

# ПРОБЛЕМА ВИКОРИСТАННЯ ШУБНІКОВСЬКИХ ГРУП ДЛЯ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ РЕЛАКСАЦІЙНОЇ ОПТИКИ

Ю.В.Кундік<sup>1</sup>, П.П.Трохимчук<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Волинський державний університет ім. Лесі Українки,  
пр. Волі, 13, Луцьк, 43021,  
e-mail: trope@lab.univer.lutsk.ua; trope53@yahoo.com; trope@yandex.ru

<sup>2</sup> Луцький біотехнічний інститут Міжнародного науково-технічного  
університету, вул. Сагайдачного, 7, Луцьк, 43025

Наводиться стислий аналіз шубніковських груп та їх узагальнень з метою використання їх для опису процесів релаксаційної оптики. Наводяться приклади використання кристалографічних груп у параметричній кристалооптиці. Обґрунтовується припущення, що шубніковські групи можна використовувати і для вивчення процесів, які обумовлені структурними змінами опромінюваного середовища.

## Вступ

Проблема опису процесів незворотної взаємодії оптичного випромінювання з речовиною є однією з головних проблем релаксаційної оптики [1]. Дві основні причини виникнення цього розділу фізики пов'язані з тим, що в ряді процесів поняття забороненої зони вироджується, і тому проблематично використовувати квантовомеханічну теорію твердого тіла. З іншого боку, поняття порогової енергії утворення дефекту за Зейтцом також не підходить для опромінення кристалічних твердих тіл оптичним випромінюванням. А експериментальні результати підтверджують утворення як дефектів, так і електрично активних центрів донорного типу при опроміненні різних напівпровідників [1]. Особливо цікавими є результати, які були отримані на антимоніді та арсеніді індію (вузькозонні напівпровідники з ширинами зони 0,18 еВ та 0,36 еВ відповідно) при опроміненні імпульсами рубінового лазера (тривалість імпульсу опромінення 20 нс, енергія кванта випромінювання 1,78 еВ). При таких режимах опромінення можуть генеруватись різні

поля (механічні, теплові, плазмові), а сам процес може супроводжуватись рядом нелінійних ефектів [2]. Окрім того, антимонід та арсенід індію належать до електронних феромагнетиків [3]. Тому для моделювання процесів релаксаційної оптики – як рівноважних, так і нерівноважних, варто застосувати шубніковські групи та їх модифікації [4–6].

Використовувати кристалографічні групи у фізиці почали доволі давно. Кристалографія є окремим розділом сучасної науки, важко навіть сказати куди її більше треба відносити – до фізики, математики чи хімії.

Найбільш вдале використання кристалографічних груп у кристалофізиці, зокрема у кристалооптиці [7–8]. Поняття оптичної індикатриси та кристалографічних груп відіграє визначну роль у нелінійній оптиці. Саме виходячи з симетрії кристалу, ми можемо сказати, наскільки ефективною є генерація другої чи третьої гармоніки або, скажімо, параметрична генерація світла [9]. Питаннями ж використання класичної кристалографії, зокрема шубніковських груп для опису незворотних змін ніхто не займався.

### Основні поняття шубніковських груп та їх розширень

Основні поняття шубніковських груп було закладено ще в 20-х роках ХХ-го століття у зв'язку з появою робіт по знаходженню “малих” кристалографічних – стрічкових, шарових та стрижневих підгруп 230 федоровських груп. В основу антисиметрії було покладено ідею зображати двосторонньо-плоску фігуру (стрічку, шар) на односторонній площині малюнку за допомогою чорного та білого кольорів. Цю ідею поширили на кристалографію швейцарський математик Г.Хеєш та російський кристалограф А.В.Шубніков. Хеєш розв'язав частковий випадок геометричної задачі, яка була сформульована Бібербахом і Фробеніусом: багатовимірне узагальнення класичних груп. А.В.Шубніков сформулював поняття антисиметрії як принципове розширення класичної симетрії за рахунок добавки зміни фізичної властивості та пов'язаних з нею явищ.

