и парциальными релятивистскими факторами γ_1, γ_2. Перейдем от параметров $\omega_{p,1}$, $\omega_{p,2}$, γ_1, γ_2 к $\omega_{p0} = (\omega_{p,1} + \omega_{p,2})/2$ – средней плазменной частоте, $\Delta\omega_p = \omega_{p,1} - \omega_{p,2}$ – разности плазменных частот, $\gamma_0 = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ – среднему релятивистскому фактору, $\Delta\gamma = (\gamma_1 - \gamma_2)$ – разности релятивистских факторов. Проведем исследование зависимости ширины спектра мультигармонической ВПЗ от ω_{p0}, $\Delta\omega_p$, γ_0, $\Delta\gamma$.

Зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при различных средних значениях релятивистского фактора $\gamma_0 = 2 \div 5{,}5$ представлена на рис. 3. Видим, что при увеличении γ_0 происходит увеличение ширины частотного спектра $\Delta\omega$ мультигармонической ВПЗ. Наибольшее значение ширины спектра достигается при наибольшем значении среднего релятивистского фактора, в данном случае при $\gamma_0 = 5{,}5$ получаем $\Delta\omega = 2{,}7\cdot10^{12}$ с$^{-1}$. При этом, как следует из рис. 3, инкременты нарастания уменьшаются, что приведет к увеличению длины насыщения ВПЗ в исследуемой системе. Какой при этом будет максимальная амплитуда ВПЗ? Ответ на этот вопрос может быть получен только в кубическом нелинейном приближении, когда будут учтены эффекты насыщения. Динамика изменения ширины частотного спектра с повышением среднего значения релятивистского фактора γ_0 проведенная с помощью системы уравнений (4) полностью совпадает с изложенной выше.

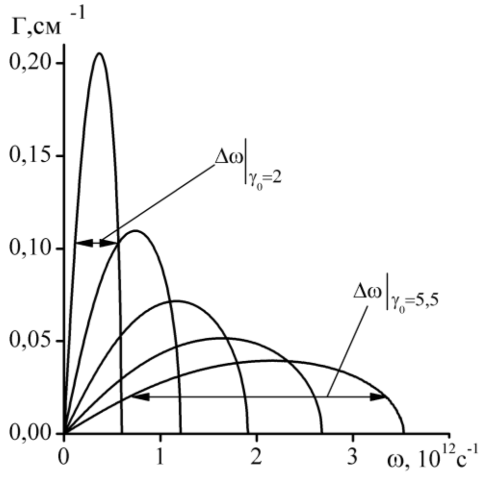

Рис. 3. Зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при различных средних значениях релятивистского фактора γ_0. Параметры системы: $\gamma_0 = 2 \div 5{,}5$; $\Delta\gamma = 0{,}3$; $\omega_{p0} = 3{,}0\cdot10^{10}$ с$^{-1}$; $\Delta\omega_p = 0$.

На рис. 4 представлена зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при различных значениях разности парциальных релятивистских факторов $\Delta\gamma = 0{,}2 \div 2{,}0$. Видим, при увеличении $\Delta\gamma$ пучка происходит уменьшение ширины частотного спектра.

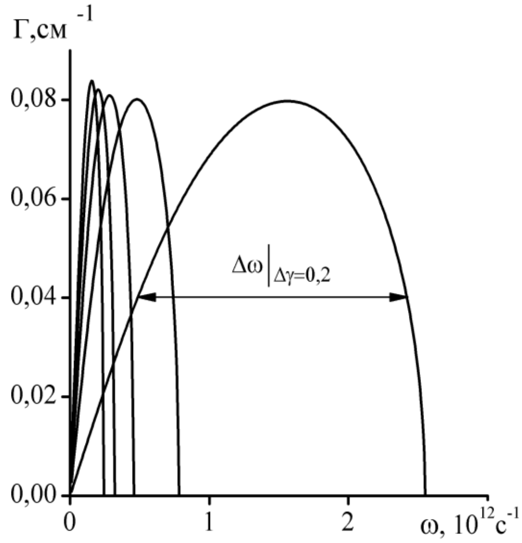

Рис. 4. Зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при различных значениях разности парциальных релятивистских факторов $\Delta\gamma$. Параметры системы: $\gamma_0 = 3{,}5$; $\Delta\gamma = 0{,}2 \div 2{,}0$; $\omega_{p0} = 3{,}0\cdot10^{10}$ с$^{-1}$; $\Delta\omega_p = 0$.

При этом максимальное значение инкремента нарастания остается практически одинаковым. Максимальная ширина частотного спектра в данном случае достигается при $\Delta\gamma = 0{,}2$ и, как следует из рис. 4, равна $1{,}9\cdot10^{12}$ с$^{-1}$. Отметим, что нижний предел $\Delta\gamma$ обусловлен качеством электронного пучка, а именно, тепловым разбросом электронов по скоростям.

На рис. 5 представлена зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при изменении среднего значения плазменной частоты $\omega_{p0} = (3{,}0 \div 7{,}0)\cdot10^{10}$ с$^{-1}$. Видим, что увеличение ω_{p0} приводит как к увеличению ширины частотного спектра, так и к увеличению максимального значения инкремента нарастания.

Зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при изменении разности парциальных значений плазменной частоты $\Delta\omega_p$ (рис. 6) показывает, что форма спектра (ширина частотного спектра и максимальное значение инкремента нарастания) меняются незначительно. Как следует из рис. 6, при увеличении разности плазменных частот до величины равной среднему значению плазменной частоты $\Delta\omega_p = \omega_{p0} = 3{,}0\cdot10^{10}$ с$^{-1}$ ширина частотного спектра $\Delta\omega$ уменьшается не более чем на 10%.

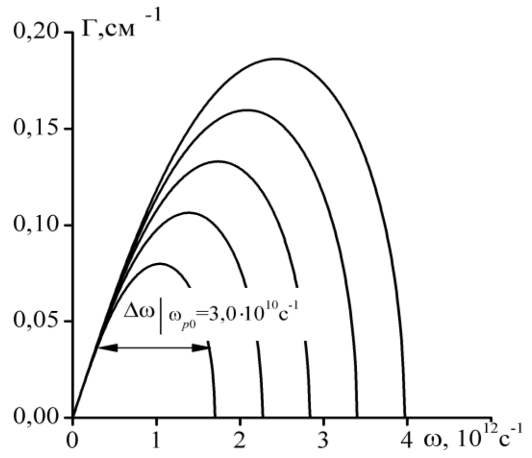

Рис. 5. Зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при различных значениях средней плазменной частоты ω_{p0}. Параметры системы: $\omega_{p0} = (3{,}0\div7{,}0)\cdot10^{10}$ c^{-1}; $\Delta\omega_p = 0$; $\gamma_0 = 3{,}5$; $\Delta\gamma = 0{,}3$.

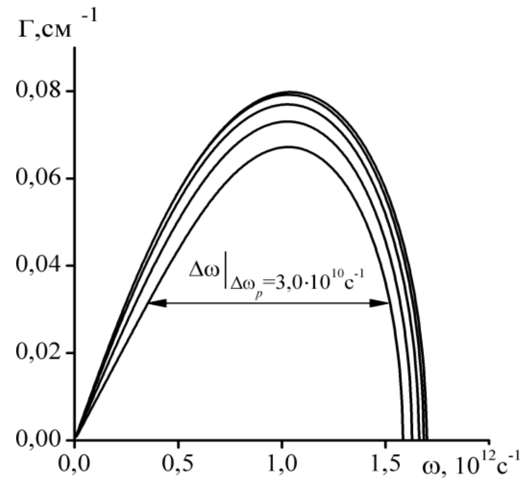

Рис. 6. Зависимость инкремента нарастания Г от частоты ω при различных значениях разности плазменных частот $\Delta\omega_p$. Параметры системы: $\gamma_0 = 3{,}5$; $\Delta\gamma = 0{,}3$; $\omega_{p0} = 3{,}0\cdot10^{10}$ c^{-1}; $\Delta\omega_p = (0\div3{,}0)\cdot10^{10}$ c^{-1}.

Следует заметить, что зависимости ширины частотного спектра от параметров двухскоростного релятивистского электронного пучка, которые получены выше с помощью анализа инкремента нарастания как функции частоты $\Gamma = \Gamma(\omega)$, полностью совпадают с результатами, полученными с помощью системы уравнений (4).