У 1951 р. разом з монографією А.В.Шубнікова [10] Л.Ландау та Є.Ліфшицем [11] було введено операцію інверсії часу. На основі цього було розроблено магнітну інтерпретацію антисиметрії Тавгера [6] та її застосування у фізиці Кокрена [6].

Суть антисиметрії полягає у приписуванні знаку “плюс” або “мінус” будь-якій точці фігури, після чого ізометричне перетворення називається перетворенням симетрії або анти симетрії відповідно до того, коли воно переводить кожную точку в точку з тим же чи протилежним знаком, відповідно.

Групи симетрії та антисиметрії діляться на три типи:

- 1) ті, які не включають перетворень антисиметрії – полярні (однокольорові), або породжуючі, які співпадають з класичними групами симетрії;
- 2) ті, які включають антитотожне перетворення – нейтральні (сірі), або ж старші, які отримуються “подвоєнням” класичних за рахунок додавання антитотожної операції (заміни знаків);

- 3) ті, які включають перетворення антисиметрії без антитотожного перетворення – групи змішаної полярності (чорно-білі), або молодші.

У загальному випадку є 90 груп точкової симетрії з врахуванням “магнітної” точкової симетрії [4].

Завершення цієї роботи було зроблено А.Заморзаєвим [6]. Згідно з цією теорією, при перенесенні її на просторові групи можна зробити висновок, що:

- 1) всяка шубніковська група  $Ш$ , яка не є федоровською, включає федоровську групу  $\Phi_0$  як підгрупу індексу 2;
- 2) всяка шубніковська група  $Ш$  або є федоровською, або породжується певною федоровською групою  $\Phi_0$  як старша або молодша;
- 3) множина, яка породжена федоровською групою, складається з шубніковських груп.

В загальному ж випадку є 1651 шубніковська група. Це число є сумою 230 породжуючих, 230 старших та 1191 молодших груп. Породжуючими є федоровські групи.

Під впливом рентгеноструктурних застосувань антисиметрії Н.В.Белов з учнями підтвердили число 1651, виходячи з фізичних міркувань.

Слід зауважити, що для шубніковських груп досі нема єдиних позначень, як і для класичних кристалографічних.

Надалі нас цікавитимуть якраз можливі фізичні застосування шубніковських груп, у тому числі й для моделювання процесів релаксаційної оптики.

### Можливі фізичні застосування кристалографічних, в т.ч. шубніковських, груп, включаючи ефекти параметричної кристалооптики та релаксаційної оптики

Застосування кристалографії у фізичних дослідженнях ґрунтується на принципах Неймана та Коші [8]. Принцип Неймана формулюється так: точкова група симетрії кристалу повинна бути за-

гальною підгрупою всіх його фізичних властивостей. Принцип Кюрі можна сформулювати наступним чином: кристал під впливом зовнішньої дії змінює свою симетрію таким чином, що зберігаються лише елементи симетрії, спільні з елементами симетрії цієї дії.

Звичайно, що принцип фон Неймана не справедливий для магнітних кристалів, якщо користуватись лише класичною кристалографією [12]. Тому більш ніж як дивним видається незнання співробітниками Російської академії наук робіт членів, нехай і покійних, їхньої ж академії (А.Шубнікова та Н.Белова) та результатів докторської дисертації А.Заморзаєва, яка була захищена в тому ж таки Санкт-Петербурзі. Цілком очевидним є факт, що принципи Неймана та Кюрі справджуються й для магнітних кристалів, якщо взяти за основу шубніковські групи. Саме виходячи з цих міркувань, А.В.Шубніков їх і побудував, тобто розширив класичну кристалографію й на магнітні матеріали.

Кристалографічні групи та зображення є основними в дифрактометрії кристалів, кристалооптиці та відіграють важливу роль у нелінійній оптиці та параметричній кристалооптиці. Саме ці розділи сучасної фізики і є основною областю застосувань класичної кристалографії [8].

Поняття оптичної індикатриси є одним із визначальних у кристалооптиці. Саме завдяки цьому поняттю грамотно ставились перші експерименти з нелінійної оптики: генерації другої та третьої гармонік імпульсів рубінового та неодимового лазера, параметрична генерація світла. Більшість ефектів нелінійної оптики в кристалах мають чітко виражений орієнтаційний характер [10], тому тут і зняйшла своє застосування класична кристалографія.

Наведу один приклад із параметричної кристалооптики. Одне з двох відкриттів Радянського Союзу в царині фізичної оптики в Україні було зроблено в лабораторії нелінійної оптики на кафедрі експериментальної фізики Львівського університету ім. І.Франка влітку 1974 року. Са-

ме тоді, ґрунтуючись на кристалографічних міркуваннях та розрахунках, вперше спостерігалось явище електрогірації (обертання площини поляризації в залежності від прикладеного до кристала зовнішнього електричного поля) на сегнетовій солі [7]. Цей кристал цікавий тим, що має три фази: сегнетоелектричну, антисегнетоелектричну та параелектричну. Методику експерименту та передбачення його результатів було зроблено двома учнями академіка А.В.Шубнікова – О.Г.Влохом та І.С.Жолудевим. Для спостереження цього явища достатньо було класичної кристалографії. Однак уже для феромагнетиків для того, щоб відкрити явище магнітогірації, необхідні шубніковські групи.

Дальше розширення та застосування шубніковських груп, точніше офізичення кристалографії, або ж дальше зближення кристалографії та термодинаміки пов'язане зі становленням та розвитком релаксаційної оптики. До цього питання ми підійдемо якраз із фізичної точки зору.

Як відомо, нелінійну оптику з точки зору класичної електродинаміки можна розглядати як теорію, яка враховує розклад діелектричної проникності в ряд по степенях напруженості електричного поля [7].

Окрім того, виділимо у відносних діелектричній та магнітній проникностях речовини дійсну та комплексну частини

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2; \quad (1)$$

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2. \quad (2)$$

Дійсні частини відповідають “чистим” оптичним процесам, уявні частини – втратам оптичного випромінювання. У класичній фізиці ці величини є незалежними величинами [1,13]. Тільки для випадку ізотропного середовища ці величини можуть бути виражені одна через одну (формула Ліндхарда [13]). Але для реальних динамічних процесів ці величини не є незалежними.

Коефіцієнт оптичного відбивання для цього випадку набуває вигляду

$$R_{refl} = \left( \frac{((\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\mu_1 + i\mu_2))^{1/2} - 1}{((\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\mu_1 + i\mu_2))^{1/2} + 1} \right)^2 = \left( \frac{A^2 - 1 + 2Ai \sin \frac{\varphi}{2}}{A^2 + 2A \cos \frac{\varphi}{2} + 1} \right)^2 = \frac{(A^2 - 1)^2 - 4A^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4i(A^2 - 1) \sin \frac{\varphi}{2}}{\left( A^2 + 2A \cos \frac{\varphi}{2} + 1 \right)^2}, \quad (3)$$

де  $A^4 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)(\mu_1^2 + \mu_2^2)$ ;  $\varphi = \arctg \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \arctg \frac{\mu_2}{\mu_1}$ .

Для випадку  $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$  та  $\mu_2 \ll \mu_1$  формула (3) набирає класичного вигляду:

$$R_{refl} = \left( \frac{(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} - 1}{(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} + 1} \right)^2, \quad (4)$$

Для  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$  та  $\mu_2 \gg \mu_1$  формула (3) набуває вигляду

$$R_{refl} = \frac{(A^2 - 1)^2 - 4A^2 + 4i(A^2 - 1)}{(A + 1)^2}, \quad (5)$$

$$A^2 = \varepsilon_2 \mu_2.$$

Формула (3) має загальну форму. Для реальних динамічних та змішаних процесів релаксаційної оптики [1] ми повинні включити обидві частини (дійсну та комплексну) діелектричної та магнітної проникностей.