Таким образом, для получения мультигармонических волн пространственного заряда с широким частотным спектром следует использовать плотные, высокоэнергетические парциальные электронные пучки, характеризующиеся близкими релятивистскими факторами.

Выводы

Таким образом, в работе построена квадратическая нелинейная теория, описывающая динамику мультигармонической волны пространственного заряда, частоты гармоник которой меньше критической частоты двухпотоковой неустойчивости. В квадратическом приближении получена система дифференциальных уравнений для амплитуд напряженности гармоник мультигармонической ВПЗ, учитывающая как эффект двухпотоковой неустойчивости, так и множественные трехволновые параметрические резонансы между гармониками волн. Проведен анализ влияния параметров двухскоростного релятивистского электронного пучка на ширину спектра ВПЗ. Показано, что ширина частотного спектра мультигармонической ВПЗ увеличивается с увеличением среднего значения плазменной частоты, среднего значения релятивистского фактора и уменьшением разности релятивистских факторов. Выяснено, что ширина исследуемого спектра практически не зависит от разности парциальных плазменных частот.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kulish V.V. Hierarchic electrodynamics and free electron lasers. Baca Raton, London, New York: CRC Press, 2011.
2. Diels J.C. Ultrashort laser pulse phenomena. New York: Academic Press, 2006.
3. Kulish V.V., Lysenko O.V., Savchenko V.I., Majornikov I.G. Laser Physics, 2005. – v. 15, P. 1629.
4. Kulish V.V., Lysenko A.V., Rombovsky M.Yu. // Plasma Phys. Rep., 2010. – v. 36. – P. 594.

5. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. – М.: Атомиздат, 1975.
6. Кулиш В.В., Лысенко А.В., Бусник А.Ю. // Ж. нано- електрон. фіз., 2012. - № 4. – С. 02037.
7. Вильхельмссон Х. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоиздат, 1981.

Стаття надійшла до редакції 10.04.2013

V.V. Kulish[1], A.V. Lysenko[2], M.Y. Rombovsky[2], V.V. Koval[2], Y.Y. Volk[2]
[1]National Aviation University, pr. Kosmonavta Komarova, 1, 03058, Kyiv
[2]Sumy State University, Rimsky-Korsakov Str., 2, 40007, Sumy
e-mail: yozh92@gmail.com

TO THE THEORY OF FORMATION A WIDE MULTIHARMONIC SPECTRUM IN TWO-STREAM RELATIVISTIC ELECTRON BEAM

The quadratic nonlinear theory of multiharmonic interactions of space charge wave harmonics which increasing owing to the effect of two-stream instability in a two-stream relativistic electron beam is constructed. The multiple three-wave parametric resonance interactions take into consideration. The analysis of the influence of two-stream relativistic beam parameters on the frequency spectrum form of growing multiharmonic space charge wave excited in the investigated system is carried out.

Keywords: two-stream instability, multiple three-wave parametric resonances multiharmonic space charge wave.

В.В. Куліш[1], О.В. Лисенко[2], М.Ю. Ромбовський[2], В.В. Коваль[2], Ю.Ю. Волк[2]
[1]Національний авіаційний університет, пр. Космонавта Комарова 1, 03058, Київ
[2]Сумський державний університет, вул. Римського Корсакова 1, 40007, Суми
e-mail: yozh92@gmail.com

ДО ТЕОРІЇ ФОРМУВАННЯ ШИРОКОГО МУЛЬТИГАРМОНІЧНОГО СПЕКТРА У ДВОПОТОКОВОМУ РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ ПУЧКУ

Побудована квадратична нелінійна теорія мультигармонічних взаємодій гармонік хвилі просторового заряду, яка зростає внаслідок ефекту двопотокової нестійкості у двошвидкісному релятивістському електронному пучку. Проведено врахування множинних трихвильових параметричних резонансних взаємодій. Проаналізовано вплив параметрів двошвидкісного релятивістського пучка на форму частотного спектра зростаючої мультигармонічної хвилі просторового заряду, яка збуджується у досліджуваній системі.

Ключові слова: двопотокова нестійкість, множинні трихвильові параметричні резонанси, мультигармонічна хвиля просторового заряду.