Для реальних процесів ці проникності мають тензорний характер [1,9] і якраз їх найкраще пов'язати з кристалографічними групами. Це може бути використано для визначення оптичних показників відповідного матеріалу (коефіцієнти поглинання, пропускання, відбивання та заломлення).

Основна різниця між нелінійною та релаксаційною оптикою полягає в різниці

механізмів релаксації оптичного збудження. У нелінійній оптиці основні механізми релаксації випромінювальні, в релаксаційній оптиці – безвипромінювальні. Ця різниця є причиною розкладів у ряд по степенях електричного та магнітного полів не лише дійсної, а й уявної частин відносних діелектричної та магнітної проникностей.

У першому наближенні зв'язок між електричною індукцією та напруженістю електричного поля задається за допомогою відносної діелектричної проникності  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{dD}{dE} \quad (6)$$

та між магнітною індукцією  $B$  і напруженістю магнітного поля  $H$  за допомогою відносної магнітної проникності  $\mu$

$$\mu = \frac{dB}{dH}. \quad (7)$$

Явища нелінійної оптики, як правило, спостерігаються в лінійному, квазілінійному бездисперсному або ж слабо дисперсному середовищі.

У загальному випадку електричну індукцію  $D_j$  можна розкласти в ряд за степенями напруженості електричного поля

$$D_i = (\varepsilon_{ij}^1 + i\varepsilon_{ij}^2)E_j + (\varepsilon_{ijk}^1 + i\varepsilon_{ijk}^2)E_j E_k + (\varepsilon_{ijkl}^1 + i\varepsilon_{ijkl}^2)E_j E_k E_l + \dots, \quad (8)$$

де  $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2, \varepsilon_{ijk}^1, \varepsilon_{ijk}^2, \varepsilon_{ijkl}^1, \varepsilon_{ijkl}^2$  – дійсні та уявні частини відповідних тензорів діелектричної проникності.

Магнітну індукцію  $B_j$  можна розкласти в ряд за степенями напруженості магнітного поля

$$B_i = (\mu_{ij}^1 + i\mu_{ij}^2)H_j + (\mu_{ijk}^1 + i\mu_{ijk}^2)H_jH_k + (\mu_{ijkl}^1 + i\mu_{ijkl}^2)H_jH_kH_l + \dots \quad (9)$$

де  $\mu_{ij}^1, \mu_{ij}^2, \mu_{ijk}^1, \mu_{ijk}^2, \mu_{ijkl}^1, \mu_{ijkl}^2$  – дійсні та уявні частини відповідних тензорів магнітної проникності.

Відповідні тензори діелектричної та магнітної проникностей можна представити у формі

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + i\varepsilon_{ij}^2 + (\varepsilon_{ijk}^1 + i\varepsilon_{ijk}^2)E_k + (\varepsilon_{ijkl}^1 + i\varepsilon_{ijkl}^2)E_kE_l + \dots \quad (10)$$

та

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}^1 + i\mu_{ij}^2 + (\mu_{ijk}^1 + i\mu_{ijk}^2)H_k + (\mu_{ijkl}^1 + i\mu_{ijkl}^2)H_kH_l + \dots \quad (11)$$

Після перегрупування (10) та (11) вони набувають вигляду

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ijk}^1 E_k + \varepsilon_{ijkl}^1 E_k E_l + \dots) + i(\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ijk}^2 E_k + \varepsilon_{ijkl}^2 E_k E_l + \dots) \quad (10a)$$

та

$$\mu_{ij} = (\mu_{ij}^1 + \mu_{ijk}^1 H_k + \mu_{ijkl}^1 H_k H_l + \dots) + i(\mu_{ij}^2 + \mu_{ijk}^2 H_k + \mu_{ijkl}^2 H_k H_l + \dots) \quad (11a)$$

Представлення діелектричної та магнітної проникностей у вигляді (10) та (11) дозволяє включити вплив індукованих у середовищі або прикладених ззовні електричних та магнітних полів на відповідні характеристики середовища.

Величини  $\varepsilon_{ij}$  та  $\mu_{ij}$  можна включити у відповідні фізичні характеристики процесів, включаючи оптичні та динамічні, як тензорний добуток відповідних членів рядів (10) та (11). Кінцевий вигляд цього добутку обумовлений симетрією та властивостями опроміненого матеріалу, випромінювання та індукованих полів.

У загальному випадку тензорний добуток  $\varepsilon_{ij}$  та  $\mu_{ij}$  можна представити у наступній формі [1]

$$\varepsilon_{ij} \times \mu_{ij} = [\varepsilon_{ij}^1 + i\varepsilon_{ij}^2 + (\varepsilon_{ijk}^1 + i\varepsilon_{ijk}^2)E_k + (\varepsilon_{ijkl}^1 + i\varepsilon_{ijkl}^2)E_k E_l + \dots] \times \\ \times [\mu_{ij}^1 + i\mu_{ij}^2 + (\mu_{ijk}^1 + i\mu_{ijk}^2)H_k + (\mu_{ijkl}^1 + i\mu_{ijkl}^2)H_k H_l + \dots] \quad (12)$$

а після перегрупування набуває вигляду

$$\varepsilon_{ij} \times \mu_{ij} = [(\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ijk}^1 E_k + \varepsilon_{ijkl}^1 E_k E_l + \dots) + i(\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ijk}^2 E_k + \varepsilon_{ijkl}^2 E_k E_l + \dots)] \times \\ \times [(\mu_{ij}^1 + \mu_{ijk}^1 H_k + \mu_{ijkl}^1 H_k H_l + \dots) + i(\mu_{ij}^2 + \mu_{ijk}^2 H_k + \mu_{ijkl}^2 H_k H_l + \dots)] \quad (13)$$

Дійсна частина цього тензорного добутку має вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varepsilon_{ij} \times \mu_{ij}) = & (\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ijk}^1 E_k + \varepsilon_{ijkl}^1 E_k E_l + \dots) \times (\mu_{ij}^1 + \mu_{ijk}^1 H_k + \mu_{ijkl}^1 H_k H_l + \dots) - \\ & - (\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ijk}^2 E_k + \varepsilon_{ijkl}^2 E_k E_l + \dots) \times (\mu_{ij}^2 + i\mu_{ijk}^2 H_k + \mu_{ijkl}^2 H_k H_l + \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

а уявна частина –

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\varepsilon_{ij} \times \mu_{ij}) = & (\varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ijk}^1 E_k + \varepsilon_{ijkl}^1 E_k E_l + \dots) \times (\mu_{ij}^2 + i\mu_{ijk}^2 H_k + \mu_{ijkl}^2 H_k H_l + \dots) + \\ & + (\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ijk}^2 E_k + \varepsilon_{ijkl}^2 E_k E_l + \dots) \times (\mu_{ij}^1 + \mu_{ijk}^1 H_k + \mu_{ijkl}^1 H_k H_l + \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

Тензорний добуток (13), його дійсну (14) та уявну (15) частини, окремі члени розкладів тензорів діелектричної та магнітної проникності, а також окремі добутки можна використати для феноменологічної інтерпретації та прогнозування динамічних та змішаних ефектів релаксаційної оптики. Це можуть бути кооперативні електромагнітні процеси, включаючи динамічні феромагнітні, сегнетоелектричні та надпровідні явища. Інтерес являють такі явища як електричне дипольне – магнітне дипольне або ж навпаки.

В цілому тензорний добуток (12) є ні що інше як нелінійний розклад вектора Пойнтінга, тензорні добутки з успіхом використовуються у загальній теорії відносності [14]. Вектор Пойнтінга характеризує перенесення енергії, а це завжди пов'язано з відповідними фізичними явищами.

Щодо федоровських та шубніковських груп можна сказати наступне: федоровські групи відносяться до електричної складової добутку (12), а шубніковські – до магнітної.

Таке розширення застосування кристалографії дозволяє прогнозувати принципово нові фізичні явища, пов'язані з нелінійним поглинанням (уявна частина добутку) та нелінійним перевипромінюванням (дійсна частина добутку). Особливий інтерес тут становлять матеріали з великими діелектричними та

магнітними проникностями, зокрема такі напівпровідники як антимонід та арсенід індію,  $\text{Hg}_x\text{Cd}_{1-x}\text{Te}$  та  $\text{Pb}_x\text{Sn}_{1-x}\text{Te}$ , які є електронними феромагнетиками. На них найкраще можна було б отримати експериментальні результати для змішаних електромагнітних тензорних добутків. Ці методи можуть знайти своє застосування і в нанофізиці, де можуть утворюватись “некласичні” структури.

## Висновки

1. Наведено короткий аналіз основних понять шубніковських груп.
2. Проаналізовано основні застосування кристалографічних груп у нелінійній оптиці, дифрактометрії, кристалооптиці та параметричній кристалооптиці.
3. Показано доцільність використання не тільки дійсної, а й комплексної частини діелектричної та магнітної проникностей, а також їх розкладів у ряди по степенях напруженості електричного та магнітного поля відповідно.
4. Показано, що як розширення застосування федоровських та шубніковських груп доцільно використовувати тензорні добутки тензорів діелектричної та магнітної проникності та їх розкладів у ряд.

### Література

1. P.P.Trokhimchuck, *Foundation of Relaxed Optics* (Vezha, Lutsk, 2006).
2. П.П.Трохимчук, В сб.: *Лазерная и оптико-электронная техника*, ред. И.С.Манак. вып. 10. (Академия управления при президенте республики Беларусь, Минск., 2006), с. 77.
3. О.Маделунг, *Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп* (Мир, Москва, 1967).
4. М.Хамермеш. *Теория групп и ее применение к физическим проблемам* (Мир, Москва, 1966).
5. В.А.Копцик. *Шубниковские группы* (Изд-во МГУ, Москва, 1966).
6. А.М.Заморзаев, Ю.С.Карпова, А.П.Лунгу, А.Ф.Палистрант, *P-симметрия и ее дальнейшее развитие* (Штиинца, Кишинев, 1986).
7. О.Г.Влох, *Явления пространственной дисперсии в параметрической кристаллооптике*. (Вища школа, Львов, 1984).
8. М.О.Романюк. *Кристаллооптика* (Институт змісту та методів навчання, Київ, 1997).
9. R.W.Boyd, *Nonlinear Optics* (Academic Press, Amsterdam, 2003).
10. А.В.Шубников. *Симметрия и антисимметрия конечных фигур* (Изд-во АН СССР, Москва, 1951).
11. Л.Ландау, Е.Лифшиц. *Статистическая физика* (ГИТТЛ, Москва, 1951).
12. А.В.Ковалев, *Электронный журнал "Исследовано в России"*, 787, 2003, <http://zhurnal.apc.relarn.ru/articles/2003/070.pdf>
13. М.М.Бредов, В.В.Румянцев, И.Н.Топтыгин, *Классическая электродинамика* (Наука, Москва, 1985).
14. Дж.Вебер. *Общая теория относительности и гравитационные волны* (ИЛ, Москва, 1962).

## PROBLEM OF APPLICATION OF SHUBNIKOV GROUPS FOR THE DESCRIPTION OF THE PROCESSES OF RELAXED OPTICS

**Yu.V.Kundik<sup>1</sup>, P.P.Trokhimchuck<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Lesya Ukrayinka Volyn State University, Voly av.,13, Lutsk, 43021  
e-mail: trope@lab.univer.lutsk.ua; trope53@yahoo.com; trope@yandex.ru

<sup>2</sup> Lutsk Biotechnical Institute of International Scientific Technical University,  
Sahaydachnoho str. 6, Lutsk, 43025

A brief analysis of Shubnikov groups and their generalization is presented for their application to describe the processes of relaxed optics. Examples of application of crystallographic groups in parametric crystallooptics are given. An assumption of Shubnikov groups application for the studies of processes due structural changes of an irradiated medium is discussed.